Kapitola 5

Riemannův-Stieltjesův integrál

Odpověď na některé úlohy zmíněné v úvodní kapitole dává integrál Riemannův-Stieltjesův, který je přirozeným zobecněním známého integrálu Riemannova.

5.1 Definice a základní vlastnosti

Připomeňme (viz Úmluvy a označení (iii)), že množinu $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ bodů intervalu $[a,b]$ nazýváme *dělením intervalu* $[a,b]$, jestliže platí

$$a=\sigma_0<\sigma_1<\dots<\sigma_m=b.$$

Množinu všech dělení intervalu $[a,b]$ značíme $\mathscr{D}[a,b]$,

$$|\boldsymbol{\sigma}|=\max_{j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})}(\sigma_j-\sigma_{j-1})$$

a $\nu(\boldsymbol{\sigma})$ je počet podintervalů generovaných dělením $\boldsymbol{\sigma}$ (zde $\nu(\boldsymbol{\sigma})=m$). Říkáme, že $\boldsymbol{\sigma}'$ je *zjemnění* $\boldsymbol{\sigma}$, jestliže $\boldsymbol{\sigma}'\supset\boldsymbol{\sigma}$.

5.1 Definice. Dvojici $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{D}[a,b]\times\mathbb{R}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}$ nazveme *značeným dělením* intervalu $[a,b]$, jestliže platí

$$\sigma_{j-1}\le\xi_j\le\sigma_j\quad\text{pro všechna } j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma}).$$

$\mathscr{T}[a,b]$ je množina všech značených dělení intervalu $[a,b]$. Říkáme také, že ξ_j je *značka* podintervalu $[\sigma_{j-1},\sigma_j]$ a $\boldsymbol{\xi}$ je *vektor značek*.

Pro dané dělení $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ značíme symbolem $\tau(\boldsymbol{\sigma})$ množinu všech $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}$ takových, že $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$.

Abychom zabránili záměně s elementy množin $\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma},\dots$ či vektorů $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\dots$, budeme posloupnosti dělení, resp. značených dělení zapisovat jako např. $\{\boldsymbol{\sigma}^n\}$, resp. $(\boldsymbol{\rho}^n,\boldsymbol{\eta}^n)$. Záměna s mocninami zde zajisté nehrozí.

5.2 Definice. Pro dané funkce $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ a značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ definujeme

$$S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi};[a,b]):=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})].$$

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme psát krátce $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi};[a,b])$, resp. $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ místo $S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi};[a,b])$.

5.3 Definice. Nechť $f,\, g:[a,b]\to\mathbb{R}$.
(i) Řekneme, že existuje *Riemannův-Stieltjesův* (δ)*-integrál* (krátce (δ) RS-integrál) funkce f vzhledem k funkci g

$$(\delta)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,] \quad \Big(\text{značíme též } (\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big)$$

a má hodnotu $I\in\mathbb{R}$, jestliže

$$\left.\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0:\\ &\quad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]\ \text{ a }\ |\boldsymbol{\sigma}|<\delta\Big)\implies|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|<\varepsilon.\end{aligned}\right\}\tag{5.1}$$

(ii) Řekneme, že existuje *Riemannův- Stieltjesův* (σ)*-integrál* (krátce (σ) RS-integrál) funkce f vzhledem k funkci g

$$(\sigma)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,] \quad \Big(\text{značíme též } (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big)$$

a má hodnotu $I\in\mathbb{R}$, jestliže

$$\left.\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]:\\ &\quad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]\ \text{ a }\ \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big)\implies|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|<\varepsilon.\end{aligned}\right\}\tag{5.2}$$

(iii) Jestliže $c\in[a,b]$ a funkce $f,\, g$ jsou definovány v bodě c, klademe

$$(\delta)\int_c^c f\,\mathrm{d}g \;=\; (\sigma)\int_c^c f\,\mathrm{d}g=0.$$

Existuje-li integrál $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, pak definujeme $(\delta)\int_b^a f\,\mathrm{d}\,g=-(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a existuje-li integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, definujeme $(\sigma)\int_b^a f\,\mathrm{d}\,g=-(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$.

5.4 Poznámka. Pojem (δ) RS-integrálu odpovídá původní Stieltjesově definici, zatímco (σ) RS-integrál bývá někdy nazýván též *Mooreův-Pollardův* integrál.

Klasický Riemannův integrál je speciálním případem (δ) RS-integrálu, pokud $g(x)\equiv x$ pro $x\in[a,b]$.

Vyskytne-li se v některých tvrzeních pojem RS-integrál bez rozlišení, zda se jedná o (δ)RS-integrál či o (σ)RS-integrál, bude to znamenat, že dané tvrzení platí pro oba pojmy. V takových a dalších případech, kdy nehrozí nedorozumění, také nepřipojujeme symboly (δ) či (σ) k symbolům integrálů. Funkce f v integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ se nazývá *integrand*, zatímco funkce g se nazývá *integrátor*.

5.5 Cvičení. Dokažte, že pro oba typy RS-integrálu platí*:*

(i) *je-li funkce* g *konstantní na* $[a,b]$, *pak* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = 0$ *pro libovolnou funkci* f *definovanou na* $[a,b]$,

(ii) *je-li funkce* f *konstantní na* $[a,b]$, *pak* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = f(a)\,[g(b)-g(a)]$ *pro libovolnou funkci* g *definovanou na* $[a,b]$.

Z definice 5.3 také snadno usoudíme, že (δ)RS-integrál je speciálním případem (σ)RS-integrálu.

5.6 Věta. *Je-li* $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I \in \mathbb{R}$, *pak platí také* $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I$.

D ů k a z. Pro každá dvě dělení $\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\sigma}'' \in \mathscr{D}[a,b]$ taková, že $\boldsymbol{\sigma}''$ je zjemnění $\boldsymbol{\sigma}'$, platí $|\boldsymbol{\sigma}''| \le |\boldsymbol{\sigma}'|$. Věta je tedy přímým důsledkem definice 5.3. □

5.7 Poznámka. Budiž dáno libovolné $\delta_0 > 0$. Potom v definici 5.1 (i) můžeme podmínku (5.1) nahradit následující trochu zeslabenou podmínkou

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta\in(0,\delta_0):\\ &\quad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]\ \text{ a }\ |\boldsymbol{\sigma}|<\delta\Big)\implies |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|<\varepsilon.\end{aligned}\right\}\tag{5.1'}$$

Podobně, je-li dáno $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathscr{D}[a,b]$, můžeme v definici 5.3 (ii) podmínku (5.2) nahradit podmínkou

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]:\\ &\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\supset\boldsymbol{\sigma}_0\ \text{ a }\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]\ \text{a}\ \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big)\implies |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|<\varepsilon.\end{aligned}\right\}\tag{5.2'}$$

5.8 Cvičení. Rozmyslete si podrobně, proč platí tvrzení uvedená v poznámce 5.7.

5.9 Příklad. Nechť $a = -1,\ b = 1$ a

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{když }\ x \le 0,\\ 1, & \text{když }\ x > 0\end{cases} \quad \text{a} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{když }\ x < 0,\\ 0, & \text{když }\ x \ge 0.\end{cases}$$

Položme $\boldsymbol{\sigma}_0 = \{-1, 0, 1\}$. Potom pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[-1, 1]$, které je zjemněním $\boldsymbol{\sigma}_0$ (a tedy $0 \in \boldsymbol{\sigma}$), a každé $\boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma})$ máme

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = f(\xi_k)\,[g(0) - g(\sigma_{k-1})] + f(\xi_{k+1})\,[g(\sigma_{k+1}) - g(0)] = 0,$$

kde $0 = \sigma_k$, $\xi_k \in [\sigma_{k-1}, 0]$, $\xi_{k+1} \in [0, \sigma_{k+1}]$ a tedy

$$f(\xi_k) = 0 \quad \text{a} \quad g(\sigma_{k+1}) - g(0) = 0.$$

Vzhledem ke druhé části poznámky 5.7 vidíme, že $(\sigma)\displaystyle\int_{-1}^{1} f\,\mathrm{d}\,g = 0.$

Na druhou stranu, pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[-1, 1]$ takové, že $0 \notin \boldsymbol{\sigma}$, tj. $\sigma_{k-1} < 0 < \sigma_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, platí

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = f(\xi_k)\,[g(\sigma_k) - g(\sigma_{k-1})] = -f(\xi_k) = -\begin{cases} 0, & \text{když } \xi_k \le 0, \\ 1, & \text{když } \xi_k > 0. \end{cases}$$

Odtud je zřejmé, že $(\delta)\displaystyle\int_{-1}^{1} f\,\mathrm{d}\,g$ nemůže existovat.

Následující dvě lemmata platí pro oba typy RS-integrálů a jsou přímými důsledky definice 5.3.

5.10 Lemma. (i) *Jestliže existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, *pak platí*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| \le \|f\|\,\mathrm{var}_a^b\,g.$$

(ii) *Jestliže navíc* $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ *a existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\big[\mathrm{var}_a^x\,g\big]$, *pak platí*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\big[\mathrm{var}_a^x\,g\big] \le \|f\|\,\mathrm{var}_a^b\,g.$$

5.11 Poznámka. Uvidíme později (viz důsledek 5.42), že je-li f ohraničená na $[a, b]$, pak pro oba typy RS-integrálů platí, že z existence integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ už plyne, že také integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\big[\mathrm{var}_a^x\,g\big]$ existuje.

5.12 Lemma. *Nechť* $f,\ f_1,\ f_2,\ g,\ g_1,\ g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a nechť existují integrály :*

$$\int_a^b f_1 \, \mathrm{d}\, g, \ \int_a^b f_2 \, \mathrm{d}\, g, \ \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g_1 \ \ a \ \ \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g_2.$$

Potom pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\int_a^b (c_1\, f_1 + c_2\, f_2) \, \mathrm{d}\, g = c_1 \int_a^b f_1 \, \mathrm{d}\, g + c_2 \int_a^b f_2 \, \mathrm{d}\, g$$

a

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}[\, c_1\, g_1 + c_2\, g_2] = c_1 \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g_1 + c_2 \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g_2.$$

□

5.13 Cvičení. (i) Dokažte lemmata 5.10 a 5.12.

Dokažte, že následující tvrzení platí pro oba typy RS-integrálů:

(ii) *Jestliže* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je neklesající na* $[a,b]$ *a* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je taková, že existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$, *pak*

$$\Big(\inf_{x \in [a,b]} f(x) \Big) \, [g(b) - g(a)] \le \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g \le \Big(\sup_{x \in [a,b]} f(x) \Big) \, [g(b) - g(a)].$$

(iii) *Definice 5.3 je korektní v tom smyslu, že určuje hodnotu integrálu jednoznačně. Jinak řečeno, jestliže* $I_1 \in \mathbb{R}$ *a* $I_2 \in \mathbb{R}$ *splňují* (5.1) (s I_1, *resp.* I_2 *na místě* I), *pak musí být* $I_1 = I_2$ (*a podobně pro* (5.2)).

Oba pojmy RS-integrálu představují jakési zobecněné limity posloupnosti integrálních součtů $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ vzhledem k značeným dělením. Nepřekvapí tedy, že platí následující tvrzení analogická klasické Bolzanově- Cauchyově podmínce.

5.14 Věta (BOLZANOVA-CAUCHYOVA PODMÍNKA)**.**

Pro dané funkce $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *existuje* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ *právě tehdy, když je splněna následující podmínka*

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \\ &\quad \Big((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}), (\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathscr{T}[a,b], \ |\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon \ \ a \ \ |\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}| < \delta_\varepsilon \Big) \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow \ |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})| < \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Podobně integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje právě tehdy, když platí*

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]:\\ &\quad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})\in\mathscr{T}[a,b],\ \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\ \ a\ \ \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big)\\ &\qquad\qquad\Longrightarrow\ |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})|<\varepsilon. \end{aligned}\right\}\tag{5.4}$$

D ů k a z . Nutnost splnění uvedených podmínek pro existenci příslušných integrálů je zřejmá z definice 5.3.

Dokážeme, že podmínka (5.4) zaručuje existenci integrálu $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Nechť tedy platí (5.4). Potom existuje posloupnost $\{(\boldsymbol{\sigma}^k,\boldsymbol{\xi}^k)\}$ značených dělení intervalu $[a,b]$ taková, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}^k,\boldsymbol{\xi}^k)|<\frac{1}{k}\quad\text{pro každé } \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}^k\ \text{ a }\ \boldsymbol{\xi}\in\tau(\boldsymbol{\sigma})\tag{5.5}$$

a přitom současně

$$\boldsymbol{\sigma}^k\subset\boldsymbol{\sigma}^\ell\ \text{ a }\ |S(\boldsymbol{\sigma}^k,\boldsymbol{\xi}^k)-S(\boldsymbol{\sigma}^\ell,\boldsymbol{\xi}^\ell)|<\frac{1}{k}\quad\text{pro každé } k\in\mathbb{N}\ \text{ a }\ \ell\geq k.\tag{5.6}$$

Posloupnost $\{S(\boldsymbol{\sigma}^k,\boldsymbol{\xi}^k)\}$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel a existuje tedy reálné číslo $I\in\mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty}S(\boldsymbol{\sigma}^k,\boldsymbol{\xi}^k)=I.$$

Nyní, nechť je dáno $\varepsilon>0$. Zvolme k_ε tak, aby bylo současně

$$\frac{1}{k_\varepsilon}<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{ a }\ |S(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon},\boldsymbol{\xi}^{k_\varepsilon})-I|<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{5.7}$$

Potom, díky (5.5) a (5.7), odvodíme, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|\leq|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon},\boldsymbol{\xi}^{k_\varepsilon})|+|S(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon},\boldsymbol{\xi}^{k_\varepsilon})-I|<\varepsilon$$

platí pro každé $\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}$ a $\boldsymbol{\xi}\in\tau(\boldsymbol{\sigma})$. To znamená, že $I=(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$.

Podobně bychom dokázali, že podmínka (5.3) implikuje existenci integrálu $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. □

5.15 Cvičení. (i) Dokažte větu 5.14 pro (δ)RS-integrály.

(ii) Dokažte, že podmínky (5.3), resp. (5.4) jsou ekvivalentní s podmínkami :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta_\varepsilon > 0: \\ \quad \Big((\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}'), (\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[a,b],\ |\boldsymbol{\sigma}'| < \delta_\varepsilon,\ \boldsymbol{\sigma}'' \supset \boldsymbol{\sigma}'\Big) \\ \qquad\qquad \Longrightarrow\ |S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'')| < \varepsilon \end{array}\right\} \tag{5.3'}$$

resp.

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]: \\ \quad \Big((\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}'), (\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[a,b],\ \boldsymbol{\sigma}'' \supset \boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big) \\ \qquad\qquad \Longrightarrow\ |S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'')| < \varepsilon. \end{array}\right\} \tag{5.4'}$$

(Návod: nechť $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho} \in \mathscr{D}[a,b]$ a $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} \cup \boldsymbol{\rho}$, pak $\boldsymbol{\sigma}' \in \mathscr{D}[a,b]$, $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\rho}$ a

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})\big| \le \big|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')\big| + \big|S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})\big|$$

pro libovolná $\boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma})$, $\boldsymbol{\eta} \in \tau(\boldsymbol{\rho})$ a $\boldsymbol{\xi}' \in \tau(\boldsymbol{\sigma}')$.)

Následující věta je přímým důsledkem věty 5.14. Platí ve stejném znění pro oba typy RS-integrálů.

5.16 Věta. *Jestliže existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a jestliže* $[c,d] \subset [a,b]$, *pak existuje také integrál* $\displaystyle\int_c^d f\,\mathrm{d}\,g$.

D ů k a z . Předpokládejme, že integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ existuje. Podle věty 5.14 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')| < \varepsilon \tag{5.8}$$

platí pro všechna značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}), (\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,b]$ taková, že $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. Vzhledem k tvrzení obsaženém v poznámce 5.7, můžeme předpokládat, že $\{c,d\} \subset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a můžeme tedy rozložit $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ tak, že bude

$$\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \boldsymbol{\rho}^- \cup \boldsymbol{\rho}_\varepsilon \cup \boldsymbol{\rho}^+, \text{ kde } \boldsymbol{\rho}^- \in \mathscr{D}[a,c],\ \boldsymbol{\rho}_\varepsilon \in \mathscr{D}[c,d],\ \boldsymbol{\rho}^+ \in \mathscr{D}[d,b].$$

Nyní, nechť $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}' \in \mathscr{D}[c,d]$, $\boldsymbol{\rho} \supset \boldsymbol{\rho}_\varepsilon$, $\boldsymbol{\rho}' \supset \boldsymbol{\rho}_\varepsilon$ a $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}), (\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\eta}') \in \mathscr{T}[c,d]$. Definujme

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\rho}^- \cup \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\rho}^+,\ \boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}^-, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^+) \text{ a } \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\rho}^- \cup \boldsymbol{\rho}' \cup \boldsymbol{\rho}^+,\ (\boldsymbol{\eta}^-, \boldsymbol{\eta}', \boldsymbol{\eta}^+),$$

kde $\boldsymbol{\eta}^-, \boldsymbol{\eta}^+$ jsou takové vektory, že $(\boldsymbol{\rho}^-, \boldsymbol{\eta}^-) \in \mathscr{T}[a,c]$ a $(\boldsymbol{\rho}^+, \boldsymbol{\eta}^+) \in \mathscr{T}[d,b]$. Zřejmě je $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}), (\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,b]$, $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$,

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = S(\boldsymbol{\rho}^-, \boldsymbol{\eta}^-) + S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) + S(\boldsymbol{\rho}^+, \boldsymbol{\eta}^+)$$

a

$$S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') = S(\boldsymbol{\rho}^-, \boldsymbol{\eta}^-) + S(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\eta}') + S(\boldsymbol{\rho}^+, \boldsymbol{\eta}^+).$$

Podle (5.8) tedy máme $|S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - S(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\eta}')| = |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')| < \varepsilon$ a odtud podle věty 5.14 plyne existence integrálu $(\sigma)\int_c^d f \,\mathrm{d}\, g$. Důkaz tvrzení věty pro (δ) RS-integrál se provede analogicky a je ponechán čtenáři jako cvičení. $\square$

5.17 Cvičení. Dokažte větu 5.16 pro (δ) RS-integrály.

Také následující tvrzení platí ve stejné podobě pro oba typy RS-integrálu.

5.18 Věta. *Jestliže existuje integrál* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *a* $c \in [a,b]$, *pak existují také integrály* $\int_a^c f \,\mathrm{d}\, g$ *a* $\int_c^b f \,\mathrm{d}\, g$ *a platí* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = \int_a^c f \,\mathrm{d}\, g + \int_c^b f \,\mathrm{d}\, g.$

D ů k a z . Je-li $c = a$ nebo $c = b$, je tvrzení věty triviální. Nechť je tedy $c \in (a,b)$. Dále předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$. Potom existence integrálů $(\sigma)\int_a^c f \,\mathrm{d}\, g$ a $(\sigma)\int_c^b f \,\mathrm{d}\, g$ je zaručena větou 5.16.

Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,c]$ a $(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[c,b]$ tak, aby platilo

$$\left.\begin{aligned} &\Big|S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - \int_a^c f \,\mathrm{d}\, g\Big| + \Big|S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') - \int_c^b f \,\mathrm{d}\, g\Big| \\ &\qquad\qquad + \Big|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\Big| < \varepsilon, \\ &\text{kde } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \cup \boldsymbol{\sigma}'' \in \mathscr{D}[a,b] \text{ a } \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\xi}'') \in \tau(\boldsymbol{\sigma}). \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

Zřejmě platí $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') + S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')$. Tudíž

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g - \int_a^c f\,\mathrm{d}\,g - \int_c^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| \\ \le \Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g - S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\Big| + \Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') - S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')\Big| \\ + \Big|S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') - \int_a^c f\,\mathrm{d}\,g\Big| + \Big|S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') - \int_c^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, důkaz je dokončen. □

5.19 Cvičení. Rozmyslete si, proč z existence integrálů

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g, \quad \int_a^c f\,\mathrm{d}\,g, \quad \int_c^b f\,\mathrm{d}\,g$$

plyne existence značených dělení $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,c]$ a $(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[c,b]$ takových, že platí (5.9).

Implikace obrácená ke tvrzení věty 5.18 se pro (σ)RS-integrál dokáže snadno.

5.20 Věta. *Jestliže $c \in [a,b]$ a jestliže existují integrály*

$$I_1 = (\sigma)\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g \quad a \quad I_2 = (\sigma)\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g,$$

pak existuje také integrál $I = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a platí $I = I_1 + I_2$.

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,c]$ a $\boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon \in \mathscr{D}[c,b]$ tak, aby platilo

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') - I_1\big| < \varepsilon \ \text{ pro } \ (\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,c] \ \text{ takové, že } \ \boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon,$$

a

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') - I_2\big| < \varepsilon \ \text{ pro } \ (\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[c,b] \ \text{ takové, že } \ \boldsymbol{\sigma}'' \supset \boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon.$$

Nyní, nechť $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon \cup \boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon$. Protože $c \in \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ splňující $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ můžeme rozdělit

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \cup \boldsymbol{\sigma}'' \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi}'')$$

tak, že bude platit

$$(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{T}[a,c],\;(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')\in\mathscr{T}[c,b],\;\boldsymbol{\sigma}'\supset\boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon\quad\text{a}\quad\boldsymbol{\sigma}''\supset\boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon.$$

Navíc $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')+S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')$. Vzhledem k definici $\boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon$ a $\boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon$, tedy pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$, kde $\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, máme

$$\bigl|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-(I_1+I_2)\bigr|\le\bigl|S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')-I_1\bigr|+\bigl|S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')-I_2\bigr|<2\,\varepsilon,$$

tj. dokázali jsme tvrzení věty. □

5.21 Poznámka. Aby mohlo platit analogické tvrzení také pro (δ)RS-integrál, je třeba přidat předpoklad o pseudoaditivitě funkcí f, g v bodě c, viz cvičení 5.34.

Pro existenci (δ)RS-integrálu máme také následující přirozenou a lépe ověřitelnou nutnou a postačující podmínku.

5.22 Věta. *Pro dané funkce* $f,\,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje právě tehdy, když pro každou posloupnost* $\{(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}\subset\mathscr{T}[a,b]$ *značených dělení intervalu* $[a,b]$ *takovou, že* $\lim\limits_{n\to\infty}|\boldsymbol{\sigma}^n|=0$, *má posloupnost* $\{S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}$ *konečnou limitu.*

D ů k a z . Nutnost uvedené podmínky je zřejmá. Zbývá dokázat její postačitelnost.

Předpokládejme tedy, že limita $\lim\limits_{n\to\infty}S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)$ existuje (a je konečná) pro každou posloupnost $\{(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}\subset\mathscr{T}[a,b]$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty}|\boldsymbol{\sigma}^n|=0$.

Nechť existují dvě posloupnosti značených dělení $\{(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}\subset\mathscr{T}[a,b]$ a $\{(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^n,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^n)\}\subset\mathscr{T}[a,b]$ takové, že $\lim_{n\to\infty}|\boldsymbol{\sigma}^n|=\lim_{n\to\infty}|\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^n|=0$ a

$$\lim_{n\to\infty}S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)=I\in\mathbb{R}\quad\text{a}\quad\lim_{n\to\infty}S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^n,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^n)=\widetilde{I}\in\mathbb{R}.$$

Sestavme nyní novou posloupnost

$$\{S(\boldsymbol{\rho}^n,\boldsymbol{\eta}^n)\}=\Bigl\{S(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\xi}^1),S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^1,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^1),S(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\xi}^2),S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^2,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^2),\dots\Bigr\}$$

Podle našeho předpokladu má také posloupnost $\bigl\{S(\boldsymbol{\rho}^n,\boldsymbol{\eta}^n)\bigr\}$ konečnou limitu $J\in\mathbb{R}$, a protože obsahuje obě posloupnosti

$$\{S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}\ \text{a}\ \{S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^n,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^n)\},$$

musí platit $I = \widetilde{I} = J$. To znamená, že hodnota limity

$$I = \lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)$$

nezávisí na volbě posloupnosti $\{(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)\}$ značených dělení intervalu $[a,b]$, pro kterou platí $\lim\limits_{n\to\infty} |\boldsymbol{\sigma}^n| = 0$.

Nyní, nechť $\{(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)\} \subset \mathscr{T}[a,b]$ je libovolná posloupnost taková, že

$$\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{\sigma}^n| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n) = I \in \mathbb{R},$$

a nechť $(\delta)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \neq I$. Pak existuje $\widetilde{\varepsilon} > 0$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ lze najít $(\boldsymbol{\sigma}^{n_k}, \boldsymbol{\xi}^{n_k}) \in \mathscr{T}[a,b]$, pro něž platí $|\boldsymbol{\sigma}^{n_k}| < 1/k$ a $|S(\boldsymbol{\sigma}^{n_k}, \boldsymbol{\xi}^{n_k}) - I| > \widetilde{\varepsilon}$. Našli jsme podposloupnost $\{(\boldsymbol{\sigma}^{n_k}, \boldsymbol{\xi}^{n_k}) : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{T}[a,b]$ posloupnosti $\{(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)\}$ takovou, že $\lim\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{\sigma}^{n_k}| = 0$ a přitom neplatí $\lim\limits_{k\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^{n_k}, \boldsymbol{\xi}^{n_k}) = I$. To je ale spor s naším předpokladem. Platí tedy $(\delta)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I$. Důkaz věty je dokončen. □

Nyní naznačíme, jakou roli hrají v teorii Stieltjesova integrálu ohraničené funkce. Následující tvrzení platí pro oba typy RS-integrálů.

5.23 Věta. *Nechť existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$. *Potom je buďto* g *konstantní na* $[a,b]$, *nebo je* f *ohraničená na množině* $[a,b] \setminus A$, *kde* A *značí sjednocení všech podintervalů* $[a,b]$ *otevřených v* $[a,b]$, *na kterých je funkce* g *konstantní.* [1]

D ů k a z . Podle věty 5.6 stačí dokázat tvrzení věty pro (σ) integrál.

Nechť g není konstantní na $[a,b]$ a f není ohraničená na $B = [a,b] \setminus A$. Pak je množina B neprázdná a existuje posloupnost $\{x_n\} \subset B$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = \infty.$$

Nechť x^* je libovolný hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}$ v intervalu $[a,b]$. Předpokládejme, že $x^* \in (a,b]$. Potom alespoň jedna z množin $\{x_n\} \cap [a, x^*)$ nebo $\{x_n\} \cap (x^*, b]$ (v případě, že je $x^* < b$) musí mít nekonečně mnoho prvků. Nechť

[1] Otevřeným podintervalem v $[a,b]$ zde rozumíme také celý interval $[a,b]$ a intervaly tvaru $[a,c)$, $(d,b]$, kde $c \in (a,b]$ a $d \in [a,b)$ mohou být libovolné.

je to například množina $\{x_n\} \cap [a, x^*)$. Potom můžeme z posloupnosti $\{x_n\}$ vybrat rostoucí podposloupnost $\{x_{n_k}\} \subset [a, x^*)$ takovou, že platí $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$ a $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = \infty$. Speciálně pro každé $K > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\big|f(x_{n_p})\big| > K \quad \text{pro každé } p \ge k_0. \tag{5.10}$$

Na druhou stranu, podle vět 5.14 a 5.16 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}^*$ intervalu $[a, x^*]$ takové, že je

$$\big|S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\big| < 1 \tag{5.11}$$

pro všechna značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$, $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})$ intervalu $[a, x^*]$ taková, že je $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}^*$ a $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \supset \boldsymbol{\sigma}^*$. Nechť $\boldsymbol{\sigma}^* = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_m\}$.

Protože $\{x_{n_k}\} \cap A = \emptyset$ a $x_{n_k} \in (\tau_{m-1}, x^*)$ pro všechna k dostatečně velká, není g konstantní na (τ_{m-1}, x^*). Existuje tedy bod $t^* \in (\tau_{m-1}, x^*)$ takový, že je $g(t^*) \ne g(x^*)$.

Nyní, nechť $\sigma_j = \tau_j$ pro $j = 1, 2, \dots, m-1$, $\sigma_m = t^*$, $\sigma_{m+1} = x^*$ a

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{m+1}\}.$$

Potom $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a, x^*]$ a $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}^*$. Dále nechť $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+1})$ je libovolný vektor značek takový, že $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a, x^*]$ a nechť $k_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že platí (5.10) pro

$$K = |f(\xi_{m+1})| + \frac{1}{|g(x^*) - g(t^*)|}.$$

Konečně, zvolme $p \ge k_0$ tak, aby $x_{n_p} \in (t^*, x^*)$, a položme $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}$, $\widetilde{\xi}_{m+1} = x_{n_p}$ a $\widetilde{\boldsymbol{\xi}} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \widetilde{\xi}_{m+1})$. Potom $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathscr{T}[a, x^*]$ a $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \supset \boldsymbol{\sigma}^*$.

Pro takto konstruovaná rozšířená dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$, $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})$ intervalu $[a, x^*]$ platí

$$\begin{aligned}
\big|S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\big| &= |f(\xi_{m+1}) - f(x_{n_p})|\,|g(x^*) - g(t^*)| \\
&\ge \big(|f(x_{n_p}| - |f(\xi_{m+1})|\big)\,|g(x^*) - g(t^*)| \\
&> \big(K - |f(\xi_{m+1})|\big)\,|g(x^*) - g(t^*)| = 1,
\end{aligned}$$

což je ve sporu s (5.11).

Podobně bychom dovedli ke sporu předpoklad, že f není ohraničená na B, i v případech, kdy množina $\{x_n\} \cap [a, x^*)$ má konečně mnoho prvků nebo $x^* = a$. $\square$

5.24 Poznámka. (i) Nechť $f \in \mathbb{G}[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$, $c, d \in \mathbb{R}$ a $g(x) = c$ pro $x \in [a, x_0)$, $g(x_0) = (c+d)/2$, $g(x) = d$ pro $x \in (x_0, d]$. Dále nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ má jednostranné limity $f(x_0-), f(x_0+) \in \mathbb{R}$.

Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme posloupnost dělení $\{\boldsymbol{\sigma}^n\}$ intervalu $[a,b]$ takových, že $|\boldsymbol{\sigma}^n| \to 0$, přičemž pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje k_n, pro které platí $\sigma^n_{k_n-1} < x_0 < \sigma^n_{k_n}$. Dále nechť vektory značek $\boldsymbol{\theta}^n$, $\boldsymbol{\eta}^n$ a $\boldsymbol{\zeta}^n$ jsou takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\theta}^n),\ (\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\eta}^n),\ (\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\zeta}^n) \in \mathscr{T}[a,b],\\
&\theta^n_{k_n} = x_0,\ \ \sigma^n_{k_n-1} \le \eta^n_{k_n} < x_0 \quad \text{a} \quad x_0 < \zeta^n_{k_n} \le \sigma^n_k.
\end{aligned}$$

Potom dostaneme $S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\theta}^n) = f(x_0)\,(d-c)$, $S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\eta}^n) = f(\eta^n_{k_n})\,(d-c)$ a $S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\zeta}^n) = f(\zeta^n_{k_n})\,(d-c)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tudíž

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\theta}^n) = f(x_0)\,(d-c), \qquad \lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\eta}^n) = f(x_0-)\,(d-c),\\
&\lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\zeta}^n)) = f(x_0+)\,(d-c).
\end{aligned}$$

Odtud plyne, že k tomu, aby každá posloupnost $S(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)$ taková, že

$$(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n) \in \mathscr{T}[a,b] \quad \text{a} \quad |\boldsymbol{\sigma}^n| \to 0,$$

konvergovala pro $n \to \infty$ k nějaké konečné (a jednoznačně určené) hodnotě I, je nutné, aby platilo

$$\text{buď} \quad g(x_0-) = c = g(x_0) = d = g(x_0+), \quad \text{nebo} \quad f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+).$$

Vzhledem k větě 5.22 lze tedy očekávat, že pro existenci integrálu $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ bude nutné, aby funkce f a g neměly žádný společný bod nespojitosti.

(ii) Nyní, nechť $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathscr{D}[a,b]$ je libovolné dělení obsahující x_0. Pro každé jeho zjemnění $\boldsymbol{\sigma}$ potom existuje $k = k(\boldsymbol{\sigma})$ takové, že $x_0 = \sigma_k$. Máme

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases}
(f(\xi_{k-1}) + f(\xi_k)\,\dfrac{d-c}{2}, & \text{jestliže } \ \xi_{k-1} < x_0 < \xi_k,\\[2mm]
(f(x_0) + f(\xi_k))\,\dfrac{d-c}{2}, & \text{jestliže } \ \xi_{k-1} = x_0 < \xi_k,\\[2mm]
(f(\xi_{k-1}) + f(x_0))\,\dfrac{d-c}{2}, & \text{jestliže } \ \xi_{k-1} < x_0 = \xi_k,\\[2mm]
f(x_0)\,(d-c), & \text{jestliže } \ \xi_{k-1} = x_0 = \xi_k.
\end{cases}$$

Bude-li tedy funkce f regulovaná na $[a,b]$, bude množina $\mathcal{Q}$ hromadných bodů množiny $\big\{S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) : (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]$ a $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_0\big\}$ nejvýše čtyřbodová:

$$\mathcal{Q} = \Big\{(f(x_0-) + f(x_0+))\,\frac{d-c}{2},\ (f(x_0) + f(x_0+))\,\frac{d-c}{2},\\ (f(x_0-) + f(x_0))\,\frac{d-c}{2},\ 2\,f(x_0)\,\frac{d-c}{2}\Big\},$$

kde $\frac{d-c}{2} = \Delta^+ g(x_0) = \Delta^- g(x_0)$. Pro existenci integrálu $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ je ovšem nutné, aby se množina $\mathcal{Q}$ redukovala na jednobodovou množinu. Snadno nahlédneme, že toto nastane právě tehdy, když pro funkce f a g bude platit současně

$$\Delta^+ f(x_0)\,\Delta^+ g(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad \Delta^- f(x_0)\,\Delta^- g(x_0) = 0.$$

5.2 Podmínka pseudoaditivity a její důsledky

Podrobněji vyjasnit vzájemný vztah mezi (δ) RS a (σ) RS-integrálem umožní pojem *pseudoaditivity*.

5.25 Definice. Řekneme, že funkce f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ splňují v bodě $x \in (a,b)$ podmínku pseudoaditivity, jestliže

$$\left.\begin{array}{l}\text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta_\varepsilon > 0 \text{ takové, že je-li}\\ \delta', \delta'' \in (0,\delta_\varepsilon),\ \xi \in [x-\delta', x+\delta''],\ \xi' \in [x-\delta', x] \text{ a } \xi'' \in [x, x+\delta''],\\ \text{pak platí}\\ \big|f(\xi)\,[g(x+\delta'') - g(x-\delta')] - f(\xi')\,[g(x) - g(x-\delta')]\\ \qquad\qquad - f(\xi'')\,[g(x+\delta'') - g(x)]\big| < \varepsilon.\end{array}\right\} \quad \text{(PA)}$$

5.26 Poznámka. Použití podmínky (PA) může být někdy pohodlnější, pokud ji přeformulujeme do následující ekvivalentní podoby:

$$\left.\begin{array}{l}\text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta_\varepsilon > 0 \text{ takové, že je-li}\\ x' \in (x-\delta_\varepsilon, x),\ x'' \in (x, x+\delta_\varepsilon),\ \xi \in [x', x''],\ \xi' \in [x', x] \text{ a } \xi'' \in [x, x''],\\ \text{pak platí}\\ \big|f(\xi)\,[g(x'')-g(x')] - f(\xi')\,[g(x)-g(x')] - f(\xi'')\,[g(x'')-g(x)]\big| < \varepsilon.\end{array}\right\} \quad \text{(PA')}$$

5.27 Příklad. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{když } x \le 0,\\ 1, & \text{když } x > 0\end{cases} \quad \text{a} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{když } x \le 0,\\ 0, & \text{když } x > 0\end{cases}$$

a $x' < 0 < x''$, $\xi \in [x', x'']$, $\xi' \in [x', 0]$ a $\xi'' \in [0, x'']$. Potom

$$\begin{aligned}&\big|f(\xi)\,[g(x'') - g(x')] - f(\xi')\,[g(0) - g(x')] - f(\xi'')\,[g(x'') - g(0)]\big|\\ &\qquad = \big|f(\xi) - f(\xi'')\big| = 1\end{aligned}$$

vždy, když bude $\xi \le 0$ a $\xi'' > 0$. Vidíme, že funkce f, g nesplňují podmínku (PA) v bodě 0.

5.28 Lemma. *Jestliže funkce f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ splňují v bodě $x \in (a, b)$ podmínku pseudoaditivity, pak alespoň jedna z funkcí f, g je v bodě x spojitá.*

Na druhou stranu, je-li jedna z funkcí f, g spojitá v bodě x a druhá je ohraničená na jeho okolí, pak funkce f, g splňují podmínku pseudoaditivity v bodě x.

D ů k a z. a) Nechť f, g splňují podmínku (PA') pseudoaditivity v bodě x. Dosadíme-li $\xi = \xi'$, dostaneme

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 :\\ &\qquad \Big(x' \in (x - \delta_\varepsilon, x),\ x'' \in (x, x + \delta_\varepsilon),\ \xi' \in [x', x],\ \xi'' \in [x, x'']\Big)\\ &\qquad\qquad\qquad \Longrightarrow\ \big|f(\xi') - f(\xi'')\big|\,\big|g(x'') - g(x)\big| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že není-li funkce g v bodě x spojitá zprava, musí být v bodě x spojitá funkce f. Podobně, položíme-li v (PA') $\xi = \xi''$, dokážeme, že není-li g spojitá zleva v x, musí být f spojitá v x.

b) Nechť

$$x \in (a, b),\ x' \in [a, x),\ x'' \in (x, b],\ \xi \in [x', x''],\ \xi' \in [x', x] \quad \text{a} \quad \xi'' \in [x, x''].$$

Potom

$$\begin{aligned}&\big|f(\xi)\,[g(x'') - g(x')] - f(\xi')\,[g(x) - g(x')] - f(\xi'')\,[g(x'') - g(x)]\big|\\ &\quad = \big|\big(f(\xi) - f(\xi')\big)\,\big(g(x) - g(x')\big) - \big(f(\xi'') - f(\xi)\big)\,\big(g(x'') - g(x)\big)\big|\\ &\quad \le \big|f(\xi) - f(\xi')\big|\,\big|g(x) - g(x')\big| + \big|f(\xi'') - f(\xi)\big|\,\big|g(x'') - g(x)\big|\\ &\quad \le \big(|f(\xi) - f(x)| + |f(x) - f(\xi')|\big)\,\big|g(x) - g(x')\big|\\ &\qquad\quad + \big(|f(\xi'') - f(x)| + |f(x) - f(\xi)|\big)\,\big|g(x'') - g(x)\big|.\end{aligned}$$

Odtud už plyne, že platí i druhé tvrzení lemmatu. □

5.29 Lemma. *Nechť* $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a nechť existuje integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. *Potom dvojice* $f,\ g$ *splňuje v každém bodě* $x\in(a,b)$ *podmínku pseudoaditivity.*

D ů k a z . Předpokládejme, že integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ existuje a přitom v nějakém bodě $x\in(a,b)$ neplatí (PA'). To znamená, že existuje $\varepsilon>0$ takové, že pro každé $\delta>0$ lze najít body

$$x'\in(x-\delta,x),\ \ x''\in(x,x+\delta),\ \ \eta\in[x',x''],\ \ \eta'\in[x',x] \quad \text{a} \quad \eta''\in[x,x'']$$

takové, že

$$\big|f(\eta)\,[g(x'')-g(x')]-f(\eta')\,[g(x)-g(x')]-f(\eta'')\,[g(x'')-g(x)]\big|\geq\varepsilon. \tag{5.12}$$

Buď dáno libovolné $\delta>0$. Nechť $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{D}[a,b]$ je takové, že $\nu(\boldsymbol{\sigma})=m$, $|\boldsymbol{\sigma}|<\delta$ a pro nějaké $k\in\{1,2,\dots,m\}$ je $\sigma_{k-1}=x'<x<x''=\sigma_k$ a $\xi_k=\eta$. Definujme $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma}\cup\{x\}$ a $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}=(\xi_1,\dots,\xi_{k-1},\eta',\eta'',\xi_{k+1},\dots,\xi_m)$. Podle (5.12) máme

$$\begin{aligned}
&|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})|\\
&\quad=\big|f(\xi_k)\,[g(\sigma_k)-g(\sigma_{k-1})]\\
&\qquad\qquad-f(\eta')\,[g(x)-g(\sigma_{k-1})]-f(\eta'')\,[g(\sigma_k)-g(x)]\big|\\
&\quad=\big|f(\eta)[g(x'')-g(x')]-f(\eta')\,[g(x)-g(x')]-f(\eta'')[g(x'')-g(x)]\big|\geq\varepsilon.
\end{aligned}$$

To znamená, že není splněna podmínka (5.3'), a tudíž podle věty 5.14 a cvičení 5.15 (ii) neexistuje integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. □

Následující tvrzení je důsledkem věty 5.14 a lemmat 5.28 a 5.29.

5.30 Věta. *Nechť* $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a nechť existuje integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. *Potom v každém bodě* $x\in(a,b)$ *je alespoň jedna z funkcí* $f,\ g$ *spojitá.*

Víme, že (δ)RS-integrál je speciálním případem (σ)RS-integrálu (viz větu 5.6). Na druhou stranu, jak ukáže následující věta, pojem pseudoaditivity nám poskytuje možnost objasnit i vztah mezi těmito integrály v opačném směru.

5.31 Věta. *Nechť* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$. *Pak integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje právě tehdy, když existuje integrál* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a funkce* $f,\ g$ *splňují podmínku pseudoaditivity v každém bodě* $x\in(a,b)$.

D ů k a z . Předpokládejme nejprve, že existuje $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g.$ Podle věty 5.6 potom existuje i $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a má stejnou hodnotu. Dále podle lemmatu 5.29 musí funkce $f,\ g$ splňovat podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x\in(a,b).$ Stačí tedy dokázat, že když existuje integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a funkce $f,\ g$ splňují podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x\in(a,b),$ pak existuje i integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g.$

Předpokládejme tedy, že integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=I$ existuje a že funkce $f,\ g$ splňují podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x\in(a,b).$ Nechť je dáno $\varepsilon>0$ a nechť dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon=\{s_0,s_1,\dots,s_r\}\in\mathscr{D}[a,b]$ je takové, že $r\ge 2$ a platí

$$|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-I|<\varepsilon,\quad \text{jakmile } \boldsymbol{\rho}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \text{ a } \boldsymbol{\eta}\in\tau(\boldsymbol{\rho}). \tag{5.13}$$

Označme

$$\delta_*:=\min\{s_i-s_{i-1}: i=1,2,\dots,r\}. \tag{5.14}$$

Protože funkce $f,\ g$ splňují podmínku pseudoaditivity na (a,b), nutně existuje $\delta_\varepsilon\in(0,\delta_*)$ takové, že pro každé $i=1,2,\dots,r{-}1$ platí

$$\left.\begin{aligned} &\Big|f(\xi)\,[g(s_i'')-g(s_i')]\\ &\qquad -f(\xi')\,[g(s_i)-g(s_i')]-f(\xi'')\,[g(s_i'')-g(s_i)]\Big|<\frac{\varepsilon}{r-1}\\ &\text{pro}\\ &\qquad s_i'\in(s_i-\delta_\varepsilon,s_i),\ \ s_i''\in(s_i,s_i+\delta_\varepsilon),\\ &\qquad \xi\in[s_i',s_i''],\ \ \xi'\in[s_i',s_i],\ \ \xi''\in[s_i,s_i''].\end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

Nechť $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b],\ \boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ a $|\boldsymbol{\sigma}|<\delta_\varepsilon.$

Podle (5.14) je pro každé $j\in\{1,2,\dots,m\}$ množina $(\sigma_{j-1},\sigma_j)\cap\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ buď jednobodová, nebo prázdná. Nechť

U_1 je množina těch $j\in\{1,2,\dots,m\},$ pro která $(\sigma_{j-1},\sigma_j)\cap\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon=\emptyset,$
$U_2=\{1,2,\dots,m\}\setminus U_1.$

Potom pro každé $j\in U_2$ existuje právě jedno $i(j)\in\{1,2,\dots,r-1\}$ takové, že $s_{i(j)}\in(\sigma_{j-1},\sigma_j).$ Počet prvků množiny U_2 tedy není větší než $r-1.$

Položme nyní $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma} \cup \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon.$ Potom

$$|\boldsymbol{\rho}| < \delta_\varepsilon < \delta_* \tag{5.16}$$

a pro každé $j \in U_1$ existuje právě jedno $k(j) \in \{1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\rho})\}$ takové, že

$$[\rho_{k(j)-1}, \rho_{k(j)}] = [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]. \tag{5.17}$$

Pokud $j \in U_2,$ pak existuje právě jedno $\ell(j) \in \{1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\rho}) - 1\}$ takové, že

$$\rho_{\ell(j)-1} = \sigma_{j-1},\ \ \rho_{\ell(j)} = s_{i(j)},\ \ \rho_{\ell(j)+1} = \sigma_j. \tag{5.18}$$

Zvolme vektor $\boldsymbol{\eta}$ tak, aby bylo $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{T}[a, b]$ a

$$\eta_{k(j)} = \xi_j, \quad \text{když } j \in U_1, \tag{5.19}$$

a porovnejme integrální součty $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ a $S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}).$ Máme

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j\in U_1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] + \sum_{j\in U_2} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})].$$

Nechť $V_1 = \{k(j) : j \in U_1\}$ a $V_2 = \{1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\rho})\} \setminus V_1.$ Pak podle (5.17)–(5.19)

$$\begin{aligned}
S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) &= \sum_{k\in V_1} f(\eta_k)\,[g(\rho_k) - g(\rho_{k-1})] + \sum_{k\in V_2} f(\eta_k)\,[g(\rho_k) - g(\rho_{k-1})]\\
&= \sum_{j\in U_1} f(\eta_{k(j)})\,[g(\rho_{k(j)}) - g(\rho_{k(j)-1})] + \sum_{k\in V_2} f(\eta_k)\,[g(\rho_k) - g(\rho_{k-1})]\\
&= \sum_{j\in U_1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]\\
&\quad + \sum_{j\in U_2} \big[f(\eta_{\ell(j)})[g(\rho_{\ell(j)}) - g(\rho_{\ell(j)-1})] + f(\eta_{\ell(j)+1})\,[g(\rho_{\ell(j)+1}) - g(\rho_{\ell(j)})]\big]\\
&= \sum_{j\in U_1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]\\
&\quad + \sum_{j\in U_2} \big[f(\eta_{\ell(j)})\,[g(s_{i(j)}) - g(\sigma_{j-1})] + f(\eta_{\ell(j)+1})\,[g(\sigma_j) - g(s_{i(j)})]\big].
\end{aligned}$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) &= \sum_{j\in U_2} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]\\
&\quad - \sum_{j\in U_2} \big[f(\eta_{\ell(j)})[g(s_{i(j)}) - g(\sigma_{j-1})] + f(\eta_{\ell(j)+1})[g(\sigma_j) - g(s_{i(j)})]\big],
\end{aligned}$$

tj. $\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\big| \le \sum_{j\in U_2} \big|W_j\big|,$ kde

$$\begin{aligned} W_j &= f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \\ &\qquad - f(\eta_{\ell(j)})\,[g(s_{i(j)}) - g(\sigma_{j-1})] - f(\eta_{\ell(j)+1})\,[g(\sigma_j) - g(s_{i(j)})]. \end{aligned}$$

Připomeňme, že vzhledem k (5.16) a (5.18) máme

$$\begin{aligned} &[\sigma_{j-1},\sigma_j\,] \subset (s_{i(j)} - \delta_\varepsilon, s_{i(j)} + \delta_\varepsilon),\ \ \xi_j \in [\sigma_{j-1},\sigma_j], \\ &\eta_{\ell(j)} \in [\sigma_{j-1}, s_{i(j)}],\ \ \eta_{\ell(j)+1} \in [s_{i(j)},\sigma_j]. \end{aligned}$$

Podle (5.15) je tedy $|W_j| < \dfrac{\varepsilon}{r-1}$ pro každé $j \in U_2,$ a tudíž (také díky tomu, že počet elementů množiny U_2 není větší než $r-1$) dostáváme, že

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\big| \le \sum_{j\in U_2} \big|W_j\big| < \varepsilon.$$

Konečně, vzhledem k (5.13) a vzhledem k definici $\boldsymbol{\rho},$ platí

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I\big| \le \big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\big| + \big|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) - I\big| < 2\,\varepsilon.$$

Dokázali jsme tedy, že $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I.$ □

5.32 Důsledek. *Nechť* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I \in \mathbb{R}$ *a nechť v každém bodě intervalu* (a,b) *je alespoň jedna z funkcí* $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *spojitá a druhá je ohraničená na jeho okolí. Potom je také* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I.$

D ů k a z . Podle lemmatu 5.28 splňují funkce $f,\ g$ podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x \in (a,b),$ a tudíž podle věty 5.31 existuje také $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a platí

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g.$$

□

5.33 Poznámka. Speciálně jestliže $g(x) \equiv x$ a f je ohraničená na $[a,b]$ (tj. pro Riemannův integrál), jsou definice integrálů $(\delta)\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ekvivalentní.

5.34 Cvičení. Dokažte tvrzení:
Nechť $c \in [a,b]$, $(\delta)\displaystyle\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g = I_1 \in \mathbb{R}$ *a* $(\delta)\displaystyle\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g = I_2 \in \mathbb{R}$ *a nechť* $f,\ g$ *splňují podmínku pseudoaditivity v* c. *Potom integrál* $I = (\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje a platí* $I = I_1 + I_2$.
(Návod: využijte věty 5.20 a 5.31.)

5.3 Absolutní integrovatelnost

Nyní uvedeme další potřebný pomocný pojem.

5.35 Definice. Nechť $-\infty < c < d < \infty$ a $f,\ g : [c,d] \to \mathbb{R}$. Potom definujeme

$$\mathfrak{S}_{f\Delta g}[c,d] = \big\{ |S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) - S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}')| : (\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}), (\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}') \in \mathscr{T}[c,d] \big\}$$

a

$$\omega\,(S_{f\Delta g};[c,d]) = \sup\,\mathfrak{S}_{f\Delta g}[c,d].$$

Platí následující modifikace Bolzanových-Cauchyových podmínek.

5.36 Věta. *Nechť* $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Potom :*

(i) *Integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje tehdy a jen tehdy, když platí*

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta_\varepsilon > 0 : \\ &\Big(\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] \ \textit{a}\ |\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon\Big) \implies \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\Delta g};[\sigma_{j-1},\sigma_j]) < \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

(ii) *Integrál* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje tehdy a jen tehdy, když platí*

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b] : \\ &\Big(\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] \ \textit{a}\ \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big) \implies \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\Delta g};[\sigma_{j-1},\sigma_j]) < \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

D ů k a z. a) Ukážeme, že podmínka (5.20) je ekvivalentní s Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou pro existenci (δ) RS-integrálu.

α) Předpokládejme, že platí (5.3). Nechť $\widetilde{\varepsilon} > 0$ je dáno, $\varepsilon = \widetilde{\varepsilon}/2$ a nechť δ_ε je určeno podmínkou (5.3). Mějme dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon$. Označme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$ a pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ vyberme značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}^j, \boldsymbol{\xi}^j)$, $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j) \in \mathscr{T}[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$ tak, aby platilo

$$\omega\,(S_{f\Delta g}, [\sigma_{j-1}, \sigma_j]) < S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^j, \boldsymbol{\xi}^j) - S_{f\Delta g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j) + \frac{\varepsilon}{m}. \tag{5.22}$$

Definujme

$$\boldsymbol{\rho} = \bigcup_{j=1}^m \boldsymbol{\sigma}^j, \quad \widetilde{\boldsymbol{\rho}} = \bigcup_{j=1}^m \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \quad \boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2, \dots, \boldsymbol{\xi}^m) \ \text{ a } \ \widetilde{\boldsymbol{\eta}} = (\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^1, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^2, \dots, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^m).$$

Potom

$$(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{T}[a,b], \ (\widetilde{\boldsymbol{\rho}}, \widetilde{\boldsymbol{\eta}}) \in \mathscr{T}[a,b], \ |\boldsymbol{\rho}| < \delta_\varepsilon \ \text{ a } \ |\widetilde{\boldsymbol{\rho}}| < \delta_\varepsilon.$$

Tudíž podle (5.3) a (5.22) dostáváme

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \omega\,(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]) &< \sum_{j=1}^m \Big[S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^j, \boldsymbol{\xi}^j) - S_{f\Delta g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j) + \frac{\varepsilon}{m}\Big] \\ &= S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - S_{f\Delta g}(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}, \widetilde{\boldsymbol{\eta}}) + \varepsilon < 2\,\varepsilon = \widetilde{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Protože $\widetilde{\varepsilon} > 0$ mohlo být libovolné, plyne odtud, že podmínka (5.20) je splněna.

β) Pro důkaz obrácené implikace předpokládejme, že platí (5.20). Dokážeme, že potom je splněna podmínka (5.3’).

Mějme $\varepsilon > 0$. Nechť δ_ε je určeno podmínkou (5.20) a značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$, $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})$ intervalu $[a,b]$ jsou taková, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon$ a $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \supset \boldsymbol{\sigma}$. Označme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Pak pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ existuje $(\boldsymbol{\sigma}^j, \boldsymbol{\xi}^j) \in \mathscr{T}[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$ takové, že

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \bigcup_{j=1}^m \boldsymbol{\sigma}^j, \quad \widetilde{\boldsymbol{\xi}} = (\boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2, \dots, \boldsymbol{\xi}^m).$$

Díky předpokladu (5.20) a s přihlédnutím k (5.35) dostaneme

$$\begin{aligned}
&|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\Delta g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})| \\
&\qquad \le \sum_{j=1}^{m} \big| f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)\big| \\
&\qquad \le \sum_{j=1}^{m} \omega\,(S_{f\Delta g};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Platí tedy (5.3’).

b) Analogicky by se dokázala ekvivalence podmínky (5.21) s Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou pro existenci (σ)RS-integrálu. Podrobný důkaz je ponechán čtenáři jako cvičení. □

5.37 Cvičení. Dokažte tvrzení věty 5.36 pro (σ)RS-integrály.

5.38 Lemma. *Nechť* $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a* $[c,d\,]\subset[a,b]$. *Potom*

$$\omega_{[c,d\,]}(f)\,|g(d) - g(c)| \le \omega\,(S_{f\Delta g};[c,d\,]) \le \omega_{[c,d\,]}(f)\,\mathrm{var}_c^d\, g. \tag{5.23}$$

D ů k a z. a) Nechť $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\rho}=\{c,d\}$, $\xi,\eta\in[c,d\,]$ a $\boldsymbol{\xi}=(\xi),\boldsymbol{\eta}=(\eta)$. Potom $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\in\mathscr{T}[c,d\,]$ a $|f(\xi)-f(\eta)|\,|g(d)-g(c)|\in\mathfrak{S}_{f\Delta g}([c,d\,])$ a tudíž

$$\omega_{[c,d]}(f)\,|g(d) - g(c)| \le \sup\,\mathfrak{S}_{f\Delta g}[c,d\,] = \omega\,(S_{f\Delta g};[c,d\,]).$$

b) Na druhou stranu, jestliže $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}),(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\theta})\in\mathscr{T}[c,d\,]$ a položíme-li $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\rho}\cup\boldsymbol{\tau}$, bude $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[c,d\,]$ a

$$\big|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) - S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\theta})\big| = \Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\big(f(\eta_j') - f(\theta_j')\big)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]\Big|,$$

kde $\eta_j'=\eta_k$ když $[\sigma_{j-1},\sigma_j]\subset[\rho_{k-1},\rho_k]$ a $\theta\,'_j=\theta_k$ když $[\sigma_{j-1},\sigma_j]\subset[\tau_{k-1},\tau_k]$. Odtud dostáváme dále

$$\begin{aligned}
\big|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) - S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\theta})\big| &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\big|f(\eta_j') - f(\theta_j')\big|\,\big|g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big| \\
&\le \omega_{[c,d\,]}(f)\,V(g,\boldsymbol{\sigma}) \le \omega_{[c,d\,]}(f)\,\mathrm{var}_c^d\, g,
\end{aligned}$$

neboli

$$\omega\,(S_{f\Delta g};[c,d\,]) = \sup\,\mathfrak{S}_{f\Delta g}[c,d\,] \le \omega_{[c,d\,]}(f)\,\mathrm{var}_c^d\, g.$$

Dokázali jsme platnost nerovností (5.23). □

5.39 Poznámka. Je-li $\operatorname{var}_c^d g = \infty$, pak je ovšem druhá z nerovností v (5.23) triviální.

Následující tvrzení poskytuje další nutné a postačující podmínky pro existenci obou typů RS-integrálů.

5.40 Věta. *Nechť* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a* $v(x) = \operatorname{var}_a^x g$ *pro* $x \in [a,b]$. *Potom:*

(i) *Integrál* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje tehdy a jen tehdy, když existuje integrál* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}v$.

(ii) *Je-li* f *ohraničená na* $[a,b]$, *pak integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje tehdy a jen tehdy, když existuje integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v$.

D ů k a z . a) Pro každý interval $[c,d] \subset [a,b]$ máme $\operatorname{var}_c^d v = v(d) - v(c)$. Tudíž podle lemmatu 5.38 musí platit

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\,\big[v(\sigma_j) - v(\sigma_{j-1})\big] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\,v}; [\sigma_{j-1},\sigma_j\,])$$

pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$. Podle lemmatu 5.38 tedy dále dostáváme

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\,g}; [\sigma_{j-1},\sigma_j\,]) &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\ \operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g \\ &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\,\big[v(\sigma_j) - v(\sigma_{j-1})\big] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\,v}; [\sigma_{j-1},\sigma_j\,]).\end{aligned}$$

Nerovnost

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\,g}; [\sigma_{j-1},\sigma_j\,]) \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\,v}; [\sigma_{j-1},\sigma_j\,])$$

tedy platí pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$. Pomocí věty 5.36 nyní už snadno dokážeme, že z existence integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v$ plyne existence integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ (a to pro oba typy RS-integrálu).

b) Předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Dokážeme, že pak existuje také integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v$.

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle věty 5.36 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\Delta g};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]) < \varepsilon \tag{5.24}$$

platí pro každé jeho zjemnění $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. Zřejmě můžeme též předpokládat, že také

$$0 \le \operatorname{var}_a^b g - V(g,\boldsymbol{\sigma}) < \varepsilon \tag{5.25}$$

platí pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ takové, že $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. (Zdůvodněte!)

Nechť $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ a $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. Potom podle lemmatu 5.38 máme

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\,v};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]) \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\ \operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g$$

a dále, podle (5.24), (5.25) a lemmatu 5.38

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\,v};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]) &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\ \big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big]\\ &\quad + \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\ \big(\operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g - [g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]\big)\\ &< \varepsilon + \omega_{[a,b]}(f)\ \big(\operatorname{var}_a^b g - V(g,\boldsymbol{\sigma})\big) < \varepsilon\,(1+\omega_{[a,b]}(f)).\end{aligned}$$

Podle věty 5.36 můžeme tedy uzavřít, že existuje integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v$.

c) Zbývá dokázat, že je-li funkce f ohraničená na $[a,b]$, pak z existence integrálu $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ plyne, že existuje také integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v \in \mathbb{R}$.

Nechť je tedy f ohraničená na $[a,b]$ a nechť existuje integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Potom podle vět 5.6 a 5.30 existuje $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a funkce f, g nemají společný bod

nespojitosti v (a,b). Dále podle lemmatu 2.24 také funkce f, v nemají společný bod nespojitosti v (a,b). Konečně, protože podle části b) tohoto důkazu existuje integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v$, existence integrálu $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v$ plyne z důsledku 5.32. (Protože
$g \in \mathbb{BV}[a,b]$, jsou funkce g i v ohraničené na $[a,b]$.) □

5.41 Věta. *Nechť* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a existuje integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. *Potom existuje také integrál* $\int_a^b |f|\,\mathrm{d}\,g$.

D ů k a z. Podle věty 2.14 a lemmatu 5.12 se můžeme omezit na případ, že g je neklesající na $[a,b]$. Potom je $\operatorname{var}_c^d g = g(d) - g(c)$ pro libovolná $c, d \in [a,b]$ taková, že $c \le d$. Podle lemmatu 5.38 tedy pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ platí

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]\right) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big]$$

a

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{|f|\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]\right) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(|f|)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big].$$

Na druhou stranu, zřejmě

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| \le |f(x) - f(y)| \quad \text{pro libovolná } x, y \in [a,b].$$

Máme tedy $\omega_{[c,d]}(|f|) \le \omega_{[c,d]}(f)$ pro libovolný interval $[c,d] \subset [a,b]$. Tudíž

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{|f|\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]\right) &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(|f|)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big] \\ &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]\right).\end{aligned}$$

Tvrzení věty nyní už plyne okamžitě z věty 5.36. □

Přímým důsledkem lemmatu 5.10 a vět 5.40 a 5.41 je následující tvrzení.

5.42 Důsledek. *Nechť* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a* $v(x) = \operatorname{var}_a^x g$ *pro* $x \in [a,b]$. *Potom:*

(i) *Jestliže existuje integrál* $(\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$, *pak existuje také* $(\sigma)\int_a^b |f| \,\mathrm{d}\, v$ *a platí*

$$\left|(\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\right| \le (\sigma)\int_a^b |f| \,\mathrm{d}\, v \le \|f\| \operatorname{var}_a^b g.$$

(ii) *Jestliže existuje integrál* $(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *a funkce* f *je ohraničená na* $[a,b]$, *pak existuje také integrál* $(\delta)\int_a^b |f| \,\mathrm{d}\, v$ *a platí*

$$\left|(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\right| \le (\delta)\int_a^b |f| \,\mathrm{d}\, v \le \|f\| \operatorname{var}_a^b g.$$

□

5.4 Substituce

Všechna tvrzení tohoto odstavce platí ve stejném znění pro oba typy RS-integrálu. Začneme dalším důsledkem definice 5.35.

5.43 Lemma. *Jestliže existuje integrál* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *a* $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ *je libovolné značené dělení intervalu* $[a,b]$, *pak platí*

$$\left|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\right| \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]). \tag{5.26}$$

D ů k a z . Označme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Nezávisle na tom, o jaký typ RS-integrálu se jedná, můžeme zvolit značené dělení $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathscr{T}[a,b]$ tak, aby bylo $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \supset \boldsymbol{\sigma}$ a

$$\left|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})\right| < \varepsilon.$$

Protože $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ je zjemněním $\boldsymbol{\sigma}$, můžeme ho rozdělit tak, že bude

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \bigcup_{j=1}^{m} \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \quad \text{kde } \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j \in \mathscr{D}[\sigma_{j-1}, \sigma_m\,] \ \text{ pro } \ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Podobně $\widetilde{\boldsymbol{\xi}} = (\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^1, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^2, \dots, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j)$, kde $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j$ jsou reálné vektory takové, že

$$(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j) \in \mathscr{T}\,[\sigma_{j-1}, \sigma_j\,] \text{ pro } j = 1, 2, \dots, m.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\Big| \\
&\qquad \le \Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})\Big| + \Big|S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\Big| \\
&\qquad < \varepsilon + \sum_{j=1}^m \big|f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j)\big| \\
&\qquad < \varepsilon + \sum_{j=1}^m \omega\,(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]).
\end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že platí (5.26). □

5.44 Důsledek. *Jestliže integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje a* $[c, d] \subset [a, b]$, *pak pro každé* $\xi \in [c, d]$ *platí*

$$\Big|\int_c^d f\,\mathrm{d}\,g - f(\xi)\,[g(d) - g(c)]\Big| \le \omega\,(S_{f\Delta g}; [c, d\,]).$$

Následující speciální forma věty o substituci je také důsledkem lemmatu 5.43.

5.45 Věta (SUBSTITUCE)**.** *Nechť* $f,\ g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$, *přičemž* f *je ohraničená na intervalu* $[a, b]$ *a integrál* $\displaystyle\int_a^b g\,\mathrm{d}\,h$ *existuje. Potom jeden z integrálů*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x g\,\mathrm{d}\,h\Big] \quad \textit{a} \quad \int_a^b f\,g\,\mathrm{d}\,h$$

existuje (má konečnou hodnotu) právě tehdy, když existuje i ten druhý. V takovém případě pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x g\,\mathrm{d}\,h\Big] = \int_a^b f\,g\,\mathrm{d}\,h. \tag{5.27}$$

D ů k a z . Nejprve si všimněme, že z existence integrálu $\int_a^b g\,\mathrm{d}\,h$ plyne, že funkce

$$w : x \in [a,b] \to w(x) = \int_a^x g\,\mathrm{d}\,h$$

je definována na celém intervalu $[a,b]$ a má konečné hodnoty pro každé $x \in [a,b]$ (viz větu 5.16). Pro libovolné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ máme

$$\begin{aligned}
&|S_{fg\Delta\,h}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\Delta\,w}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| \\
&\quad = \Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,g(\xi_j)\,[h(\sigma_j)-h(\sigma_{j-1})] - \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,[w(\sigma_j)-w(\sigma_{j-1})]\Big| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\xi_j)|\,\Big|g(\xi_j)\,[h(\sigma_j)-h(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g\,\mathrm{d}\,h\Big| \\
&\quad \le \|f\|\left(\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big|g(\xi_j)\,[h(\sigma_j)-h(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g\,\mathrm{d}\,h\Big|\right).
\end{aligned}$$

Podle důsledku 5.44 dostáváme dále

$$\big|S_{fg\Delta\,h}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\Delta\,w}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| \le \|f\| \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{g\Delta\,h};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]).$$

Odtud podle věty 5.36 už plyne relace (5.27). (Přesvědčte se, že důkaz opravdu umíte dokončit.) □

Položíme-li ve větě 5.45 $h(t) \equiv t$, dostaneme následující tvrzení.

5.46 Důsledek. Je-li f ohraničená na $[a,b]$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$ a $p(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$, pak jeden z integrálů

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,p \quad \text{a} \quad \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

existuje právě tehdy, když existuje i ten druhý. V takovém případě pak platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,p = \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.47 Věta (DRUHÁ O SUBSTITUCI). *Předpokládejme, že funkce* $\phi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ *je ryze monotónní a spojitá na* $[\alpha,\beta]$ *a zobrazuje* $[\alpha,\beta]$ *na interval* $[a,b]$. *Potom pro libovolné funkce* $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *platí:*

$$\textit{existuje-li } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,[g(x)],\ \textit{existuje také } \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\mathrm{d}\,[g(\phi(x))]$$

a

$$\pm\int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\mathrm{d}\,[g(\phi(x))]=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,[g(x)], \tag{5.28}$$

kde „+“ platí, je-li ϕ *rostoucí a „-“ platí, je-li* ϕ *klesající.*

D ů k a z . Předpokládejme například, že ϕ je klesající. Potom $b=\phi(\alpha)$ a $a=\phi(\beta)$. Pro dané značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[\alpha,\beta]$ položme

$$\rho_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-j}=\phi(\sigma_j)\quad\text{a}\quad\eta_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-j}=\phi(\xi_j)\qquad\text{pro } j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma}).$$

Potom $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\rho}=\{\rho_0,\rho_1,\dots,\rho_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}$, $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{\nu(\boldsymbol{\sigma})})$ je značené dělení intervalu $[a,b]$. Píšeme $\boldsymbol{\rho}=\phi(\boldsymbol{\sigma})$ a $\boldsymbol{\eta}=\phi(\boldsymbol{\xi})$. Zřejmě, je-li $\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}'$, pak je také $\phi(\boldsymbol{\sigma})\supset\phi(\boldsymbol{\sigma}')$. Podobně, protože ϕ je stejnoměrně spojitá na $[\alpha,\beta]$, platí $|\phi(\boldsymbol{\sigma})|\to 0$, jakmile $|\boldsymbol{\sigma}|\to 0$. Navíc

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\phi(\xi_j))\,\big[g(\phi(\sigma_j))-g(\phi(\sigma_{j-1})\big]=-\sum_{i=1}^{\nu(\boldsymbol{\rho})} f(\eta_j)\,\big[g(\rho_j)-g(\rho_{j-1})\big]$$

platí pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[\alpha,\beta]$. Teď už zajisté každý čtenář, který pozorně prostudoval většinu důkazů této kapitoly, samostatně dokončí důkaz rovnosti (5.28) pro oba integrály (včetně případu, že ϕ je nerostoucí). □

Další variantou věty o substituci je následující věta. Její důkaz můžeme ponechat čtenáři jako cvičení.

5.48 Věta. *Nechť funkce* $\phi:[a,b]\to[\phi(a),\phi(b)]$ *je rostoucí a spojitá na* $[a,b]$, $\psi:[\phi(a),\phi(b)]\to[a,b]$ *je inverzní k* ϕ *a nechť* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. *Pak existuje-li jeden z integrálů*

$$(\sigma)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x,\quad(\sigma)\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\psi(x))\,\mathrm{d}\,[\psi(x)],$$

existuje i ten druhý a platí rovnost

$$(\sigma)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = (\sigma)\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\psi(x))\,\mathrm{d}\,[\psi(x)].$$

5.49 Cvičení. Dokažte větu 5.48. Zformulujte a dokažte analogické tvrzení pro (δ) RS-integrály.

5.5 Integrace per-partes

Následující tvrzení je zobecněním věty o integraci per-partes pro Riemannův integrál. Platí ve stejném znění pro oba typy RS-integrálu.

5.50 Věta (VĚTA O INTEGRACI PER-PARTES)**.** *Existuje-li jeden z integrálů*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g, \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}\,f,$$

existuje i druhý a platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g + \int_a^b g\,\mathrm{d}\,f = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a). \tag{5.29}$$

D ů k a z . a) Buď dáno libovolné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a, b]$. Položme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Přeorganizováním členů v součtu $S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ dostaneme

$$\begin{aligned} S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) &= f(\xi_1)\,[g(\sigma_1) - g(a)] + f(\xi_2)\,[g(\sigma_2) - g(\sigma_1)] \\ &\qquad + \cdots + f(\xi_m)\,[g(b) - g(\sigma_{m-1})] \\ &= -f(a)\,g(a) - [f(\xi_1) - f(a)]\,g(a) - [f(\xi_2) - f(\sigma_1)]\,g(\sigma_1) \\ &\quad -[f(\sigma_1) - f(\xi_1)]\,g(\sigma_1) - \cdots - [f(\xi_m) - f(\sigma_{m-1})]\,g(\sigma_{m-1}) \\ &\quad -[f(\sigma_{m-1}) - f(\xi_{m-1})]\,g(\sigma_{m-1}) \\ &\quad -[f(b) - f(\xi_m)]\,g(b) + f(b)\,g(b) \\ &= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \end{aligned}$$

neboli

$$S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}'), \tag{5.30}$$

kde

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}' &= \{a, \xi_1, \sigma_1, \xi_2, \sigma_2, \ldots, \sigma_{m-1},\ \xi_m,\ b\},\\ \boldsymbol{\xi}' &= (a, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \ldots, \sigma_{m-1}, \sigma_{m-1}, b),\end{aligned}$$

$(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,b]$ a $\boldsymbol{\sigma}'$ je zjemněním $\boldsymbol{\sigma}$. (Stane-li se, že $\xi_j = \sigma_{j-1}$, resp. $\xi_j = \sigma_j$ pro nějaké j, musíme ovšem tyto body ξ_j v $\boldsymbol{\sigma}'$ a jim odpovídající body v $\boldsymbol{\xi}'$ vynechat.)

b) Předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$.

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ tak, aby pro každé jeho zjemnění $\boldsymbol{\sigma}'$ a všechna příslušná značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,b]$ platilo

$$\Bigl|S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f\Bigr| < \varepsilon.$$

Podle (5.30) pro každé $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a příslušné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ platí

$$\begin{aligned}S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - f(b)\,g(b) + f(a)\,g(a) + (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f&\\ = (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f - S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')&,\end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, a tudíž

$$\begin{aligned}\Bigl|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - f(b)\,g(b) + f(a)\,g(a) + (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f\Bigr|&\\ = \Bigl|(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f - S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')\Bigr| < \varepsilon&.\end{aligned}$$

Odtud plyne existence integrálu $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a relace (5.29). To, že z existence integrálu $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ plyne existence integrálu $(\sigma)\displaystyle\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$ a platí rovnost (5.29), by se dokazovalo analogicky.

c) Tvrzení věty pro (δ)RS-integrály plyne ze vztahu (5.30) podobně jako v druhé části důkazu pro (σ)RS-integrály a detailní důkaz můžeme nechat čtenáři jako cvičení. □

5.51 Cvičení. Dokažte větu 5.50 pro (δ)RS-integrály.

5.6 Stejnoměrná konvergence a existence integrálu

Až na větu 5.55 a cvičení 5.56 všechna tvrzení tohoto odstavce platí ve stejném znění pro oba typy RS-integrálu.

5.52 Věta. *Nechť* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je ohraničená a nechť posloupnost funkcí* $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, *je taková, že integrál* $\displaystyle\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g$ *existuje pro každé* $n\in\mathbb{N}$ *a*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0. \tag{5.31}$$

Potom existuje také integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g. \tag{5.32}$$

D ů k a z . a) Jestliže je $\operatorname{var}_a^b g=0$, pak podle lemmatu 2.13 musí být g konstantní na $[a,b]$ a tvrzení věty je evidentní. Předpokládejme tedy, že $\operatorname{var}_a^b g>0$.

Nechť je dáno $\varepsilon>0$. Vzhledem k předpokladu (5.31) můžeme zvolit $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$n\ge n_\varepsilon \implies \Big(\|f_n-f\|<\frac{\varepsilon}{\operatorname{var}_a^b g}\Big) \text{ a } \Big(\|f_n\|<\|f\|+1\Big). \tag{5.33}$$

Dále za našich předpokladů je podle lemmatu 5.10 (i)

$$\Big|\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g\Big|\le\|f_n\|\operatorname{var}_a^b g\le(\|f\|+1)\operatorname{var}_a^b g$$

pro $n\ge n_\varepsilon$. Můžeme tedy vybrat rostoucí posloupnost $\{n_k\}\subset\mathbb{N}$ a $I\in\mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_{n_k}\,\mathrm{d}\,g=I.$$

Speciálně existuje $k_\varepsilon\in\mathbb{N}$ takové, že

$$n_{k_\varepsilon}\ge n_\varepsilon \quad\text{a}\quad \Big|\int_a^b f_{n_k}\,\mathrm{d}\,g-I\Big|<\varepsilon. \tag{5.34}$$

Dále nechť $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ je takové dělení intervalu $[a,b]$, že

$$\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b] \;\text{ a }\; \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big) \implies \Big|S_{f_{n_{k_\varepsilon}}\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}}\,\mathrm{d}\,g\Big| < \varepsilon. \tag{5.35}$$

Protože je $n_{k_\varepsilon}\ge n_\varepsilon$ (viz (5.34)), plyne z (5.33), že pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$, kde $\boldsymbol{\sigma}$ je zjemněním $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, platí

$$\big|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f_{n_{k_\varepsilon}}\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| \le \|f - f_{n_{k_\varepsilon}}\|\,\mathrm{var}_a^b\, g < \varepsilon.$$

Vzhledem k (5.34)–(5.35) tedy dostáváme

$$\begin{aligned}\big|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I\big| &\le \big|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f_{n_{k_\varepsilon}}\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| \\ &\quad + \Big|S_{f_{n_{k_\varepsilon}}\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}}\,\mathrm{d}\,g\Big| + \Big|\int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}}\,\mathrm{d}\,g - I\Big| < 3\,\varepsilon\end{aligned}$$

pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$, kde $\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. Odtud okamžitě plyne, že platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I.$$

Konečně, protože podle lemmat 5.10 a 5.12 máme

$$\Big|\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g - \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big| \le \|f_n - f\|\,(\mathrm{var}_a^b\, g),$$

rovnost (5.32) nyní plyne z předpokladu (5.31). Důkaz byl proveden pro (σ)RS-integrál.

b) Důkaz pro (δ)RS-integrály je analogický a ponecháváme ho jako cvičení. □

5.53 Cvičení. Dokažte tvrzení věty 5.52 pro (δ)RS-integrály.

5.54 Věta. *Nechť* $f\in\mathbb{C}[a,b]$ *a* $g\in\mathbb{BV}[a,b]$. *Potom existují oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g \quad \text{a} \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}\,f.$$

D ů k a z. Vzhledem ke větám 2.14, 5.6 a 5.50 a lemmatu 5.12 stačí dokázat existenci integrálu $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ pro případ, že g je neklesající na $[a,b]$.

Nechť je tedy f spojitá na $[a,b]$, g neklesající na $[a,b]$ a $\varepsilon > 0$ je dáno. Je-li $g(b) = g(a)$, pak g je nutně konstantní na $[a,b]$, a tudíž $(\delta)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že $g(b) - g(a) > 0$. Dále využijeme toho, že každá funkce spojitá na kompaktním intervalu je na tomto intervalu také stejnoměrně spojitá. Existuje tedy $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$\left.\begin{aligned} &|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \\ &\qquad\text{pro všechna } x, y \in [a,b] \text{ taková, že } |x - y| < \delta_\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

Mějme dvě značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}), (\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')$ intervalu $[a,b]$ taková, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon$ a $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}$. Ukážeme, že platí $|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')| < \varepsilon$. Podle věty 5.14 to už bude znamenat, že existuje $(\delta)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$. (Viz také cvičení 5.15 (ii).)

Nechť $\nu(\boldsymbol{\sigma}) = m$. Označme prvky dělení $\boldsymbol{\sigma}'$ a složky vektoru $\boldsymbol{\xi}'$ tak, že bude

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}' &= \left\{\sigma_0, \sigma_1^1, \ldots, \sigma_{n_1-1}^1, \sigma_1, \sigma_1^2, \ldots, \sigma_{m-1}, \sigma_1^m, \ldots, \sigma_{n_m-1}^m, \sigma_m\right\}, \\ \boldsymbol{\xi}' &= \left(\xi_1^1, \quad \ldots, \quad \xi_{n_1}^1, \xi_1^2, \quad \ldots, \quad \xi_1^m, \quad \ldots, \quad \xi_{n_m}^m\right). \end{aligned}$$

Potom

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] = \sum_{j=1}^m f(\xi_j) \sum_{i=1}^{n_j} [g(\sigma_i^j) - g(\sigma_{i-1}^j)]$$

a

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')| \le \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} |f(\xi_j) - f(\xi_i^j)|\,[g(\sigma_i^j) - g(\sigma_{i-1}^j)],$$

kde klademe $\sigma_0^j = \sigma_{j-1}$ a $\sigma_{n_j}^j = \sigma_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, m$. Protože

$$|\xi_j - \xi_i^j| < |\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon \ \text{ pro všechna } j \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ a } i \in \{1, 2, \ldots, n_j\},$$

odvodíme pomocí nerovnosti (5.36) vztah

$$\begin{aligned} |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')| &< \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} [g(\sigma_i^j) - g(\sigma_{i-1}^j)] \\ &= \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}\,[g(b) - g(a)] = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

5.55 Věta. (i) *Jestliže* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *je zleva spojitá na intervalu* $(a,b]$, *pak pro každou funkci* $g \in \mathbb{G}[a,b]$ *zprava spojitou na intervalu* $[a,b)$ *existují oba integrály*

$$(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad \textit{a} \quad (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}f.$$

(ii) *Jestliže* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *je zprava spojitá na intervalu* $[a,b)$, *pak pro každou funkci* $g \in \mathbb{G}[a,b]$ *zleva spojitou na intervalu* $(a,b]$ *existují oba integrály*

$$(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad \textit{a} \quad (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}f.$$

D ů k a z . Díky větě o integraci per-partes (věta 5.50) stačí v obou případech dokázat existenci integrálu $(\sigma)\displaystyle\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$.

Nechť $g \in \mathbb{G}[a,b]$ je zprava spojitá na intervalu $[a,b)$, tj. $g \in \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]$ (viz (4.8)). Podle lemmat 4.18 a 4.19 máme

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] = \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]} = \overline{\mathrm{Lin}\Big(\chi_{[\tau,b]}, \tau \in [a,b]\Big)}.$$

Podle lemmatu 5.12 a věty 5.52 tedy stačí dokázat, že integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$ existuje jestliže $g \equiv \chi_{[\tau,b]}$ pro nějaké $\tau \in [a,b]$.

Je-li $g = \chi_{[a,b]}$, neboli $\tau = a$ a $g = 1$ na $[a,b]$, pak $(\sigma)\displaystyle\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f = f(b) - f(a)$ (viz cvičení 5.5 (ii)). Předpokládejme tedy, že $\tau \in (a,b]$ a $g = \chi_{[\tau,b]}$. Dokážeme, že je

$$(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f = f(b) - f(\tau). \tag{5.37}$$

Podle poznámky 5.7 se můžeme omezit na značená dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$, která obsahují bod τ. Pro každé takové značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ označme symbolem $k(\boldsymbol{\sigma})$ ten index $k \in \{1,2,\ldots,\nu(\boldsymbol{\sigma})\}$, pro který platí $\tau = \sigma_k$. (Takový index existuje vždy právě jeden.) Potom pro všechna tato dělení dostáváme

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} f(b) - f(\tau) & \text{je-li } \xi_{k(\boldsymbol{\sigma})} < \tau, \\ f(b) - f(\sigma_{k(\boldsymbol{\sigma})-1}) & \text{je-li } \xi_{k(\boldsymbol{\sigma})} = \tau \end{cases}$$

a tudíž

$$\left|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\big(f(b)-f(\tau)\big)\right| = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \xi_{k(\boldsymbol{\sigma})} < \tau, \\ |f(\tau)-f(\sigma_{k(\boldsymbol{\sigma})-1})| & \text{je-li } \xi_{k(\boldsymbol{\sigma})} = \tau. \end{cases} \tag{5.38}$$

Díky spojitosti funkce f v bodě τ zleva můžeme zvolit dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ obsahující bod τ a takové, že platí

$$|f(\tau)-f(\sigma_{k(\boldsymbol{\sigma})-1})| < \varepsilon$$

pro libovolné jeho zjemnění $\boldsymbol{\sigma}$. Vzhledem k (5.38) to znamená, že pak bude platit

$$\left|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\big(f(b)-f(\tau)\big)\right| < \varepsilon \ \text{ pro všechna } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b] \text{ taková, že } \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon.$$

Odtud plyne, že platí (5.37). Dokázali jsme tedy tvrzení (i).

Druhé tvrzení by se dokazovalo podobně. □

5.56 Cvičení. (i) Pro oba typy RS-integrálu dokažte:

Jestliže $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *má konečnou variaci na* $[a,b]$ *a je spojitá na* $[a,b]$, *pak integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje pro každou funkci* g *regulovanou na* $[a,b]$.

(ii) Proveďte podrobný důkaz tvrzení (ii) věty 5.55.

5.57 Poznámka. Připomeňme ještě bez důkazu jeden ze známých zajímavých existenčních výsledků. Dokázal ho v roce 1936 jeden z klasiků teorie integrace L. C. Young (viz [64]).

Jestliže funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a* $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *splňují podmínky*

$$|f(x)-f(y)| \le K\,|x-y|^\alpha \ \ \textit{a} \ \ |g(x)-g(y)| \le L\,|x-y|^\beta \quad \textit{pro } x,y\in[a,b],$$

kde $K,L\in[0,\infty)$, $\alpha,\beta\in(0,\infty)$, $\alpha+\beta>1$, *pak existuje integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$.

5.7 Bodová konvergence

Důkaz věty o konvergenci posloupnosti integrálů $\displaystyle\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g$, ve které by nebyla nutná stejnoměrná konvergence $f_n \rightrightarrows f$, nám usnadní zavedení Darbouxových horních a dolních integrálů.

5.58 Definice. Nechť $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je neklesající na $[a,b]$. Pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ a funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ položme

$$\overline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big(\sup_{x \in [\sigma_{j-1},\sigma_j]} f(x) \Big) \, [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]$$

a

$$\underline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big(\inf_{x \in [\sigma_{j-1},\sigma_j]} f(x) \Big) \, [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]$$

a definujme

$$\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g = \inf \Big\{ \overline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] \Big\}$$

a

$$\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g = \sup \Big\{ \underline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] \Big\}.$$

Veličiny $\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g$ resp. $\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g$ nazýváme *horní, resp. dolní integrál* f vzhledem ke g.

5.59 Lemma. *Nechť* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je neklesající na* $[a,b]$ *a* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Potom platí*

$$\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g = \underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g = I \in \mathbb{R} \tag{5.39}$$

právě tehdy, když $(\sigma)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g = I$.

D ů k a z . a) Předpokládejme, že platí (5.39). Protože g je neklesající, plyne přímo z definice 5.58, že

$$\underline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) \le S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \le \overline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \text{pro } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] \text{ a } \boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma}),$$

a

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \supset \boldsymbol{\sigma} \implies \Big(\underline{S}_{f\Delta g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}) \ge \underline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) \text{ a } \overline{S}_{f\Delta g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}) \le \overline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) \Big).$$

Pomocí těchto základních faktů není obtížné ověřit (proveďte !), že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}^k \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že nerovnosti

$$I - \frac{1}{k} < \underline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^k) \le S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^k, \boldsymbol{\xi}^k) \le \overline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^k) < I + \frac{1}{k}$$

platí pro každé $\boldsymbol{\xi}^k \in \tau(\boldsymbol{\sigma}^k)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ zvolme $k_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ a položme $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}$. Potom bude pro každé $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a $\boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma})$ platit

$$I - \varepsilon < \underline{S}(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}) \le \underline{S}(\boldsymbol{\sigma}) \le S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \le \overline{S}(\boldsymbol{\sigma}) \le \overline{S}(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}) < I + \varepsilon.$$

Odtud plyne rovnost $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I$.

b) Předpokládejme nyní, že existuje $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle věty 5.14 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}$ takové, že nerovnost $\big|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta})\big| < \frac{\varepsilon}{2}$ neboli

$$\Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(f(\xi_j) - f(\eta_j)\big)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big]\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro jakákoliv $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \tau(\boldsymbol{\sigma})$. Přechodem k supremům a infimům na každém intervalu $[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$ získáme nerovnost

$$\begin{aligned} 0 &\le \overline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) - \underline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) \\ &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big(\sup_{x \in [\sigma_{j-1},\sigma_j]} f(x) - \inf_{x \in [\sigma_{j-1},\sigma_j]} f(x)\Big)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big] \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme $\displaystyle\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g \le \overline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) < \underline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) + \varepsilon \le \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g + \varepsilon$ a konečně také $\displaystyle 0 \le \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g - \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g < \varepsilon$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že je $\displaystyle\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g = \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g$. Podle první části důkazu tedy platí (5.39). □

5.60 Poznámka. Jestliže $\displaystyle\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g = \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\, g = I \in \mathbb{R}$, bývá jejich společná hodnota I nazývána *Darbouxův-Stieltjesův integrál*. Lemma 5.59 říká, že tento integrál je ekvivalentní se (σ)RS-integrálem.

Nyní dokážeme dvě hlavní věty tohoto odstavce: Osgoodovu větu o dominované konvergenci a Hellyovu větu o konvergenci. Obě tyto věty platí ve stejném znění pro oba typy RS-integrálů.

5.61 Věta (OSGOODOVA KONVERGENČNÍ VĚTA). *Předpokládejme, že funkce* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a posloupnost* $\{f_n\}$ *funkcí definovaných na* $[a,b]$ *splňují*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \quad \textit{a} \quad |f_n(x)|\le M<\infty \ \textit{ pro } \ x\in[a,b] \ \textit{ a } \ n\in\mathbb{N}. \tag{5.40}$$

Dále nechť funkce $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ *je taková, že integrály* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a* $\displaystyle\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g$ *existují pro libovolné* $n\in\mathbb{N}$. *Potom*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g. \tag{5.41}$$

D ů k a z . a) Podle důsledku 5.42 integrál $\displaystyle\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}\,[\mathrm{var}_a^x\,g]$ existuje pro každé $n\in\mathbb{N}$ a platí nerovnost

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,]-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,]\right|\le\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}\,[\mathrm{var}_a^x\,g]. \tag{5.42}$$

Stačí tedy dokázat, že tvrzení věty platí, jestliže funkce f_n jsou nezáporné, $f=0$ a g je neklesající. K tomu potřebujeme následující tvrzení známé z teorie množin jako Arzelàovo lemma. Jeho důkaz lze nalézti např. v [11, lemma II.15.8].

Lemma. (ARZELÀ). *Nechť* $\big\{\{J_{k,j}\}:k\in\mathbb{N},\ j\in U_k\big\}$ *je posloupnost konečných množin podintervalů* $[a,b]$ *takových, že pro každé* $k\in\mathbb{N}$ *jsou intervaly z množiny* $\{J_{k,j}:j\in U_k\}$ *navzájem disjunktní a*

$$\sum_{j\in U_k}|J_{k,j}|>C>0 \quad \textit{pro každé} \ \ k\in\mathbb{N}.$$

Potom existují posloupnosti indexů $\{k_\ell\}$ *a* $\{j_\ell\}$ *takové, že* $j_\ell\in U_{k_\ell}$ *pro každé* $\ell\in\mathbb{N}$ *a* $\displaystyle\bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} J_{k_\ell,j_\ell}\ne\emptyset$.

b) Předpokládejme tedy, že g je neklesající na $[a,b]$ a $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí definovaných na $[a,b]$ a takových, že

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \quad \text{a} \quad 0\le f_n(x)\le M<\infty \ \text{ pro } \ x\in[a,b] \ \text{ a } \ n\in\mathbb{N}.$$

Dokážeme, že musí platit

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g = 0. \tag{5.43}$$

Důkaz provedeme sporem. Nechť tedy neplatí (5.43). Potom, vzhledem k lemmatu 5.59, existují $\varepsilon > 0$ a rostoucí posloupnost $\{n_k\}$ takové, že

$$\underline{\int_a^b} f_{n_k} \,\mathrm{d}\, g > \varepsilon \quad \text{pro všechna } k\in\mathbb{N}.$$

Vzhledem k definici 5.58 to znamená, že pro každé $k\in\mathbb{N}$ existuje $\boldsymbol{\sigma}^k\in\mathscr{D}[a,b]$ takové, že $\underline{S}_{\,k}(\boldsymbol{\sigma}^k)>\varepsilon$, kde značíme $\underline{S}_{\,k}(\boldsymbol{\sigma}^k)=\underline{S}_{\,f_{n_k}\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^k)$. Položme ještě $m_k=\nu(\boldsymbol{\sigma}^k)$ a $\varphi_{k,j}=\inf\limits_{x\in[\sigma^k_{j-1},\sigma^k_j]} f_{n_k}(x)$ pro $k\in\mathbb{N}$ a $j\in\{1,2,\dots,m_k\}$. Pro dané $\eta>0$ označme U_k množinu indexů j takových, že $\varphi_{k,j}>\eta$, zatímco $V_k=\{1,2,\dots,m_k\}\setminus U_k$. Zřejmě

$$M\sum_{j\in U_k}[g(\sigma^k_j)-g(\sigma^k_{j-1})]+\eta\sum_{j\in V_k}[g(\sigma^k_j)-g(\sigma^k_{j-1})]>\varepsilon$$

neboli

$$M\sum_{j\in U_k}[g(\sigma^k_j)-g(\sigma^k_{j-1})]>\varepsilon-\eta\,[g(b)-g(a)].$$

Pro $\eta=\dfrac{\varepsilon}{2\,[g(b)-g(a)]}$ dostaneme $\sum\limits_{j\in U_k}[g(\sigma^k_j)-g(\sigma^k_{j-1})]>\dfrac{\varepsilon}{2\,M}>0$ neboli $\sum\limits_{j\in U_k}|J_{k,j}|>\dfrac{\varepsilon}{2\,M}>0$, kde $J_{k,j}=[g(\sigma^k_{j-1}),g(\sigma^k_j)]$ pro $j\in U_k$. Podle Arzelàova lemmatu tedy existují bod y_0 a posloupnosti $\{k_\ell\}$ a $\{j_\ell\}$ takové, že $j_\ell\in U_{k_\ell}$ pro každé $\ell\in\mathbb{N}$ a $y_0\in\bigcap\limits_{\ell\in\mathbb{N}}J_{k_\ell,j_\ell}$. To znamená, že $y_0\in[g(\sigma^{k_\ell}_{j_\ell-1}),g(\sigma^{k_\ell}_{j_\ell})]$ pro každé $\ell\in\mathbb{N}$. Protože g je neklesající na $[a,b]$, existuje právě jeden bod $x_0\in[a,b]$ takový, že

$$y_0\in[g(x_0-),g(x_0+)],\ \ x_0\in[\sigma^{k_\ell}_{j_\ell-1},\sigma^{k_\ell}_{j_\ell}] \ \text{ a } \ j_\ell\in U_{k_\ell} \ \text{ pro každé } \ell\in\mathbb{N}.$$

Podle definice množin U_k to znamená, že $f_{n_{k_\ell}}(x_0)>\eta$ pro každé $\ell\in\mathbb{N}$. To ale není možné vzhledem k předpokladu $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. Platí tedy (5.43).

c) Podle části b) tohoto důkazu a lemmatu 5.59 máme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}\,[\operatorname{var}_a^x g\,] &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}\,[\operatorname{var}_a^x g\,]\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\underline{a}}^b f_n(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,]=0,\end{aligned}$$

a tudíž ze vztahu (5.42) bezprostředně vyplývá, že platí také

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Další věta o konvergenci posloupnosti integrálů $\left\{\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n\right\}$ je doplňkem k větě Osgoodově. Z jejího důkazu bude zřejmé, že platí pro oba integrály.

5.62 Věta (HELLYOVA VĚTA O KONVERGENCI)**.** *Nechť funkce* $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a posloupnost* $\{g_n\}\subset\mathbb{BV}[a,b]$ *jsou takové, že*

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)\ \textit{pro}\ x\in[a,b]\quad\textit{a}\quad \operatorname{var}_a^b g_n\le\gamma<\infty.$$

Potom $\operatorname{var}_a^b g\le\gamma$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *platí pro každou funkci* f *spojitou na* $[a,b]$.

D ů k a z . Nechť f je spojitá na $[a,b]$. Podle věty 2.44 je $\operatorname{var}_a^b g\le\gamma$ a podle věty 5.54 existují všechny integrály $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n,\ n\in\mathbb{N}$, a $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Buď dáno $\varepsilon>0$. Ze spojitosti funkce f na $[a,b]$ plyne, že existuje $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}\in\mathscr{D}[a,b]$ takové, že pro každé $j\in\{1,2,\dots,m\}$ platí

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3\,\gamma}\qquad\text{pro všechny } x,y\in[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]. \tag{5.44}$$

Pro každé $n\in\mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^m\Big(\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f(x)\,\mathrm{d}\,[\,g_n(x)\,]-f(\sigma_j)\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\mathrm{d}\,[\,g_n(x)\,]\Big)\\ &\qquad=\sum_{j=1}^m\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\big(f(x)-f(\sigma_j)\big)\,\mathrm{d}\,[\,g_n(x)\,],\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,[\,g_n(x)\,] &- S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \big(f(x)-f(\sigma_j)\big)\,\mathrm{d}\,[\,g_n(x)\,],\end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\xi}=(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m)$. Pomocí (5.44) a lemmatu 5.10 tedy dostáváme

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g_n(x) - S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\right| \le \frac{\varepsilon}{3\,\gamma}\sum_{j=1}^{m} \operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g \le \frac{\varepsilon}{3\,\gamma}\,\gamma = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Podobně odvodíme i analogickou nerovnost s funkcí g na místě g_n, tj.

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,] - S_{f\,\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Protože $g_n(x)\to g(x)$ pro každé $x\in[a,b]$, snadno ověříme také rovnost

$$\lim_{n\to\infty}\left|S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\,\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\right| = 0.$$

Existuje tedy $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že

$$\left|S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\,\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{pro } n\ge n_0.$$

Pomocí posledních tří nerovností konečně dostaneme pro $n\ge n_0$

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n - \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\right| &\le \left|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n - S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\right| \\ &+ \left|S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\,\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\right| + \left|S_{f\,\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Platí tedy $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n = \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g.$ □

5.8 Další věty o existenci integrálu

Nejprve pomocí vět 5.36 a 5.40 a lemmatu 5.38 upřesníme pohled na roli ohraničených funkcí v teorii Stieltjesova integrálu, který nám poskytla věta 5.23. Následující tvrzení platí pro oba typy RS-integrálů.

5.63 Věta. *Nechť* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ *a nechť existuje* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$. *Potom je buďto funkce* f *ohraničená na intervalu* $[a,b]$, *nebo existuje konečný systém bodů* $\alpha_i,\beta_i\in[a,b]$, $i=1,2,\dots,k$, *takových, že platí*

(i) $a\le\alpha_1<\beta_1\le\alpha_2<\beta_2\le\cdots\le\alpha_k<\beta_k\le b$,

(ii) *funkce* g *je na každém intervalu* $[\alpha_i,\beta_i]$, $i=1,2,\dots,k$, *konstantní,*

(iii) *funkce* f *je ohraničená na množině* $[a,b]\setminus\bigcup_{i=1}^{k}[\alpha_i,\beta_i]$.

D ů k a z . a) Předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a že funkce f není ohraničená na $[a,b]$. Potom podle věty 5.40 existuje také integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}v$, kde $v(x)=\operatorname{var}_a^x g$ pro $x\in[a,b]$. Podle věty 5.36 a lemmatu 5.38 tedy existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\,[v(\sigma_j)-v(\sigma_{j-1})]=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\omega(S_{f\Delta v};[\sigma_{j-1},\sigma_j])<1.$$

Speciálně pro každé $j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})$ musí platit

$$\omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\,[v(\sigma_j)-v(\sigma_{j-1})]<1. \tag{5.45}$$

Není-li f ohraničená na intervalu $[\sigma_{j-1},\sigma_j]$, pak je ovšem

$$\omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)=\sup_{x',x''\in[\sigma_{j-1},\sigma_j]}|f(x')-f(x'')|=\infty$$

a (5.45) může platit jenom tehdy, když bude $0=v(\sigma_j)-v(\sigma_{j-1})=\operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}g$. Podle lemmatu 2.13 to znamená, že funkce g musí být konstantní na intervalu $[\sigma_{j-1},\sigma_j]$. Nyní, nechť $\mathfrak{J}$ je množina všech intervalů $[\sigma_{j-1},\sigma_j]$, na kterých je funkce f neohraničená (a tedy funkce g konstantní), a nechť k je počet prvků této množiny. Důkaz dokončíme, označíme-li krajní body intervalů z $\mathfrak{J}$ symboly α_i,β_i, $i=1,2,\dots,k$, tak, aby byly uspořádány jako v podmínce (i) a současně platilo $\mathfrak{J}=\{[\alpha_i,\beta_i]:i=1,2,\dots,k\}$.

b) Jestliže existuje $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, pak podle věty 5.6 existuje také $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a tvrzení věty plyne z první části důkazu. □

5.64 Poznámka. Protože hodnota integrálu $\int_a^b f \, \mathrm{d} g$ se nezmění, jestliže libovolně pozměníme hodnotu funkce f na intervalech, na kterých je g konstantní, vidíme z věty 5.63, že jestliže integrál $\int_a^b f \, \mathrm{d} g$ existuje, pak vždy můžeme najít funkci $\widetilde{f}$ ohraničenou na $[a, b]$ a takovou, že $\int_a^b f \, \mathrm{d} g = \int_a^b \widetilde{f} \, \mathrm{d} g$.

5.65 Věta. *Jestliže integrál* $\int_a^b f \, \mathrm{d} g$ *existuje pro každou funkci* f *spojitou na* $[a, b]$, *pak* g *má konečnou variaci na* $[a, b]$.

Důkaz se opírá o následující dvě pomocná tvrzení.

Tvrzení 1. *Je-li* $a_n \geq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, *pak existuje posloupnost* $\{c_n\}$ *taková, že platí*

$$c_n > 0 \ \textit{pro všechna}\ n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \to \infty} c_n = 0 \quad \textit{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, a_n = \infty. \tag{5.46}$$

D ů k a z . Posloupnost $\{s_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}$ je neklesající a platí

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \infty. \tag{5.47}$$

Speciálně pro dostatečně velká n $(n \geq n_0)$ bude $s_n > 0$. Můžeme tudíž definovat

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n < n_0, \\ \dfrac{1}{s_n} & \text{pro } n \geq n_0. \end{cases}$$

Zřejmě je $c_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$. Na druhou stranu, pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_0$ máme

$$\sum_{k=n}^{m} c_k \, a_k = \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{s_k} \geq \frac{1}{s_m} \sum_{k=n}^{m} a_k = 1 - \frac{s_{n-1}}{s_m}.$$

Vzhledem k (5.47) pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m_n > n$ takové, že je $\frac{s_{n-1}}{s_{m_n}} < \frac{1}{2}$, tj.

$$\sum_{k=n}^{m_n} c_k \, a_k > \frac{1}{2}.$$

To ovšem znamená, že musí platit (5.46). $\square$

Tvrzení 2. *Nechť* $g:[a,b]\to\mathbb{R},\ x_0\in(a,b]$ *a*

$$\operatorname{var}_x^{x_0} g = \infty \quad \textit{pro každé } \ x\in[a,x_0). \tag{5.48}$$

Potom existuje rostoucí posloupnost $\{x_k\}$ *bodů v* $[a,x_0)$ *taková, že*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \quad \textit{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty}|g(x_{k+1})-g(x_k)| = \infty. \tag{5.49}$$

D ů k a z . $\alpha)$ Nejprve dokážeme, že platí

$$\sup\{\operatorname{var}_y^x g : x\in(y,x_0)\} = \infty \quad \text{pro každé } \ y\in[a,x_0). \tag{5.50}$$

Předpokládejme opak. Nechť tedy existují $M\in[0,\infty)$ a $y\in[a,x_0)$ takové, že

$$\sup\{\operatorname{var}_y^x g : x\in(y,x_0)\} \le M. \tag{5.51}$$

Položme $\widetilde{M} = M+|g(x_0)-g(y)|$. Potom, vzhledem k (5.48), existuje dělení $y=y_0<y_1<\cdots<y_m=x_0$ intervalu $[y,x_0]$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{m}|g(y_j)-g(y_{j-1})| > 3\,\widetilde{M}.$$

Protože je

$$|g(x_0)-g(y_{m-1})| \le |g(x_0)-g(y)|+|g(y)-g(y_{m-1})| \le \widetilde{M},$$

máme

$$\sum_{j=1}^{m-1}|g(y_j)-g(y_{j-1})| > 2\,\widetilde{M},$$

a tedy $\operatorname{var}_y^{y_{m-1}} g > 2\,\widetilde{M}$, což je ve sporu s (5.51). Platí tedy (5.50).

$\beta)$ Zkonstruujeme hledanou posloupnost. Položme $u_1=a$ a zvolme $u_2\in(a,x_0)$ tak, aby platilo $u_2>x_0-1$ a $\operatorname{var}_{u_1}^{u_2} g>1$. Máme-li body $u_1,u_2,\dots,u_\ell\in[a,x_0)$ takové, že platí $u_\ell\in(u_{\ell-1},x_0)\cap(x_0-\dfrac{1}{\ell-1},x_0)$ a $\operatorname{var}_{u_{\ell-1}}^{u_\ell} g>1$, pak najdeme

$u_{\ell+1}$ tak, aby platilo $u_{\ell+1}\in(u_\ell,x_0)\cap(x_0-\frac{1}{\ell},x_0)$ a $\operatorname{var}_{u_\ell}^{u_{\ell+1}} g>1$. Posloupnost $\{u_\ell\}$ je zřejmě rostoucí a

$$\lim_{\ell\to\infty} u_\ell = x_0. \tag{5.52}$$

Podle definice variace, pro každé $\ell\in\mathbb{N}$ existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}^\ell=\{\sigma_0^\ell,\sigma_1^\ell,\dots,\sigma_{m_\ell}^\ell\}$ intervalu $[u_\ell,u_{\ell+1}]$ takové, že platí

$$\sum_{j=1}^{m_\ell} |g(\sigma_j^\ell)-g(\sigma_{j-1}^\ell)|>1.$$

Potom

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{m_\ell}|g(\sigma_j^\ell)-g(\sigma_{j-1}^\ell)|\Big)\ge\sum_{\ell=1}^{\infty}1=\infty. \tag{5.53}$$

Přečíslujme nyní prvky množin $\boldsymbol{\sigma}^\ell$, $\ell\in\mathbb{N}$, do posloupnosti $\{x_k\}$ tak, aby platilo

$$x_{k+1}=\sigma_{j+1}^\ell \quad \text{je-li } x_k=\sigma_j^\ell \quad \text{a} \quad j<m_\ell-1$$

a

$$x_{k+1}=\sigma_0^{\ell+1} \quad \text{je-li } x_k=\sigma_{m_\ell-1}^\ell.$$

Vzhledem k (5.52) a (5.53) má posloupnost $\{x_k\}$ požadované vlastnosti. □

D ů k a z věty 5.65. Vzhledem k větě 5.6 se můžeme omezit na (σ)RS-integrál.

Předpokládejme, že $\operatorname{var}_a^b g=\infty$. Díky Heinově-Borelově větě o konečném pokrytí (viz větu 4.6) a větě 2.11 víme, že funkce $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ má konečnou variaci na $[a,b]$ právě tehdy, když platí

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, x\in(a,b]\ \exists\,\delta_1\in(0,x-a):\ \operatorname{var}_{x-\delta_1}^{x} g<\infty\\ \text{a}\quad &\\ &\forall\, x\in[a,b)\ \exists\,\delta_2\in(0,b-x):\ \operatorname{var}_{x}^{x+\delta_2} g<\infty.\end{aligned}\right\} \tag{5.54}$$

Předpoklad, že $\operatorname{var}_a^b g=\infty$ znamená, že existuje $x_0\in[a,b]$ takové, že pro $x=x_0$ není splněna jedna z podmínek (5.54). Nechť tedy například $x_0\in(a,b]$ je takové, že platí (5.48). Podle tvrzení 2 tedy existuje rostoucí posloupnost $\{x_k\}$ bodů v (a,x_0) taková, že

$$\lim_{k\to\infty} x_k=x_0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty}|g(x_{k+1})-g(x_k)|=\infty.$$

Dále podle tvrzení 1 existuje posloupnost $\{c_k\}$ kladných čísel taková, že platí

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \infty.$$

Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ x < x_1, \ \text{resp. } x \geq x_0, \ \text{resp. } x \in \{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \\ c_k \ \operatorname{sign}(g(x_{k+1}) - g(x_k)) & \text{pro } \ x = \xi_k := \dfrac{x_{k+1} + x_k}{2} \end{cases}$$

a ve zbývajících bodech intervalu $[a,b]$ dodefinujme funkci f lineárně a tak, aby byla spojitá na $[a,b]$. Pro takto definovanou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k)\,[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \infty.$$

Speciálně pro každé $M>0$ existuje $N_M\in\mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=1}^{N_M} f(\xi_k)\,[g(x_{k+1}) - g(x_k)] > M.$$

Pro dané $M>0$ označme

$$\boldsymbol{\sigma}_M = \{a, x_1, x_2, \dots, x_{N_M}, x_{N_M+1}, b\}, \ \ \boldsymbol{\xi}_M = (a, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N_M}, b).$$

Potom je $(\boldsymbol{\sigma}_M, \boldsymbol{\xi}_M) \in \mathscr{T}[a,b]$ a

$$S(\boldsymbol{\sigma}_M, \boldsymbol{\xi}_M) = \sum_{k=1}^{N_M} f(\xi_k)\,[g(x_{k+1}) - g(x_k)] > M.$$

(Připomeňme si, že $f(a)=f(b)=0$.) To ale znamená, že integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ nemůže mít konečnou hodnotu.

Není-li splněna druhá z podmínek v (5.54), tj. existuje $x_0\in[a,b)$ takové, že $\operatorname{var}_{x_0}^{x} g=\infty$ pro každé $x\in(x_0,b]$, je třeba místo tvrzení 2 použít jeho vhodnou úpravu. □

5.66 Cvičení. Zformulujte a dokažte analogii tvrzení 2 potřebnou k dokončení důkazu věty 5.65, jestliže existuje $x_0\in[a,b)$ takové, že $\operatorname{var}_{x_0}^{x} g=\infty$ pro každé $x\in(x_0,b]$.

5.67 Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{G}[a,b]$ *a nechť integrál* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *existuje pro každou konečnou skokovou funkci* g. *Potom* f *je spojitá na* $[a,b]$.

D ů k a z . Opět se můžeme omezit na (σ)RS-integrál. Nechť $x_0 \in (a,b)$, $c,\ d \in \mathbb{R}$, $c+d \neq 0$ a nechť funkce $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je definována podobně jako v poznámce 5.24, tj.

$$g(x) = c\,\chi_{[a,x_0)}(x) + \frac{c+d}{2}\,\chi_{[x_0]}(x) + d\,\chi_{(x_0,b]}(x) \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Podle poznámky 5.24 může integrál $(\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ existovat pouze tehdy, když $f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+)$. Podobně bychom dokázali, že f musí být spojitá i v bodě a zprava a v bodě b zleva. □

5.9 Věty o střední hodnotě

Věty tohoto odstavce platí ve stejném znění pro oba typy RS-integrálu.

5.68 Věta (O STŘEDNÍ HODNOTĚ)**.** *Je-li* f *spojitá na* $[a,b]$ *a* g *neklesající na* $[a,b]$, *pak existuje* $x_0 \in [a,b]$ *takové, že*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = f(x_0)\,[g(b) - g(a)]. \tag{5.55}$$

D ů k a z . Věta 5.54 zaručuje existenci integrálu $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ v obou smyslech. Protože je g neklesající na $[a,b]$, pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}\,[a,b]$ platí

$$m\,[g(b) - g(a)] \leq S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \leq M\,[g(b) - g(a)],$$

kde $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ a $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$. Podobně jako při důkazu lemmatu 5.10 plyne odtud, že platí také

$$m\,[g(b) - g(a)] \leq \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \leq M\,[g(b) - g(a)].$$

Dále protože f je spojitá, nabývá všech hodnot z intervalu $[m,M]$. Speciálně existuje $x_0 \in [a,b]$ takové, že platí (5.55). □

5.69 Věta (DRUHÁ O STŘEDNÍ HODNOTĚ)**.** *Je-li* f *spojitá na* $[a,b]$ *a* g *neklesající na* $[a,b]$, *pak existuje* $x_0 \in [a,b]$ *takové, že*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\,\mathrm{d}\,x = g(a) \int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b) \int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.56}$$

Důkaz. Funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$. Položme

$$h(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Potom podle věty o substituci (věta 5.45 a důsledek 5.46), věty o integraci per-partes (věta 5.50) a věty o střední hodnotě (věta 5.68) existuje $x_0 \in [a,b]$ tak, že

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, g(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int_a^b g\,\mathrm{d}h = h(b)\,g(b) - \int_a^b h\,\mathrm{d}\,g\\ &= \Big(\int_a^b f\,\mathrm{d}x\Big)\, g(b) - \Big(\int_a^{x_0} f\,\mathrm{d}x\Big)\,[g(b)-g(a)]\\ &= g(a)\int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Platí tedy (5.56). □

5.10 Další integrály Stieltjesova typu

Buďte dány funkce $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$. Položme

$$S_M(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \frac{f(\sigma_j)+f(\sigma_{j-1})}{2}\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})],$$

$$S_{CL}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\sigma_{j-1})\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})],$$

$$S_{CR}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\sigma_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})].$$

Dosadíme-li do definice 5.3 $S_M(\boldsymbol{\sigma})$, resp. $S_{CL}(\boldsymbol{\sigma})$, resp. $S_{CR}(\boldsymbol{\sigma})$ místo $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$, dostaneme po řadě integrály *středový* resp. *levý Cauchyův*, resp. *pravý Cauchyův*. Podle způsobu limitního procesu se ovšem rozlišují (δ) nebo (σ) varianty. Je zřejmé, že všechny zobecňují příslušné RS-integrály, pokud jde o třídy integrovatelných funkcí. Ne vždy však zůstanou zachovány všechny vlastnosti RS-integrálů. Na příklad pro středový integrál neplatí obdoba věty 5.45 o substituci. Více podrobností lze najít v odstavci II.19 monografie [11] T. H. Hildebrandta.

5.11 Cvičení na závěr

Není-li uvedeno jinak, v následujících cvičeních proveďte diskusi o existenci, případně určete hodnotu pro každý typ Stieltjesova integrálu z této kapitoly, tj pro integrály (δ)RS, (σ)RS, středový, levý Cauchyův a pravý Cauchyův.

(i) Nechť $g(x)=\sin x$ pro $x\in[0,\pi]$. Určete hodnotu integrálu $\displaystyle\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}[\,g(x)\,]$.

(ii) Nechť $g(x)=\exp(|x|)$ pro $x\in[-1,1]$. Určete hodnotu integrálu $\displaystyle(\delta)\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}[\,g(x)\,]$.

(iii) Nechť $g(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x\in[0,\frac12),\\ c & \text{pro } x=\frac12,\\ d & \text{pro } x\in(\frac12,1].\end{cases}$

Zkoumejte existenci a hodnotu integrálu $\displaystyle\int_0^1 f\,\mathrm{d}g$ pro různé funkce f v závislosti na c,d.

(iv) Nechť $f(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x<0,\\ 1 & \text{pro } x\ge 0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x\le 0,\\ 1 & \text{pro } x>0.\end{cases}$

Zkoumejte existenci a hodnotu integrálů

$$\int_{-1}^{1} g\,\mathrm{d}f,\ \int_{-1}^{0} g\,\mathrm{d}f,\ \int_{0}^{1} g\,\mathrm{d}f,\ \int_{-1}^{1} g\,\mathrm{d}g,\ \int_{-1}^{0} g\,\mathrm{d}g,\ \int_{0}^{1} g\,\mathrm{d}g.$$

(v) Určete hodnotu integrálu $\displaystyle(\delta)\int_0^1 x^2\,[\,g(x)\,]$, kde $g(x)=\begin{cases}x & \text{pro } x\in[0,\frac12],\\ \frac1x & \text{pro } x\in(\frac12,1].\end{cases}$

(vi) Definujte exaktně křivkový integrál prvního druhu zmíněný v odstavci 1.2 a formulujte jeho základní vlastnosti, které plynou z vět obsažených v této kapitole.

V této kapitole jsme čerpali z kapitoly II Hildebrandtovy monografie [11], ve které je možno najít i další informace.