OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2018 (47)

Netušená vlastnost Schwarzschildovy metriky

Michal Křížek

Abstract [Unexpected property of the Schwarzschild metric]: In this paper, we show that the difference between the classical Euclidean geometry and the Schwarzschild geometry of a curved space corresponding to a tiny mass ball can be quite essential. Changes of the volume will be apparent on large galactic and cosmological scales.

Key words: Exterior Schwarzschild metric, relativistic volume, Euclidean volume, Fubini theorem.

Souhrn: V článku ukážeme, že rozdíl mezi klasickou eukleidovskou geometrií a geometrií zakřiveného Schwarzschildova prostoročasu vně malé hmotné koule je dosti podstatný. Změny objemu se projeví hlavně na velké galaktické či kosmologické vzdálenosti.

Klíčová slova: Vnější Schwarzschildova metrika, relativistický objem, eukleidovský objem, Fubiniova věta.

MESC: G30, G60, 150, 160

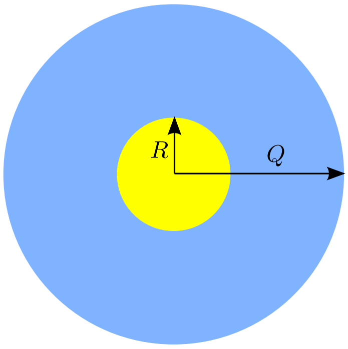
Tento článek je volným pokračováním práce [3], kde jsme se zabývali vlastnostmi Schwarzschildovy metriky uvnitř sféricky symetrických hmotných objektů. V tomto článku se budeme zabývat vlastnostmi Schwarzschildovy metriky vně takových objektů.

Pro kladná čísla $R < Q$ uvažujme mezikoulí o vnitřním poloměru R a vnějším poloměru Q (viz obr. 1). Jeho objem v eukleidovském prostoru E^3 je zřejmě

$$V = \frac{4}{3}\pi(Q^3 - R^3). \tag{1}$$

Vzdálenost dvou libovolných bodů (x, y, z) a $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$ v E^3 je dána délkovým elementem $\mathrm{d}l$, který splňuje zobecněnou Pythagorovu větu

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{2}$$



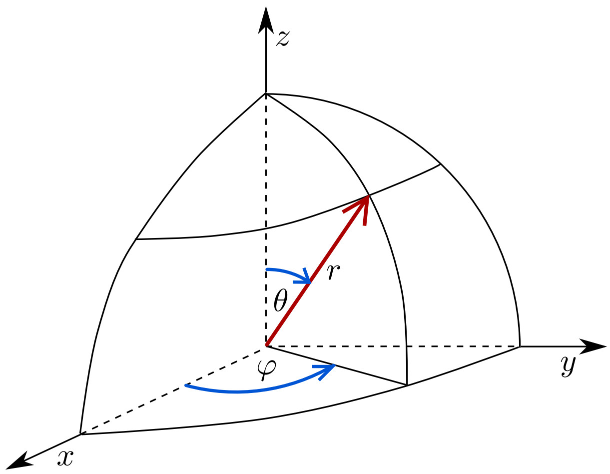
Obrázek 1. Mezikoulí o vnitřním poloměru R a vnějším poloměru Q

Místo kartézských souřadnic (x, y, z) je pro sféricky symetrické objekty vhodnější používat standardní *sférické souřadnice* (r, φ, θ),

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta, \tag{3}$$

kde $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ a $\theta \in [0, \pi]$, viz obr. 2. Dále budeme předpokládat, že body (r, φ, θ) a $(r+\mathrm{d}r, \varphi+\mathrm{d}\varphi, \theta+\mathrm{d}\theta)$ jsou infinitezimálně blízké. Postupným derivováním podle (r, φ, θ) lze metriku (2) převést pomocí (3) na tvar

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2 \sin^2\theta \, \mathrm{d}\varphi^2 + r^2 \mathrm{d}\theta^2. \tag{4}$$



Obrázek 2. Bod (x, y, z) ve standardních sférických souřadnicích (r, φ, θ)

Náš okolní svět se od eukleidovského prostoru E^3 odlišuje tím, že hmotné objekty skutečný prostoročas zakřivují. V celém článku budeme předpokládat, že toho zakřivení je dostatečně přesně popsáno obecnou teorií relativity. Uvidíme, že používání Einsteinových rovnic na velké vzdálenosti může vést k poněkud zkresleným představám o zakřivení skutečného prostoročasu kolem nás.

Pro jednoduchost uvažujme nerotující kouli ve vakuu o hmotnosti $M > 0$ se sféricky symetrickým rozložením hustoty. Označme symbolem

$$S = \frac{2MG}{c^2} \tag{5}$$

Schwarzschildův gravitační poloměr této koule, kde $G = 6.674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ je gravitační konstanta a $c = 299\,792\,458\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ je rychlost světla ve vakuu. Označíme-li o obvod koule, pak *souřadnicový poloměr koule* je definován vztahem $R = o/(2\pi)$. Dále budeme předpokládat, že $R > S$.

V roce 1915 slavný německý matematik a fyzik Karl Schwarzschild [5] našel jako první speciální vakuové řešení Einsteinových rovnic (angl. Schwarzschild blackhole solution), srov. (6) níže. Nadále budeme používat jen termín prostor místo prostoročas, protože uvažovaná koule bude nehybná. Birkhoffova věta tvrdí [1], že zakřivení prostoru mimo kouli (tj. pro $r > R$) je popsáno standardní *Schwarzschildovu metrikou* (viz např. [4])

$$\mathrm{d}l^2 = \frac{r}{r-S}\,\mathrm{d}r^2 + r^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 \tag{6}$$

pro pevný čas a libovolné sféricky symetrické rozložení hustoty uvnitř koule. Přitom odpovídající metrický tenzor je přesným řešením Einsteinových rovnic. Pro $M \to 0$ přechází podle (5) Schwarzschildova metrika (6) na eukleidovskou metriku (4).

Nyní vypočteme, jaký má mezikoulí o poloměrech $R < Q$ skutečný objem $\tilde{V}$ v zakřiveném vnějším prostoru kolem uvažované hmotné koule o souřadnicovém poloměru R (vlnka označuje, že jde o zakřivený prostor). Pomocí (6) zjistíme, že vnější objemový element je roven

$$\mathrm{d}\tilde{V} = \sqrt{\frac{r}{r-S}}\,\mathrm{d}r \cdot (r \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi) \cdot (r\,\mathrm{d}\theta).$$

Odtud a z Fubiniovy věty dostaneme vztah pro *vnější relativistický objem*

$$\tilde{V} = \int_R^Q r^2 \sqrt{\frac{r}{r-S}}\,\mathrm{d}r \cdot \int_0^\pi \Big(\int_0^{2\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\Big)\mathrm{d}\theta = 4\pi \int_R^Q r^2 \sqrt{\frac{r}{r-S}}\,\mathrm{d}r. \tag{7}$$

Derivováním lze ověřit, že

$$\int r^2 \sqrt{\frac{r}{r-S}}\,\mathrm{d}r = \Big(\frac{r^2}{3} + \frac{5Sr}{12} + \frac{5S^2}{8}\Big)\sqrt{r(r-S)} + \frac{5S^3}{16}\ln(2\sqrt{r(r-S)} + 2r - S).$$

Pro rozdíl relativistického a eukleidovského objemu tak podle (7) a (1) platí

$$\begin{aligned}\tilde{V} - V = {} & 4\pi \int_R^Q r^2 \sqrt{\frac{r}{r-S}}\,\mathrm{d}r - \frac{4}{3}\pi(Q^3 - R^3) \qquad (8)\\ = {} & \frac{4\pi}{3}\Big[\Big(Q^2 + \frac{5SQ}{4} + \frac{15S^2}{8}\Big)\sqrt{Q(Q-S)} + \frac{15S^3}{16}\ln(2\sqrt{Q(Q-S)} + 2Q - S)\\ & - \Big(R^2 + \frac{5SR}{4} + \frac{15S^2}{8}\Big)\sqrt{R(R-S)} - \frac{15S^3}{16}\ln(2\sqrt{R(R-S)} + 2R - S)\\ & - Q^3 + R^3\Big].\end{aligned}$$

Ze vztahu (8) nyní vidíme, že pro pevné poloměry $R < Q$ platí

$$\tilde{V} - V \to 0 \quad \text{pro } M \to 0,$$

neboť podle (5) je $S \to 0$. Na druhé straně ale platí následující překvapivé tvrzení.

Věta. *Jsou-li $M > 0$ a $R > S$ libovolná pevná čísla splňující* (5)*, pak*

$$\tilde{V} - V \to \infty \quad \text{pro } Q \to \infty.$$

Důkaz. Předně je třeba konstatovat, že vztah (8) byl odvozen ze Schwarzschildovy metriky (6) přesně bez jakýchkoliv aproximací. Protože

$$Q > R > S$$

a logaritmus je rostoucí funkce, rozdíl členů obsahující logaritmy v (8) je kladný.[1] Z nerovnosti

$$\sqrt{Q(Q-S)} > Q - S$$

pak dostaneme dolní odhad

$$\tilde{V} - V > \Big(Q^2 + \frac{5SQ}{4} + \frac{15S^2}{8}\Big)(Q - S) - Q^3 + C = \frac{SQ^2}{4} + \frac{5S^2Q}{8} + \overline{C},$$

kde C obsahuje všechny zbývající členy nezávislé na Q a kde $\overline{C} = C - 15S^3/8$. Pro $Q \to \infty$ tak dostaneme tvrzení věty. □

[1] Jelikož ln $a-$ ln $b = \ln(a/b)$, argument v kulatých závorkách je bezrozměrný.

Rozdíl objemů $\tilde{V} - V$ tak roste nade všechny meze pro $Q \to \infty$, což je dosti absurdní výsledek. Předchozí větu můžeme totiž použít např. na kulečníkovou kouli, malou cíněnku či špendlíkovou hlavičku, protože hmotnost $M > 0$ je libovolná pevná. Otázkou tak zůstává, jak velké Q můžeme ještě volit, aby relativistický objem $\tilde{V}$ ze vztahu (7) dobře aproximoval realitu.

Zvolíme-li např. $Q = 5 \cdot 10^{20}$ m jako je poloměr naší Galaxie, pak pro cíněnku o poloměru $R = 0.01$ m umístěnou ve vakuu je $M = 0.033$ kg a $S = 5 \cdot 10^{-29}$ m. Podle vztahu (8) pak rozdíl objemů činí

$$\tilde{V} - V \approx 10\,000 \text{ km}^3,$$

což je cca 10^{19}krát více než objem samotné cíněnky. Jinými slovy, cíněnka vložená do prázdného plochého prostoru vygeneruje kolem sebe na vzdálenost Q deset tisíc kilometrů krychlových objemu navíc oproti eukleidovskému objemu. Odtud vidíme, jak ošidné může být používání Einsteinových rovnic na galaktické vzdálenosti. Pokud uplatníme obecnou teorii relativity dokonce na kosmologické vzdálenosti, popř. na celý vesmír, můžeme získat dosti zkreslené výsledky [2].

Literatura – References

[1] Birkhoff, G. D.: *Relativity and modern physics*. Harward Univ. Press, Cambridge, Massachusetts, 1923.

[2] Křížek, M.: *Kritika standardního kosmologického modelu. Nikdy neztotožňujme model s realitou.* Čs. čas. fyz. 64 (2014), 359–367.

[3] Křížek, M.: *Proč je obvod Slunce menší než $2\pi r$?* Obzory mat. fyz. inf. 46 (2017), č. 3, 7–18.

[4] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A.: *Gravitation*, 20th edition. W. H. Freeman, New York, 1997.

[5] Schwarzschild, K.: *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (1916), 189–196; translation: *On the gravitational field of a point-mass, according to Einstein's theory*. The Abraham Zelmanov Journal 1 (2008), 10–19.

Poděkování: Děkuji Janu Brandtsovi, Filipu Křížkovi a Vojtěchu Pravdovi za cenné diskuse a Haně Bílkové za nakreslení obrázků. Článek byl podpořen RVO 67985840.

Adresa autora:

Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1

e-mail: `krizek@math.cas.cz`