

Proč je obvod Slunce menší než $2\pi r$?

Michal Křížek

Věnováno Ing. Vladimíru Novotnému k jeho 65. narozeninám

Abstract [Why the Sun's circumference is less than $2\pi r$?]: In this paper we investigate differences between the Euclidean geometry and the spacetime geometry. We derive formulas for the proper radius and proper volume of a homogeneous mass ball. We shall see that the homogeneous ball, whose mass and radius is the same as that of the Sun, has its circumference about 3 km shorter than $2\pi r$, where r is its proper radius. Similarly, the Earth has its proper volume about 457 km^3 larger than the massless ball with the same circumference. The difference between the classical Euclidean geometry and the geometry of a curved spacetime will be most visible for balls corresponding to compact astrophysical objects such as, e.g., neutron stars.

Key words: Interior Schwarzschild metric, proper radius, coordinate radius, proper volume

Souhrn: V článku vyšetřujeme rozdíly mezi eukleidovskou geometrií a geometrií prostoročasu. Odvodíme vztahy pro skutečný poloměr a skutečný objem homogenní hmotné koule. Uvidíme, že taková koule o hmotnosti a poloměru Slunce má zhruba o 3 km kratší obvod než $2\pi r$, kde r je skutečný poloměr Slunce. Podobně Země má skutečný objem přibližně o 457 km^3 větší objem než nehmotná koule o stejném obvodu. Rozdíl mezi klasickou eukleidovskou geometrií a geometrií zakřiveného prostoročasu bude nejvíce patrný pro koule odpovídající zhrouceným kompaktním astrofyzikálním objektům, jako jsou např. neutronové hvězdy.

Klíčová slova: vnitřní Schwarzschildova metrika, skutečný poloměr, zdánlivý poloměr, skutečný objem

MESC: G30, G60, I50, I60.

Úvod

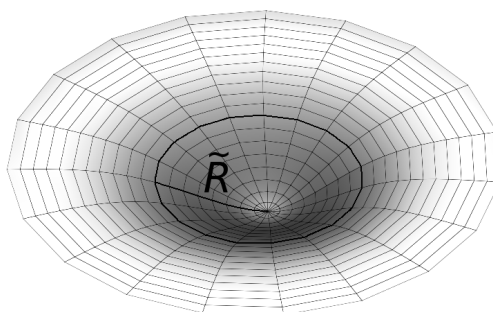
Symbolem \mathbb{E}^n označme n -rozměrný eukleidovský prostor. V eukleidovské rovině \mathbb{E}^2 je poměr obvodu kružnice k jejímu poloměru vždy roven 2π . Na hladké zakřivené ploše (varietě) v \mathbb{E}^3 to obecně pravda není. Co zde ovšem rozumíme kružnicí, jejím poloměrem a obvodem?

Pro názornou představu uvažujme provázek délky $\tilde{R} > 0$, ne příliš dlouhý¹, abychom se vyhnuli rozmanitým paradoxním případům. Jeden konec provázku necht' je upevněn ve zvoleném bodu O plochy. Druhým koncem opíšeme uzavřenou křivku tak, aby byl provázek stále natažený a ležel v dané zakřivené ploše. Kružnici o středu O a poloměru \tilde{R} budeme rozumět výslednou křivku a obvodem kružnice budeme rozumět délku této křivky.

Popsanou situaci lze matematicky formalizovat prostřednictvím geodetik (tj. nejkratších spojnic dvou bodů) a vztahů pro délku hladké křivky v trojrozměrném prostoru. Délka křivky, jež je zadána parametricky $x = \phi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$, $s_1 \leq s \leq s_2$, $\dot{\phi} = d\phi/ds$ atd., je podle [1, s. 592] rovna

$$l = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\dot{\phi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s) + \dot{\chi}^2(s)} ds = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} ds.$$

Náš okolní svět se od eukleidovského prostoru odlišuje tím, že hmotné objekty skutečný prostor zakřivují. V celém článku budeme předpokládat, že toho zakřivení je dostatečně přesně popsáno obecnou teorií relativity. Kouli na trojrozměrné zakřivené varietě vložené do \mathbb{E}^n pro vhodné $n > 3$ lze definovat podobně jako kružnici na zakřivené ploše. Pro jednoduchost se budeme nadále zabývat pouze sféricky symetrickými objekty.



Obrázek 1. Schematické znázornění deformace prostoru homogenní hmotnou koulí. Kladná hmotnost koule způsobí, že obvod kružnice o poloměru \tilde{R} bude menší než $2\pi\tilde{R}$. Vlnka nad R označuje, že jde o poloměr měřený na odpovídající zakřivené varietě. Jde vlastně jen o její řez vodorovnou rovinou, protože vertikální směr slouží pouze k ilustraci zakřivení variety.

¹Tím se vyhneme tomu, aby kružnice procházela svým středem např. na válcové ploše. Podobně zjistíme, že na jednotkové sféře neexistuje kružnice o poloměru $\tilde{R} = 4$.

Koule

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

o poloměru $R > 0$ v trojrozměrném eukleidovském prostoru má obvod $2\pi R$. Skutečná homogenní hmotná koule o stejném obvodu $2\pi R$ má ale v zakřiveném prostoru² (prostorochasu) delší poloměr \tilde{R} (viz obr. 1). V tomto článku odvodíme, o kolik se pro homogenní hmotnou kouli liší \tilde{R} od R . Také ukážeme, že její objem, resp. povrch je menší než $\frac{4}{3}\pi\tilde{R}^3$, resp. $4\pi\tilde{R}^2$. Konkrétní případy (včetně našeho Slunce) uvedeme v kapitole 4.

1 Základní vztahy a definice

Vzdálenost dvou libovolných bodů (x, y, z) a $(x+dx, y+dy, z+dz)$ v trojrozměrném eukleidovském prostoru \mathbb{E}^3 je dána délkovým elementem dl , který splňuje zobecněnou Pythagorovu větu

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1)$$

Místo kartézských souřadnic (x, y, z) je pro kouli vhodnější používat standardní *sférické souřadnice* (r, φ, θ) ,

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (2)$$

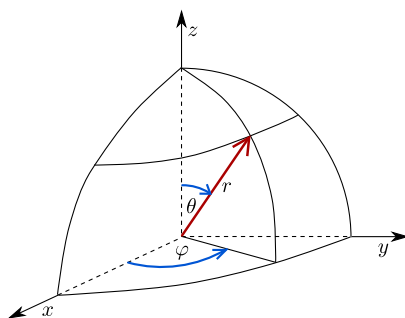
kde $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ a $\theta \in [0, \pi]$, viz obr. 2. Dále budeme předpokládat, že body (r, φ, θ) a $(r+dr, \varphi+d\varphi, \theta+d\theta)$ jsou infinitezimálně blízké. Postupným derivováním podle (r, φ, θ) lze metriku (1) převést pomocí (2) na tvar (podrobnosti viz např. [2])

$$dl^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2 = \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \\ d\theta \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \\ d\theta \end{pmatrix}. \quad (3)$$

V tomto speciálním případě je redukovaný metrický tenzor typu 3×3 dán diagonální maticí na pravé straně vztahu (3).

V důsledku sférické symetrie budeme *obvodem koule* rozumět délku její libovolné hlavní kružnice, např. rovníku.

²Nadále budeme používat jen termín prostor místo prostorochas, protože uvažované koule budou nehybné.



Obrázek 2. Bod (x, y, z) ve standardních sférických souřadnicích (r, φ, θ)

Definice 1. Má-li koule obvod o , pak číslo

$$R = \frac{o}{2\pi}$$

nazveme jejím *zdánlivým poloměrem*.

Definice 2. Vzdálenost středu koule k jejímu libovolnému bodu na povrchu označíme \tilde{R} a nazveme *skutečným poloměrem*.

V eukleidovském prostoru dávají obě definice pro danou kouli stejné hodnoty, tj. $R = \tilde{R}$. V následující kapitole však uvidíme, že v obecné teorii relativity, která věrněji popisuje náš okolní svět než eukleidovská geometrie, tyto definice nedávají stejné hodnoty a měli bychom je důsledně rozlišovat. Zdánlivý poloměr je totiž menší než skutečný poloměr hmotné koule (viz obr. 1), protože hmotné objekty zakřivují prostor kolem sebe včetně svého vnitřku. Skutečnému poloměru (angl. proper radius) se někdy říká vlastní nebo relativistický poloměr. Zdánlivý poloměr se v anglické literatuře většinou označuje slovem coordinate radius.

Změřit obvod Země a tím i její zdánlivý poloměr je teoreticky možné. Naproti tomu změřit její skutečný poloměr je takřka nemožné. To je jeden z důvodů, proč budeme hledat vztah mezi oběma typy poloměrů. Další důvod uvádíme před větou 1.

2 Obvod, povrch a skutečný poloměr homogenní hmotné koule

Pro jednoduchost uvažujme homogenní nerotující kouli ve vakuu o hmotnosti $M > 0$. Její zdánlivý poloměr³ označme $R > 0$. V roce 1916 slavný německý matematik a fyzik Karl Schwarzschild⁴ odvodil vztah pro metriku uvnitř takovéto koule (viz [3]).

³Smysl definice 1 bude patrný ze vztahu (8).

⁴Karl Schwarzschild (1873 – 1916) v roce 1915 také jako první našel speciální vakuové řešení Einsteinových rovnic (angl. the Schwarzschild blackhole solution), viz (7).

Tedy šlo o první nevakuumé řešení Einsteinových rovnic. Schwarzschild předpokládal, že koule je tvořena ideální nestlačitelnou tekutinou, aby se vyhnul případnému vnitřnímu mechanickému napětí v pevných látkách, které nepatrně ovlivňuje rozložení gravitačního pole. Potom podle [4] (viz též [5, s. 529]) pro odpovídající časově neměnný (tj. $dt = 0$) délkový element dl platí (srov. (3))

$$dl^2 = \frac{R^3}{R^3 - R_\bullet r^2} dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2, \quad (4)$$

kde

$$R_\bullet = \frac{2MG}{c^2} \quad (5)$$

je *Schwarzschildův gravitační poloměr*, $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ je gravitační konstanta, $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ je rychlost světla ve vakuu a $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$ jsou standardní sférické souřadnice. Vztahu (4) se říká *vnitřní Schwarzschildovo řešení*, viz [6, s. 213]. Tím se míní, že odpovídající metrický tenzor je přesným řešením Einsteinových rovnic (bez kosmologické konstanty).

Aby první koeficient na pravé straně metriky (4) byl kladný a nedělilo se nulou, požadujeme, aby

$$\frac{R^3}{R^3 - R_\bullet r^2} = \left(1 - \frac{R_\bullet r^2}{R^3}\right)^{-1} > 0 \quad \forall r \in [0, R].$$

Tedy

$$R > R_\bullet. \quad (6)$$

Poznamenejme, že prostor je zakřiven i vně hmotné koule [2]. Birkhoffova věta tvrdí [7], že jeho zakřivení mimo kouli (tj. pro $r > R$) je popsáno standardní *Schwarzschildovou metrikou* pro pevný čas (viz [8])

$$dl^2 = \frac{r}{r - R_\bullet} dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2 \quad (7)$$

pro libovolné sféricky symetrické rozložení hustoty uvnitř koule. Vidíme, že pro $r = R$ metrika (4) pro vnitřek koule spojitě navazuje na Schwarzschildovu metriku (7) definovanou vně koule.⁵ Pro $R_\bullet \rightarrow 0$ přecházejí obě metriky (4) i (7) na standardní eukleidovskou metriku (3).

Pokusme se nejprve zintegrovat délkový element (4) v tangenciálním směru kolem rovníku. Pro $r = R$, $dr = 0$, $\theta = \pi/2$ a $d\theta = 0$ máme

$$o = \int_0^{2\pi} R \sin \theta d\varphi = R \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R. \quad (8)$$

⁵Pro zhroutené objekty (černé díry) je Schwarzschildova metrika (7) definována pro $r > R_\bullet$.

Obvod hmotné koule o zdánlivém poloměru R je tedy $2\pi R$ jako v eukleidovském prostoru. Stejný obvod dostaneme i pro metriku (7). Zavádět zdánlivý poloměr pomocí definice 1 má tudíž dobrý smysl.

Pro povrchový element na poloměru $r = R$ podle (4) platí

$$dS = (R \sin \theta d\varphi) \cdot (R d\theta).$$

Odtud pomocí Fubiniovy věty pro povrch hmotné i nehmotné koule dostaneme rovněž standardní vztah

$$S = \int_0^\pi R \left(\int_0^{2\pi} R \sin \theta d\varphi \right) d\theta = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi R^2. \quad (9)$$

Odtud vyplývá, že definici 1 bychom mohli ekvivalentně vyslovit také takto: Má-li koule povrch S , pak číslo $R = \frac{1}{2}\sqrt{S/\pi}$ nazveme jejím zdánlivým poloměrem.

Dále budeme vyšetřovat délku skutečného poloměru \tilde{R} homogenní hmotné koule v zakřiveném prostoru v radiálním směru r . Ze vztahů $d\varphi = 0$, $d\theta = 0$, (4) a (6) pro $0 \leq r_1 < r_2 \leq R$ dostáváme okamžitě nerovnost (srov. obr. 1)

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{R_\bullet r^2}{R^3}}} dr > \int_{r_1}^{r_2} dr = r_2 - r_1.$$

Odtud je patrné, že se délkový element v radiálním směru natahuje ve srovnání s eukleidovským prostorem. Zde je dobré si uvědomit, že každý skutečný poloměr hmotné koule představuje geodetiku, tj. nejkratší spojnici libovolného bodu na povrchu koule s jejím středem, jak je pro názornost naznačeno na obr. 1.

Nyní se pokusíme vypočítat délku skutečného poloměru. Jestliže $d\varphi = 0$ a $d\theta = 0$, pak se rovnost (4) zřejmě redukuje na tvar

$$dt^2 = \frac{dr^2}{1 - \alpha^2 r^2}, \quad (10)$$

kde

$$\alpha = \sqrt{\frac{R_\bullet}{R^3}}. \quad (11)$$

Pro $r \in [0, \alpha^{-1})$ lze snadno ověřit, že funkce⁶

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2 r^2}} \quad (12)$$

⁶Všimněte si, že funkce f má integrovatelnou singularitu v levém okolí bodu $r = \alpha^{-1}$.

má primitivní funkci

$$F(r) = \frac{1}{\alpha} \arcsin(\alpha r). \quad (13)$$

Ze vztahů (6) a (11) vidíme, že

$$R < R \sqrt{\frac{R}{R_\bullet}} = \alpha^{-1}.$$

Primitivní funkci F můžeme tedy uvažovat i na kratším intervalu $[0, R] \subset [0, \alpha^{-1}]$. Výsledný vztah pro poloměr homogenní hmotné koule v zakřiveném prostoru získáme integrací délkového elementu dl pomocí vztahů (10), (12) a (13),

$$\tilde{R} = \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1 - \alpha^2 r^2}} = \frac{1}{\alpha} \arcsin(\alpha R). \quad (14)$$

Odtud pro pevné $R > 0$ použitím l'Hospitalova pravidla snadno zjistíme, že

$$\tilde{R} \rightarrow R \quad \text{pro } \alpha \rightarrow 0,$$

tj. když $M \rightarrow 0$, jak plyne z (5) a (11).

Pro zadaný obvod koule o či její zadaný povrch S existuje právě jeden zdánlivý poloměr R , zatímco její skutečný poloměr \tilde{R} jednoznačně určen není. Záleží totiž na hmotnosti koule M . Čím je M větší, tím je \tilde{R} větší.

Věta 1. *Je-li $M > 0$ pevné, pak je funkce $R \mapsto \tilde{R} - R$ klesající a ryze konvexní na intervalu (R_\bullet, ∞) .*

Důkaz plyne pomocí standardních prostředků matematické analýzy ze vztahů (11) a (12) s využitím podmínky (6).

3 Skutečný objem homogenní hmotné koule

Objemový element má podle (4) a (10) tvar

$$d\tilde{V} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \alpha^2 r^2}} \cdot (r \sin \theta d\varphi) \cdot (r d\theta). \quad (15)$$

Snadno se lze přesvědčit, že funkce

$$h(r) = \frac{r^2}{\sqrt{1 - \alpha^2 r^2}}$$

má na intervalu $[0, \alpha^{-1})$ primitivní funkci (srov. [9, s. 298])

$$H(r) = \frac{1}{2\alpha^3} \arcsin \alpha r - \frac{r}{2\alpha^2} \sqrt{1 - \alpha^2 r^2}.$$

Odtud podle Fubiniovy věty pro skutečný (relativistický) objem homogenní hmotné koule dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - \alpha^2 r^2}} \cdot \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \sin \theta d\varphi \right) d\theta = H(R) \cdot 4\pi \\ &= \frac{2\pi}{\alpha^2} \left(\frac{\arcsin \alpha R}{\alpha} - R \sqrt{1 - \alpha^2 R^2} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Pro pevné $R > 0$ lze pomocí l'Hospitalova pravidla a vztahu (11) dokázat, že

$$\tilde{V} \rightarrow V := \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{pro } \alpha \rightarrow 0.$$

Věta 2. *Je-li $M > 0$ pevné, pak je funkce $R \mapsto \tilde{V}/V$ klesající a ryze konvexní na intervalu (R_\bullet, ∞) .*

Důkaz plyne dosazením (11) do (16) s využitím podmínky (6). Hmota se tedy gravitačnímu stlačování brání tím, že se snaží vytvořit si větší objem \tilde{V} , než je zdánlivý objem V pozorovaný zvnějšku (viz obr. 4). Jinými slovy, čím větší je M , tím větší je \tilde{V} pro pevný obvod (též pevný povrch či zdánlivý objem V). Podobnou vlastnost mají minerály zeolity, které mají speciální uspořádání atomů v krystalové mřížce. Jakmile jsou stlačeny, zvětšují svůj objem.

4 Aplikace

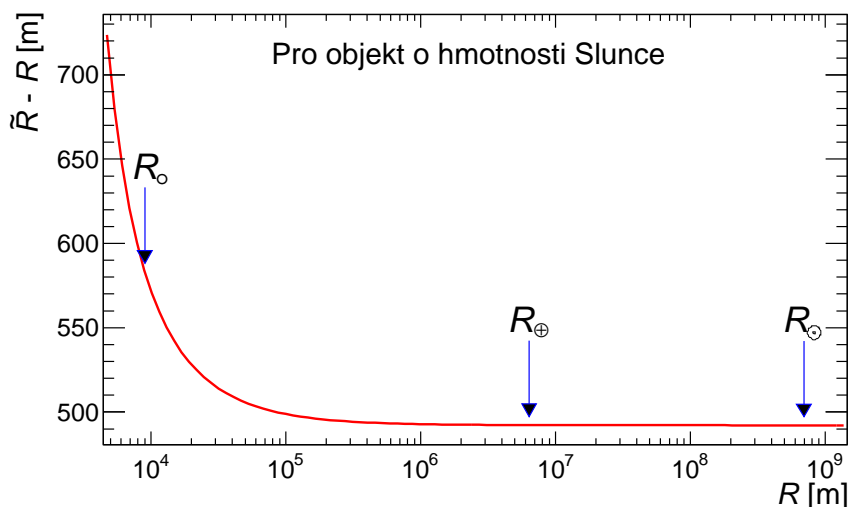
Příklad 1 (Slunce). Uvažujme homogenní kouli o hmotnosti

$$M_\odot = 1.988547 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

a zdánlivém poloměru⁷ $R_\odot = 695.7 \cdot 10^6$ m. To jsou hodnoty odpovídající našemu Slunci. Jde ale jen o idealizaci, protože Slunce je mírně zploštělé, rotuje a mírně osciluje, jeho povrch není přesně definován a ani rozložení hmoty uvnitř není homogenní. Dosazením výše uvedených hodnot do vztahů (5), (11) a (14) dostaneme $R_\bullet = 2953$ m a

$$\tilde{R}_\odot - R_\odot = 492.2 \text{ m,}$$

⁷V rezoluci B3 přijaté na 29. valném shromáždění Mezinárodní astronomické unie v roce 2015 se poloměr Slunce udává jen na čtyři platná místa.



Obrázek 3. Závislost rozdílu $\tilde{R} - R$ skutečného a zdánlivého poloměru na R pro $M = M_{\odot}$ (viz věta 1)

viz obr. 3. Průměry hmotné a nehmotné koule o stejném obvodu $2\pi R_{\odot}$ se tedy liší zhruba jen o 1 km (srov. [2, s. 1099]). Jestliže v názvu našeho článku zvolíme skutečný poloměr $r = \tilde{R}_{\odot}$, pak za našich zjednodušujících předpokladů bude podle (8) eukleidovský obvod $2\pi R_{\odot}$ asi o 3 km kratší než $2\pi \tilde{R}_{\odot}$.

Označme $S_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2$ povrch uvažované koule (viz (9)). Kdybychom nyní skutečný poloměr \tilde{R}_{\odot} čistě formálně dosadili do klasického eukleidovského vztahu pro povrch koule $\tilde{S}_{\odot} = 4\pi \tilde{R}_{\odot}^2$, tak dostaneme

$$\tilde{S}_{\odot} - S_{\odot} = 4\pi(\tilde{R}_{\odot} - R_{\odot})(\tilde{R}_{\odot} + R_{\odot}) = 8\,606\,414 \text{ km}^2,$$

což je plocha srovnatelná s rozlohou Brazílie. Rozdíl skutečného objemu (16) a objemu eukleidovského $V_{\odot} = \frac{4}{3}\pi R_{\odot}^3$ je roven

$$\tilde{V}_{\odot} - V_{\odot} = 1.796 \cdot 10^{12} \text{ km}^3.$$

To je více než objem Země $\approx 10^{12} \text{ km}^3$.

Příklad 2 (Země). Pro data

$$M_{\oplus} = 5.97219 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad \text{a} \quad R_{\oplus} = 6.378 \cdot 10^6 \text{ m}$$

odpovídající naší Zemi dostaneme jen zcela nepatrné hodnoty $R_{\bullet} = 8.9 \text{ mm}$ a

$$\tilde{R}_{\oplus} - R_{\oplus} = 1.478 \text{ mm}.$$

Postup je stejný jako v příkladu 1. Mnohem překvapivější jsou ale podle (9) a (16) následující relativistické efekty

$$\tilde{S}_{\oplus} - S_{\oplus} = 236\,966 \text{ m}^2 \quad \text{a} \quad \tilde{V}_{\oplus} - V_{\oplus} = 457 \text{ km}^3,$$

kde $\tilde{S}_{\oplus} = 4\pi\tilde{R}_{\oplus}^2$ a $V_{\oplus} = \frac{4}{3}\pi R_{\oplus}^3$.

Příklad 3 (bílý trpaslík). Kdyby se naše Slunce změnilo na bílého trpaslíka s hmotností M_{\odot} a poloměrem R_{\oplus} , tak by rozdíl skutečného a zdánlivého poloměru byl 492.3 metrů (srov. příklad 1 a obr. 3).

Příklad 4 (neutronová hvězda). Pro hypotetickou neutronovou hvězdu o hmotnosti M_{\odot} a poloměru $R_{\odot} = 9 \text{ km}$ by rozdíl skutečného (relativistického) a zdánlivého poloměru byl 583 metrů (viz obr. 3). V tomto případě je relativní změna délky poloměru mnohem větší než v příkladu 1. Skutečný objem \tilde{V}_{\odot} je podle (16) přibližně o 13 % větší než zdánlivý objem V_{\odot} (viz obr. 4).

Pro neutronovou hvězdu o realističtější hmotnosti $2M_{\odot}$ a poloměru $R_{\odot} = 10 \text{ km}$ je už rozdíl

$$\tilde{R}_{\odot} - R_{\odot} = 1.4 \text{ km}$$

dostí velký ve srovnání s R_{\odot} . Při výpočtu objemu či hustoty skutečné neutronové hvězdy je třeba postupovat obezřetně. Pro zdánlivý a skutečný objem pomocí vztahu (16) máme

$$V_{\odot} := \frac{4}{3}\pi R_{\odot}^3 = 4.189 \cdot 10^{12} \text{ m}^3, \quad \tilde{V}_{\odot} = 5.327 \cdot 10^{12} \text{ m}^3.$$

Skutečný objem \tilde{V}_{\odot} je tedy o 27 % větší než zdánlivý objem V_{\odot} .

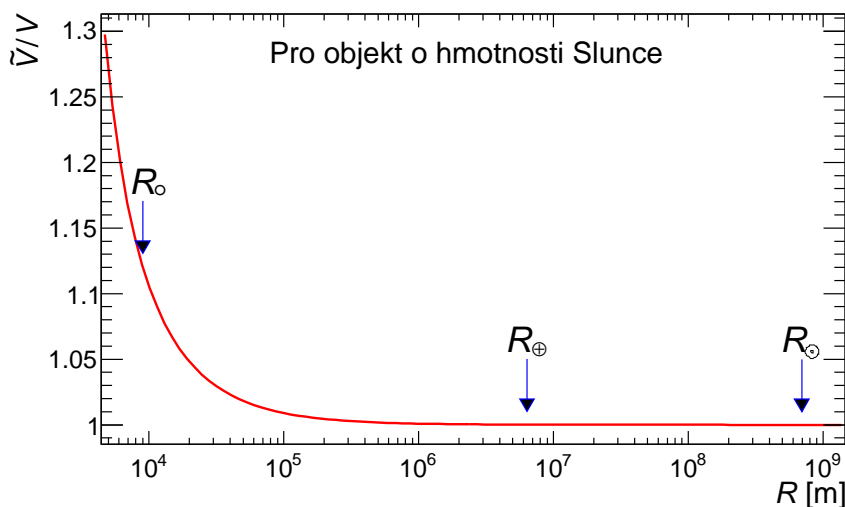
Pro nekonstantní sféricky symetrické rozložení hustoty v předchozích příkladech je třeba příslušně modifikovat metriku (10).

Příklad 5 (černá díra). Pro černou díru o hmotnosti M_{\odot} a Schwarzschildově poloměru $R_{\bullet} = 2953 \text{ m}$ vztah (14) nelze použít, neboť není splněna podmínka (6). Existuje však konečná limita zprava

$$\tilde{R}_{\bullet} := \lim_{R \rightarrow R_{\bullet}+} \sqrt{\frac{R^3}{R_{\bullet}}} \arcsin \sqrt{\frac{R_{\bullet}}{R}} = \frac{\pi}{2} R_{\bullet}.$$

Formálním dosazením do (16) zjistíme, že

$$V_{\bullet} := \frac{4}{3}\pi R_{\bullet}^3 = 10.79 \cdot 10^{10} \text{ m}^3, \quad \tilde{V}_{\bullet} = 25.42 \cdot 10^{10} \text{ m}^3.$$



Obrázek 4. Závislost poměru \tilde{V}/V skutečného a zdánlivého objemu na R pro $M = M_\odot$ (viz věta 2).

Skutečný objem takové hypotetické černé díry by tedy byl cca 2.5krát větší než její zdánlivý objem. Nesmíme ale zapomínat, že jde pouze o matematický model. Stále předpokládáme homogenní rozložení hmoty, což jistě není realistický předpoklad. Pro skutečnou černou díru bychom dostali mnohem větší hodnoty jejího skutečného poloměru či objemu. Teoreticky vycházejí dokonce singulární hodnoty. Hlavně bychom ale neměli používat vztahy z klasické eukleidovské geometrie na zhroucené astrofyzikální objekty.

Na závěr uveďme ještě jednu kosmologickou aplikaci. Metriku (4) lze pomocí (10) převést na tvar

$$dl^2 = \frac{1}{1 - \alpha^2 r^2} dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2,$$

kde $r \in [0, 1)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$ a $\alpha > 0$ je podle (11) pevné číslo. Podobný tvar má metrika

$$dl^2 = \frac{1}{1 - r^2} dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

stacionárního homogenního a izotropního vesmíru reprezentovaného jednotkovou sférou

$$\mathbb{S}^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{E}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\},$$

viz [6, s. 214], [9, s. 297], [10, s. 344]. Sféra \mathbb{S}^3 má ve všech svých bodech konstantní kladnou křivost rovnou 1. Nejkratšími spojnicemi na \mathbb{S}^3 jsou oblouky hlavních kružnic. Trojúhelník, jehož strany jsou oblouky hlavních kružnic, má součet úhlů větší než 180° . Trojúhelník uvnitř homogenní hmotné koule, jehož strany jsou geodetiky, tak bude mít součet úhlů také větší než 180° . Podle teorie relativity homogenní rozložení hmoty tedy způsobuje kladnou křivost. Pokud měl kdysi náš vesmír v pevném časovém okamžiku homogenní rozložení hmoty, měla by být jeho křivost také kladná. Sféra \mathbb{S}^3 je matematickým modelem právě takového homogenního vesmíru. Když se později začala hmota lokálně gravitačně shlukovat díky mnoha drobným perturbacím, globální křivost vesmíru zůstala kladná. Nemohla se skokem změnit na nulovou či zápornou křivost. Příslušné variety jsou totiž nekonečné.

L i t e r a t u r a – R e f e r e n c e s

- [1] Rektorys, K.: *Přehled užití matematiky I*. Prometheus, Praha, 1995.
- [2] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A.: *Gravitation*, 20th edition. W. H. Freeman, New York, 1997.
- [3] Schwarzschild, K.: *On the gravitational field of a sphere of incompressible liquid, according to Einstein's theory*. The Abraham Zelmanov Journal 1 (2008), 20–32.
- [4] Ellis, H. G.: *Gravity inside a nonrotating, homogeneous, spherical body*, 2012, arxiv.org/pdf/1203.4750.
- [5] Florides, P. S.: *A new interior Schwarzschild solution*. Prof. Roy. Soc. London A 337 (1974), 529–535.
- [6] Stephani, H.: *Relativity: An introduction to special and general relativity*, 3rd edition. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [7] Birkhoff, G. D.: *Relativity and modern physics*. Harvard Univ. Press, Cambridge, Massachusetts, 1923.
- [8] Moore, T. A.: *A general relativity workbook*. Univ. Sci. Books, 2013.
- [9] Peebles, P. J. E.: *Principles of physical cosmology*. Princeton Univ. Press, New Jersey, 1993.
- [10] Weinberg, S.: *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley & Sons, Inc., New York, London, 1972.

Poděkování: Článek byl podpořen RVO 67985840. Děkuji Janu Brandtsovi, Filipu Křížkovi, Antonínu Slavíkovi a Vladimíru Wagnerovi za cenné připomínky a Haně Bílkové za technickou pomoc.

Adresa autora:

Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1
e-mail: krizek@math.cas.cz