Matematika KRÁSNÁ I UŽITEČNÁ

Potkáváme se s ní v obchodech, dopravě, elektrotechnice, strojírenství, stavebnictví, medicíně i v GPS a aplikacích Google. **Matematika… U školáků často neoblíbená, jako vědní obor neuvěřitelně komplikovaná.** Tento pohled se neúnavně snaží změnit matematik Michal Křížek.

prof. RNDr. MICHAL KŘÍŽEK, DrSc.
Matematický ústav AV ČR

—

Je vedoucím oddělení konstruktivních metod matematické analýzy. Na kontě má bezmála 200 článků v odborných časopisech a 2200 citací (bez autocitací spoluautorů). Jeho kniha *Abelova cena – nejvyšší ocenění za matematiku* získala v červnu 2019 Cenu Josefa Hlávky za vědeckou literaturu. Stejný úspěch zaznamenal Michal Křížek už v roce 2010 s knihou *Kouzlo čísel*, kterou napsal s Lawrencem Somerem a Alenou Šolcovou. Tato populárně-naučná publikace o matematice se v roce 2018 dočkala již třetího vydání. V říjnu 2013 obdržel za celoživotní dílo Cenu předsedy AV ČR za propagaci či popularizaci výzkumu, experimentálního vývoje a inovací.

Text: Viktor Černoch | Foto: Jana Plavec (2), Robert Zlatohlávek / Empresa Media / Profimedia

Přednášíte, jste autorem populárně-naučných knih o matematice, rád ji popularizujete. Máte nějaký úspěšný návod, jak vysvětlovat tento obor žákům, studentům či veřejnosti?
Nejlépe praktickými příklady ze života, které dokládají, že bez matematiky by to opravdu nešlo. Byl jsem kupříkladu v nemocnici se zlomenou nohou. Společně se mnou tam ležel asi desetiletý chlapec – vážil kolem 30 kilogramů. Tři sestřičky mu potřebovaly nasadit antibiotika, jenže v návodu měly uvedenou dávku jen pro sedmdesátikilogramového dospělého člověka. Trojčlenkou se tedy snažily spočítat, kolik mililitrů mají chlapci dát. Jedné vyšlo asi dva a půl mililitru, druhé dva a třetí nevyšlo vůbec nic. Po chvíli se rozhodly, že podají raději nižší dávku. Chlapec naštěstí přežil. Třetí sestřičky jsem se poté zeptal, proč šla na zdravotní školu. Odvětila: „Protože tam není matika."

Poněkud smutný případ... Vybavíte si ještě jiný?
Poblíž obce Osečany jakýsi zemědělec špatně vypočítal množství postřiku na pole. Vyhubil tím včely v okruhu asi dvou kilometrů. Můj strýc si pro změnu objednal dřevo na střešní štíty, ale protože si nepamatoval vzorec pro plochu trojúhelníka, spočetl ji jako obdélník a na dvorku měl pak dvojnásobek materiálu, než potřeboval.

> Složité rovnice se dříve řešily na mechanických kalkulačkách s klikou a ozubenými koly, kdy bylo třeba provést i miliony početních operací a neudělat chybu.

Určité elementární matematické nebo početní znalosti tedy očividně mít musíme. Ve škole se ale učí i složitější věci. Komplexní čísla, posloupnosti, funkce...
Máte pravdu, studenti se občas ptají, k čemu jsou komplexní čísla vlastně dobrá. Ale třeba obyčejný počítačový tomograf v nemocnicích by bez nich nefungoval. Nebo sinus a kosinus – v mobilu je používáme všichni, ani o nich nevíme. Přitom JPEG formát fotografií využívá šachovnice o rozměru 8 × 8 pixelů, na kterou aplikuje diskrétní siny a kosiny. Je tak velice jednoduché obrázek zvětšit třeba o jednu řadu pixelů. Jak byste to jinak udělal? Tím, že je obrázek vyjádřený nikoli jako bitová mapa, ale v sinech a kosinech, se „vlny" pouze „natáhnou".

Školáci mají občas pocit, že matematika je od reálného života přespříliš vzdálená, moc abstraktní a k životu ji vlastně nepotřebují...
Asi ne ke každé profesi ani každý den. I když například Google by bez sofistikované matematiky určitě nefungoval. Matematika je i součástí naší kultury. Umožňuje odhlédnout od nepodstatných věcí. Tento přístup by se měl na základní škole učit především – jak takříkajíc vyhmátnout to podstatné. Dětem někdy nejdou slovní úlohy, přičemž se obvykle řeší jednoduchou trojčlenkou. Někteří žáci ji nejsou schopni sestavit, protože slovní úloha je zdánlivě pokaždé jiná. V podstatě tedy jde jen o extrakci toho, co je důležité a co nikoli.

Poznat, co je důležité, se vlastně týká i vaší práce. Říkáte, že nejdůležitější je „nejen umět něco spočítat, ale také vědět, o kolik jsem se spletl".
Přesně tak. Většinu obtížnějších matematických problémů nelze vyřešit jednoduchým vzorečkem, proto hledáme vhodný způsob, jak získat alespoň přibližné řešení pomocí tzv. numerických metod. Například kdysi dávno chtěl Archimédes spočítat obsah (plochu) kruhu o poloměru jedna. Začal tedy vepisovat dovnitř kruhu pravidelné mnohoúhelníky. Čím více stran měly, tím více se po-

MATEMATIKA PRAŽSKÉHO ORLOJE

Michal Křížek se s dalšími kolegy věnoval matematice ukryté v pražském orloji. Uvnitř neuvěřitelně složitého systému je mj. mnoho velkých ozubených kol. Konstruktéři orloje se museli vyrovnat s dělením kružnice na prvočíselný počet dílů (např. jak přesně pravidelně rozmístit 379 zubů na jednom ozubeném kole). Hodiny, ukazatele Slunce a Měsíce, otáčení zodiaku, zvony – pracují s matematickými posloupnostmi, dělitelností, trojúhelníkovými čísly... Není možné, aby člověka tento již více než 600 let fungující stroj nefascinoval. Pražský orloj přitom není na světě nejstarší. V době svého vzniku (asi 1410) už orloje existovaly v Německu, Itálii nebo třeba ve Švédsku, ale většina z nich v současnosti již nefunguje. „Navštívil jsem spoustu orlojů v Evropě a řekl bych, že ten pražský je nejlepší, co se týče zachovalosti i údržby," říká Michal Křížek.

dobaly kruhu a blížily se obvodové kružnici zevnitř. Totéž udělal i zvnějšku kruhu. Získal tím zaručený dolní a horní odhad čísla, které dnes známe jako pí (π), aniž by tušil cokoli o iracionálních číslech. Hledání hranic, mezi kterými se s jistotou nachází řešení, je pro numerické matematiky tím nejpodstatnějším.

Předpokládám, že totéž platí i pro praxi?

Samozřejmě. Řešil jsem například vedení tepla v obřích transformátorech pro některé české elektrárny. Pro takto složité geometrické objekty prostě neexistuje vzoreček, který by určil přesnou teplotu v daném bodě. Proto se tato úloha řeší přibližnými numerickými metodami. Vyšetřované těleso se rozdělí třeba na malé krychličky, což pak vede na řešení rozsáhlých soustav algebraických rovnic. Jde o to určit, o kolik jsme se v daném bodě odchýlili od přesné teploty, naměřené kupříkladu teploměrem. Nebo jiný příklad. Kolem roku 1954 se v našem oddělení počítala stavba přehrady Orlík. Když se betonuje tak velký objekt, potřebujete vědět, jak vysokou vrstvu betonu lze postavit naráz. Při tvrdnutí betonu se totiž uvolňuje obrovské množství tepla, které je třeba odvádět – v tomto případě chladit vodou protékající v železných trubkách. Šlo o složitou nelineární diferenciální rovnici, která se řešila na mechanických kalkulačkách s klikou a ozubenými koly. Bylo třeba provést zhruba tři miliony operací – a neudělat chybu. Počítaly to současně dvě výpočtářky a vždy po deseti krocích si kontrolovaly mezivýsledky. Bylo nepředstavitelně obtížné zorganizovat výpočet, aby dal správné hodnoty.

Čím se zabývá oddělení konstruktivních metod matematické analýzy, které vedete, v současnosti?

Zejména numerickým řešením diferenciálních rovnic. Hledáme meze, kde s jistotou leží přesné řešení. Tedy až na zaokrouhlovací chyby, protože těm se v podstatě vyhnout nedá. Věnujeme se ale i jiným oblastem. Jeden z kolegů počítá na ostravském superpočítači proudění tekutin. Někteří naši kolegové působí v zahraničí – například v Japonsku, kde řeší hyperbolické rovnice, či provádějí paralelní výpočty na superpočítači v Německu. Zabýváme se též řešením velkých soustav lineárních algebraických rovnic, což další kolega popsal ve své nové knize. Jeden z našich pracovníků se zabývá archeologickými daty. Kupříkladu letadlo letící nad terénem může měřit hodnotu gravitačního potenciálu. Když je tedy někde dejme tomu pravěké sídliště, projeví se to zřetelnými pravidelnými zlomy. S využitím takových výpočtů byla objevena již mnohá archeologická naleziště. Dají se tak hledat i ložiska nafty či jiných surovin. Aplikací numerických metod je spousta…

Dnešní matematika je složitá disciplína, která se dá těžko přiblížit veřejnosti. Zkusme ale popsat nějaký výsledek vaší práce, který by byl čtenářům srozumitelný.

Mnozí jistě znají sudoku, kde je čtverec 9 × 9 rozdělen na devět menších bloků rozměru 3 × 3. Ve výsledném postavení sudoku musí každý blok, každý řádek a každý sloupec obsahovat právě jednu z číslic 1, 2, …, 9. Řádkové i sloupcové součty jsou tedy všechny stejné. Dosti podobné je to s magickými čtverci. Je třeba rozmístit vzájemně různá celá kladná neboli přirozená čísla na „šachovnici“ o rozměru $n \times n$ tak, aby byl součet čísel v libovolném řádku, v libovolném sloupci i na obou hlavních diagonálách stejný. S Lawrencem Somerem z USA jsme objevili a matematicky dokázali, že pro libovolné $n > 2$ existuje magický čtverec obsahující pouze prvočísla.

To zní docela pochopitelně a snad je to srozumitelné i laikům.

Samo tvrzení nebo přesněji matematická věta asi ano. Dokonce ani náš důkaz není nijak extrémně složitý – má asi deset řádek. Podstatně ovšem využívá Greenovu-Taovu větu, jejíž důkaz má přes padesát stránek.

Greenova-Taova věta je jedním z překvapení matematiky posledních patnácti let. V podstatě říká, že pro každé přirozené číslo *n* existuje aritmetická posloupnost (řada čísel, kdy každé následující získáme zvětšením o stejnou hodnotu) délky *n* obsahující pouze prvočísla; například pro *n* = 5 je to řada pěti čísel: 5, 11, 17, 23, 29 (přičítáme šestku). Proč tohle do roku 2004 nikoho nenapadlo?

Někdo o tom možná přemýšlel, ale jde o to takové tvrzení dokázat. Stávající důkaz je mimochodem nepředstavitelně složitý. Matematici oceňují takové věty, jejichž formulace zabere jeden dva řádky, ale důkaz je dlouhý. Nejslavnější je Velká Fermatova věta, jež říká úplně jednoduše, že rovnice $x^n + y^n = z^n$ nemá řešení pro přirozená čísla, pokud je exponent n větší než 2. (Pro $n = 2$ jde o pythagorejské trojice.) Důkaz, který publikoval Andrew Wiles společně s Richardem Taylorem v roce 1994, měl kolem 150 stránek. A to se přitom odkazoval ještě na spoustu dalších tvrzení z literatury. Kdyby byl celý důkaz napsán dohromady, zabral by přes tisíc stránek. Existují ale i jednoduché důkazy jiných ▹

MAGICKÝ ČTVEREC

Magické čtverce znali Číňané už v 7. století př. n. l. Jde o libovolně velkou šachovnici, přičemž součet každého řádku, sloupce i obou úhlopříček musí být stejný. Používají se pouze kladná celá čísla. Michal Křížek prokázal, že pro jakkoli velkou šachovnici lze nalézt magický čtverec složený pouze z prvočísel.

			3117
1249	199	1669	3117
1459	1039	619	3117
409	1879	829	3117
3117	3117	3117	3117

Historie a duše matematika

Pochází z dlouhé generace vědců. „Můj dědeček byl matematik, maminka také a tatínek byl fyzik,“ vypočítává Michal Křížek. Na jeho webových stránkách najdete rodokmen prarodičů vysledovaný až k 17. století. „O matematiku jsem se zajímal již od svých čtyř let. Když se ohlédnu zpět, jsem přesvědčen, že jsem se pro matematiku narodil. Velice mě těší, že v této cestě pokračují i oba moji synové. Nadání, kterého se mi v matematice dostalo, si nadmíru cením a vždy jsem se snažil jej využít pro lepší budoucnost vědy i naší společnosti. Doufám, že moji následovníci budou jednou moci říci, že jsem tento talent nepromarnil.“

překvapivých vět. Při popularizačních přednáškách s oblibou uvádím tvrzení, že prvočísel je nekonečně mnoho. Důkaz vymyslel Eukleidés už někdy ve třetím století před naším letopočtem a zabere jen šest řádek.

S tímto historickým odkazem jste mi nahrál. Je přece logické, že je současná odborná matematika příliš složitá – jako vědní obor existuje de facto tisíce let, zatímco jiné vědní disciplíny třeba jen desítky let.

Máte naprostou pravdu. Navíc v současnosti existuje celosvětově asi tři tisíce mezinárodních matematických časopisů. Není v silách jednoho člověka všechno obsáhnout. Matematici z různých specializací si často vzájemně nerozumí. Kdybych poslouchal specializovanou přednášku třeba z logiky nebo topologie, asi bych se po pár větách ztratil.

Zmínil jste Velkou Fermatovu větu, která se dočkala důkazu po asi 350 letech. V matematice je časté, že se některá řešení problémů hledají dlouho a výsledky najdou uplatnění až po desítkách či stovkách let…

Velká Fermatova věta zatím žádné praktické uplatnění v podstatě nemá. K jejímu důkazu se ale muselo nalézt mnoho jiných důkazů a pokročit ve zdánlivě nesouvisejících oblastech matematiky. Pro rozvoj oboru tedy měla velký význam. Rovněž po asi 350 letech se přišlo na to, že praktické aplikace by mohla mít i takzvaná Malá Fermatova věta, a to pro kódování a šifrování. Například se pomocí ní šifrují finanční data, která se posílají mezi bankami. Nikdy nevíme, kdy bude konkrétní výsledek využit. Například dvojková soustava, vynalezená před 3000 lety, našla praktické uplatnění až v minulém století.

Velká Fermatova věta se týká celých čísel. Přejděme tedy k nim. Oproti diferenciálním rovnicím jde přece jen o něco, co si lidé lépe představí. V prosinci roku 2018 bylo objeveno už 51. Mersennovo prvočíslo (tj. číslo ve tvaru $2^p - 1$). Je nepředstavitelně obrovské, má bezmála 25 milionů cifer. Kdybychom ho chtěli napsat, zabralo by sotva uvěřitelných pět tisíc stránek tohoto časopisu. K čemu hledat taková velká prvočísla?

Je to podobné jako vylézt na Mount Everest – prostě proto, že je nejvyšší na světě. Konkrétně tohle číslo asi žádný praktický význam zatím nemá. Obecně se ale velmi velká prvočísla využívají v kryptografii. Mimochodem, odhaduje se, že počet elementárních částic (protonů, neutronů, elektronů…) ve vesmíru je asi 10^{80}, což je jednička a za ní 80 nul. Vámi zmíněné číslo je nesrovnatelně větší. Astronomové sice pracují s astronomickými čísly, ale pro matematiky jsou stále neskonale malá.

Věděl jsem, že se dříve či později k astronomii dostaneme. Jako matematik se astronomickým tématům věnujete poměrně hodně. Ale platíte tak trochu za rebela. Tvrdíte například, že temné hmoty ve vesmíru vůbec nemusí být takové

množství, jako se běžně uvádí. Jak se na takovou kontroverzní teorii dívá astronomická obec?

Standardní kosmologický model je založený na Einsteinových rovnicích a vykazuje řadu paradoxů. Domnívám se, že jsou důsledkem nekorektních extrapolací těchto rovnic na kosmologické škály. Většina astronomů s mými závěry zatím nesouhlasí. Je ale také spousta astronomů, kteří používají jiné argumenty než já, ale došli ke stejnému závěru. Mám k dispozici pouze matematické argumenty, oni observační. Třeba trpasličí galaxie kolem naší Galaxie se nechovají tak, jako by tady bylo velké množství temné hmoty. Domnívám se proto, že současný standardní kosmologický model s ohromným množstvím temné hmoty a temné energie nepopisuje vesmír správně a pravděpodobně jej bude třeba v brzké době změnit.

Je možná dobré připomenout, že žádné vzorečky, které se učíme ve škole, a dokonce ani zmíněné Einsteinovy rovnice nejsou zákonem, podle kterého se příroda přesně chová, ale jen matematickým modelem, tedy popisem jevů kolem nás.

V určitých případech poskytuje matematický popis dobré výsledky, v jiných tomu tak být nemusí a je třeba aplikovat jiný model nebo teorii upravit. Žádný model totiž nepopisuje realitu naprosto přesně.

Ani třeba jednoduchý vzorec pro rychlost z newtonovské fyziky (*rychlost = dráha / čas*), který se každé dítě učí ve škole...

Pro běžné rychlosti dosahované třeba autem postačí bez problémů. Ale ve skutečnosti vzorec nebere v potaz například princip neurčitosti a kvantové jevy, protože pro výsledek nehrají roli – projeví se tak nepatrně, že je možné je s klidem zanedbat. Podobně pro kosmologické vzdálenosti uvedený vzoreček nepopisuje realitu věrně, protože se vesmír rozpíná. Nemohu ho tedy použít vždy a všude, protože na čím menší či větší škály jej použiji, tím víc zvětšuji původně zanedbatelnou chybu, až se z ní postupně stane chyba již nezanedbatelná. Právě tak jako na mikrokosmos používáme Schrödingerovu rovnici a kvantovou mechaniku, na velké vzdálenosti aplikujeme Einsteinovy rovnice, které se ale pouze testují na škálách Sluneční soustavy. Otázka ovšem zní, zda věrně popisují realitu i na galaktických škálách nebo rozměrech celého vesmíru.

> Existují asi tři tisíce mezinárodních matematických časopisů. Není v silách člověka všechno obsáhnout, matematici různých specializací si často vzájemně nerozumí.

Tvrdíte také, že rychlost šíření gravitace musí být konečná (v newtonovské fyzice se předpokládá, že je nekonečná), což souvisí se zákonem zachování energie. Podle vás nemusí platit úplně přesně. Nepouštíte se na příliš tenký led?

Většina fyziků se mnou nesouhlasí. Je ale nutné zdůraznit, že se jedná o jakýsi vnitrodruhový boj – my vědci musíme neustále testovat vědecké hypotézy, zda obstojí vůči naměřeným datům. Ať je to, jak chce, bez matematicko-fyzikálních věd bychom neměli žárovky, telefony, kamery, družice, počítače, prostě nic. V žádném případě nechci kritizovat fyziku, protože bez ní bychom asi žili stále v jeskyních. Ze všech vědních oblastí nám fyzika dala nejvíce. Důležité však je za všech okolností hledat pravdu a já mám k dispozici desítky konkrétních příkladů, že zákon zachování energie je mírně narušen.

Vraťme se nyní zpět k matematice. Co považujete za svůj největší vědecký úspěch?

Nejvíce si cením svého důkazu, že pětirozměrný prostor nelze rozdělit na ostroúhlé simplexy. Zní to složitě, ale simplex je vlastně trojúhelník, jen ve více rozměrech. Ostroúhlým trojúhelníkem lze vyplnit celou rovinu. V trojrozměrném prostoru je simplexem čtyřstěn, taková trojboká pyramida. I tam lze prostor vyplnit ostroúhlými čtyřstěny. Jestli to jde ve čtyřrozměrném prostoru, dosud nevíme, je to otevřený problém. Ale od páté dimenze výše už vyplnit nelze, což se mi podařilo dokázat.

Jak víte, čím se v matematice jako vědě zabývat, jaké problémy řešit? Témata si hledáte sami?

Vědec se stává vědcem právě v okamžiku, kdy sám přesně ví, kterými tématy je třeba se zabývat. Pokud by jen plnil zadání někoho jiného, nemohl by se v současné ostré konkurenci ve vědě vůbec uplatnit. Já osobně mám nasbíraný dlouhý seznam otevřených problémů, na kterých spolu s kolegy pracujeme. Vyřešením jednoho problému se ale obvykle objeví dva nové.

Takže ani svým podřízeným nezadáváte úkoly, na kterých by měli pracovat?

Samozřejmě. Nikomu neříkám: „Dělej tohle." Alespoň tak to funguje v matematických vědách. Často se v této souvislosti traduje historka, jak k Pierru Curieovi přišel do laboratoře nový pracovník. Dostal od věhlasného vědce úkol, a když jej odevzdal, žádal další. Pierre Curie však odvětil, že je propuštěn, když si neumí najít vlastní problém.

Takže být matematikem je tak trochu osamocená práce?

To určitě ne. Myslím, že ve všech vědních oborech je vzájemná spolupráce nepostradatelná. Například s jedním kolegou jsme se pokoušeli dokázat ekvivalenci jistých dvou tvrzení. Po víkendu jsem mu říkal, že se mi bohužel podařilo dokázat jen jednu implikaci. On přitakal, že jedna implikace je poměrně snadná. Mysleli jsme si, že jsme vyřešili tu samou. Pak se ale ukázalo, že já jsem dokázal implikaci jedním směrem a on směrem opačným. Ekvivalence tak byla dokázána. V matematice to sice obvykle nefunguje jako v biologii či astronomii, kde se na vědeckém výsledku podílejí i desítky vědců. Autory matematických článků v odborných časopisech bývají často jen dva tři lidé. Napsal jsem několik článků i sám, ale nejlépe se píše ve dvou nebo třech. Mimo jiné máte kontrolu nad tím, zda jsou vaše postupy správné. Spolupráce mezi matematiky je zcela jistě zásadní.