Kapitola 8

Zobecněné lineární diferenciální rovnice

8.1 Úvod

Všechny integrály v této kapitole jsou KS-integrály, jejichž definice je rozšířena ve smyslu odstavce 6.8 na maticové funkce (tj. funkce zobrazující interval $[a,b]$ do prostoru matic). Jak jsme již v odstavci 6.8 vysvětlili, všechny vlastnosti KS-integrálu i obou typů RS-integrálu, které jsme doposud dokázali pro skalární funkce, platí i pro funkce vektorové či maticové, pokud se v příslušných formulích nezmění pořadí, v jakém se tam maticové funkce objevují. V důkazech se tedy budeme pro potřebné vlastnosti funkcí a integrálů odvolávat na odpovídající tvrzení pro skalární funkce z kapitol 1–6.

Následující definice zavádí prostory vektorových, resp. maticových funkcí, se kterými budeme v této kapitole pracovat.

8.1 Definice. (i) $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je Banachův prostor funkcí $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, které jsou regulované na $[a,b]$. Norma na $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je definována předpisem $\|f\|=\sup\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|$ pro $f\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$, kde $|f(t)|$ je norma vektoru $f(t)$ v $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ je Banachův prostor funkcí $F:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, které mají konečnou variaci na $[a,b]$. Norma na $\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ je definována předpisem $\|F\|_{\mathbb{BV}}=|F(a)|+\operatorname{var}_a^b F$ pro $F\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, kde $\operatorname{var}_a^b F$ se definuje jako v odstavci 6.8 a $|F(a)|$ je norma matice $F(a)$ v $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

Podobně se definují prostory $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{C}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ a $\mathbb{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a normy na nich. Množinu funkcí $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ s derivací spojitou na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathbb{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. (Jako obvykle, definujeme $f'(a)=f'(a+)$ a $f'(b)=f'(b-)$ pro $f\in\mathbb{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$.)

Tématem této kapitoly budou rovnice tvaru

$$x(t) - x(s) - \int_s^t \mathrm{d}\, A\, x = f(t) - f(s), \tag{8.1}$$

kde $t,\ s \in [a,b],\ A$ je $n \times n$-maticová funkce, f je n-vektorová funkce a hledáme n-vektorovou funkci x vyhovující následující definici.

8.2 Definice. Funkce $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je řešením rovnice (8.1) na intervalu $[a,b]$, jestliže existuje integrál $\int_a^b \mathrm{d}Ax$ a rovnost (8.1) je splněna pro libovolná $t, s \in [a,b]$.

Rovnice (8.1) se nazývá *zobecněná lineární diferenciální rovnice*.

8.3 Poznámka. Buď dáno $t_0 \in [a,b]$ a nechť x splňuje rovnost

$$x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t \mathrm{d}\, A\, x = f(t) - f(t_0) \tag{8.2}$$

pro $t \in [a,b]$. Potom pro libovolné $s \in [a,b]$ máme

$$x(s) = x(t_0) + \int_{t_0}^s \mathrm{d}\, A\, x + f(s) - f(t_0).$$

Odečteme-li tuto rovnost od (8.2), zjistíme, že (8.1) platí pro libovolná $t, s \in [a,b]$, tj. x je řešení rovnice (8.1). Funkce $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je tedy řešením rovnice (8.1) na $[a,b]$ právě tehdy, když pro nějaké pevné $t_0 \in [a,b]$ splňuje rovnost (8.2) na $[a,b]$.

8.2 Diferenciální rovnice s impulsy

Motivací pro studium zobecněných diferenciálních rovnic jsou mj. úlohy s impulsy. V řadě praktických úloh se totiž potkáme s perturbacemi, jejichž doba působení je sice zanedbatelná v porovnání s dobou celého procesu, které ale nicméně podstatně ovlivní studovaný proces. Zpravidla vhodným modelem pro popis takovýchto procesů jsou *diferenciální rovnice s impulsy*, tj. diferenciální rovnice, jejichž řešení nemusí být hladká, ba ani spojitá.

Zdrojem modelů s impulsy je zejména fyzika (např. popis hodinových mechanismů, oscilace elektromechanických systémů, vyzařování elektrických, resp.

magnetických vln v prostředí s rychle se měnícími parametry, stabilizace Kapicova kyvadla, optimální regulace metodou bang-bang), ale také medicína (distribuce léčivých látek v těle, strategie impulsní vakcinace v epidemiologických modelech, studium účinku hromadného očkování proti spalničkám), populační dynamika (modely s rychlými změnami počtu některých populací) či ekonomie (modely trhu, které připouštějí prudké změny cen).

Nejjednodušší idealizací impulsních procesů jsou procesy popsané lineárními diferenciálními rovnicemi, na které v konečném počtu pevně daných bodů působí lineární impulsy.

Předpokládejme, že

$$\left.\begin{array}{l} r\in\mathbb{N},\ \ a<\tau_1<\ \ldots<\tau_r<b, \\ P\in\mathbb{C}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)),\ \ q\in\mathbb{C}([a,b],\mathbb{R}^n), \\ B_k\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n),\ \ d_k\in\mathbb{R}^n\ \text{ pro } k=1,2,\ldots,r. \end{array}\right\} \tag{8.3}$$

(V této kapitole budou symboly typu B_k, resp. d_k značit také matice, resp. vektory.)

Označme $D=\{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_r\}$, $\tau_0=a$, $\tau_{r+1}=b$. Pro každou regulovanou funkci $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ definujme

$$\left.\begin{array}{l} x_{[1]}(t)=x(t)\quad \text{pro } \ t\in[a,\tau_1] \\ \text{a} \\ x_{[k]}(t)=\begin{cases} x(\tau_{k-1}+) & \text{když } \ t=\tau_{k-1}, \\ x(t) & \text{když } \ t\in(\tau_{k-1},\tau_k] \end{cases} \quad \text{pro } \ k=2,3,\ldots,r+1. \end{array}\right\} \tag{8.4}$$

Lineární impulsní úloha je pak tvořena lineární diferenciální rovnicí

$$x'=P(t)\,x+q(t) \tag{8.5}$$

a lineárními impulsními podmínkami

$$\Delta^+x(\tau_k)=B_k\,x(\tau_k)+d_k,\qquad k=1,2,\ldots,r, \tag{8.6}$$

přičemž řešení jsou určena podle následující definice.

8.4 Definice. Řekneme, že funkce $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ je řešením úlohy (8.5), (8.6), jestliže

$$x_{[k]}\in\mathbb{C}^1([\tau_{k-1},\tau_k]) \quad \text{pro každé } k=1,2,\dots,r+1, \tag{8.7}$$

x vyhovuje impulsním podmínkám (8.6) a splňuje diferenciální rovnost

$$x'(t)=P(t)\,x(t)+q(t) \quad \text{pro } t\in[a,b]\setminus D. \tag{8.8}$$

8.5 Poznámka. Povšimněme si, že řešení úlohy (8.5), (8.6) patří vždy do prostoru $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Ukážeme nyní, že úlohu (8.5), (8.6) můžeme ekvivalentně přeformulovat jako zobecněnou lineární diferenciální rovnici tvaru (8.2).

Předpokládejme zprvu, že $r=1$, a nechť $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ je řešení impulsní úlohy (8.5), (8.6). Integrací rovnosti (8.8) dostaneme vztahy

$$x(t)=x(a)+\int_a^t P(s)\,x(s)\,\mathrm{d}\,s+\int_a^t q(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{pro } t\in[a,\tau_1]$$

a

$$x(t)=x(\tau_1+)+\int_{\tau_1}^t P(s)\,x(s)\,\mathrm{d}\,s+\int_{\tau_1}^t q(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{pro } t\in(\tau_1,b].$$

Dosazením z podmínek (8.6) (kde $k=r=1$) do druhého vztahu pak dostaneme pro $t\in(\tau_1,b]$

$$\begin{aligned} x(t)&=x(\tau_1)+B_1\,x(\tau_1)+d_1+\int_{\tau_1}^t P(s)\,x(s)\,\mathrm{d}\,s+\int_{\tau_1}^t q(s)\,\mathrm{d}s\\ &=x(a)+\int_a^t P(s)\,x(s)\,\mathrm{d}\,s+B_1\,x(\tau_1)+\int_a^t q(s)\,\mathrm{d}s+d_1, \end{aligned}$$

a tedy

$$\left.\begin{aligned} x(t)=x(a)+\int_a^t P(s)\,x(s)\,\mathrm{d}\,s+\chi_{(\tau_1,b]}(t)\,B_1\,x(\tau_1)\\ +\int_a^t q(s)\,\mathrm{d}s+\chi_{(\tau_1,b]}(t)\,d_1 \end{aligned}\right\} \text{pro } t\in[a,b]. \tag{8.9}$$

Položme

$$A(t)=\int_a^t P(s)\,\mathrm{d}\,s+\chi_{(\tau_1,b]}(t)\,B_1 \quad \text{a} \quad f(t)=\int_a^t q(s)\,\mathrm{d}\,s+\chi_{(\tau_1,b]}(t)\,d_1$$

pro $t\in[a,b]$. Pak $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $f\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a $A(t-)=A(t)$ a $f(t-)=f(t)$ pro $t\in(a,b]$. Dále

$$A(t+)=\int_a^t P(s)\,\mathrm{d}\,s+\chi_{[\tau_1,b]}(t)\,B_1 \quad \text{a} \quad f(t+)=\int_a^t q(s)\,\mathrm{d}\,s+\chi_{[\tau_1,b]}(t)\,d_1$$

neboli

$$\Delta^+A(t)=\chi_{[\tau_1]}(t)\,B_1 \quad \text{a} \quad \Delta^+f(t)=\chi_{[\tau_1]}(t)\,d_1 \quad \text{pro } t\in[a,b).$$

Podle věty o substituci 6.47 a formule (6.11) z příkladů 6.15 (ii) (viz též příklady 6.44) platí

$$\int_a^t \mathrm{d}\,A\,x=\int_a^t P(s)\,x(s)\,\mathrm{d}\,s+\chi_{(\tau_1,b]}(t)\,B_1\,x(\tau_1)$$

a

$$f(t)-f(a)=\int_a^t q(s)\,\mathrm{d}s+\chi_{(\tau_1,b]}(t)\,d_1 \text{ pro } t\in[a,b]$$

a $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$. Dosazením do (8.9) zjistíme, že x splňuje na $[a,b]$ rovnost (8.2), kde $t_0=a$.

Obráceně, jestliže $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ splňuje (8.2) na $[a,b]$, pak podle výše uvedeného platí opět (8.9). Odtud vidíme, že definujeme-li funkce $x_{[k]}$ jako v (8.4), bude platit (8.7) a (8.8). Navíc, podle Hakeovy věty (viz též cvičení 6.43) je $x(t-)=x(t)$ pro každé $t\in(a,b]$ a

$$\begin{aligned}x(t+)&=x(a)+\lim_{s\to t+}\int_a^s \mathrm{d}\,A\,x+f(t+)-f(a)\\&=x(a)+\int_a^t \mathrm{d}\,A\,x+f(t)-f(a)+\Delta^+A(t)\,x(t)+\Delta^+f(t)\\&=x(t)+\chi_{[\tau_1]}(t)\left(B_1\,x(t)+d_1\right) \quad \text{pro každé } t\in[a,b].\end{aligned}$$

Speciálně dosazením $t=\tau_1$ zjistíme, že x splňuje impulsní podmínku (8.6), kde $k=r=1.$

Vzhledem k poznámce 8.3 je tedy pro $r=1$ úloha (8.5), (8.6) ekvivalentní se zobecněnou diferenciální rovnicí (8.1).

V obecném případě $r\in\mathbb{N},$ definujeme

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= \int_a^t P(s)\,\mathrm{d}\,s + \sum_{k=1}^r \chi_{(\tau_k,b]}(t)\,B_k,\\ f(t) &= \int_a^t q(s)\,\mathrm{d}\,s + \sum_{k=1}^r \chi_{(\tau_k,b]}(t)\,d_k, \end{aligned}\right\} \quad \text{pro } t\in[a,b]. \tag{8.10}$$

Indukcí snadno ověříme následující tvrzení.

8.6 Věta. *Předpokládejme* (8.3) *a* (8.10). *Potom impulsní úloha* (8.5), (8.6) *je ekvivalentní se zobecněnou diferenciální rovnicí* (8.2)*, tj.* $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ *je řešením úlohy* (8.5), (8.6) *na intervalu* $[a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když je řešením rovnice* (8.1) *na intervalu* $[a,b]$. □

8.3 Lineární operátory

Připomeňme nyní stručně několik základních pojmů z funkcionální analýzy, které budeme nadále potřebovat. Podrobnější informaci lze najít ve většině učebnic funkcionální analýzy (viz např. [3], [16], [32], [41]). Základní přehled je obsažen také v úvodní části monografie [55].

Nechť $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ jsou Banachovy prostory. Zobrazení $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ (T zobrazuje $\mathbb{X}$ do $\mathbb{Y}$) je *spojitý operátor*, jestliže

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_{\mathbb{X}}=0 \implies \lim_{n\to\infty}\|T(x_n)-T(x)\|_{\mathbb{Y}}=0,$$

kde $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ je norma na $\mathbb{X}$ a $\|\cdot\|_{\mathbb{Y}}$ je norma na $\mathbb{Y}$. Operátor $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ se nazývá *lineární*, jestliže platí

$$T(c_1\,x_2+c_2\,x_2)=c_1\,T(x_1)+c_2\,T(x_2) \;\text{ pro } x_1,x_2\in\mathbb{X} \;\text{ a }\; c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Dále řekneme, že lineární operátor T je *ohraničený*, existuje-li číslo $K\in[0,\infty)$ takové, že platí $\|T(x)\|_{\mathbb{Y}}\le K\,\|x\|_{\mathbb{X}}$ pro každé $x\in\mathbb{X}$.

Je-li T lineární operátor, píšeme, jak je zvykem, $T\,x$ místo $T(x)$. Je známo, že lineární operátor $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ je spojitý právě tehdy, když je ohraničený.

Množinu ohraničených lineárních zobrazení prostoru $\mathbb{X}$ do prostoru $\mathbb{Y}$ značíme $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Je-li $\mathbb{X}=\mathbb{Y}$, píšeme $\mathscr{L}(\mathbb{X})$ místo $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{X})$. Na $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ jsou zřejmým způsobem zavedeny operace sčítání operátorů a násobení operátorů reálným číslem a $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ je pak Banachův prostor vzhledem k normě

$$\|L\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})}=\sup\big\{\|L\,x\|_{\mathbb{Y}}:x\in\mathbb{X}\ \text{ a }\ \|x\|_{\mathbb{X}}\le 1\big\}.$$

Je známo, že prostor $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ je ekvivalentní s prostorem matic typu $n\times n$.

Konečně, řekneme, že $L\in\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ je *kompaktní*, jestliže zobrazuje každou množinu ohraničenou v $\mathbb{X}$ na množinu relativně kompaktní v $\mathbb{Y}$, tj. jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}$ ohraničenou v $\mathbb{X}$ její obraz $\{L\,x_n\}\subset\mathbb{Y}$ obsahuje podposloupnost konvergentní v $\mathbb{Y}$. Je známo, že každý kompaktní lineární operátor je současně spojitý.

V důkazech hlavních výsledků této kapitoly využijeme následující dvě tvrzení. První z nich je zobecněním jedné z Fredholmových vět známých z teorie integrálních rovnic. Jeho důkaz je obsažen např. v monografiích N. Dunforda a J. T. Schwartze [5], M. Schechtera [44] nebo ve skriptech J. Lukeše [32].

8.7 Věta (FREDHOLMOVA VĚTA O ALTERNATIVĚ)**.** *Buď $\mathbb{X}$ Banachův prostor a nechť operátor $L\in\mathscr{L}(\mathbb{X})$ je kompaktní. Potom operátorová rovnice*

$$x-L\,x=g \tag{8.11}$$

má jediné řešení pro každé $g\in\mathbb{X}$ tehdy a jen tehdy, když příslušná homogenní rovnice

$$x-L\,x=0 \tag{8.12}$$

má pouze triviální řešení $x=0\in\mathbb{X}$.

Druhé tvrzení je známo také z elementární teorie matic. Připomeňme si zde jeho obecnou podobu převzatou z monografie [58] (viz Lemma 4.1-C).

8.8 Lemma. *Nechť $\mathbb{X}$ je Banachův prostor, $T\in\mathscr{L}(\mathbb{X})$ a $\|T\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X})}<1$. Potom existuje ohraničený inverzní operátor $\big[I-T\big]^{-1}$ k operátoru $\big[I-T\big]$ a platí nerovnost*

$$\Big\|\big[I-T\big]^{-1}\Big\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X})}\le\frac{1}{1-\|T\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X})}}.$$

8.4 Existence řešení zobecněných lineárních diferenciálních rovnic

Studium zobecněných lineárních diferenciálních rovnic zahájíme prostým pozorováním vycházejícím ze známých vlastností KS-integrálu.

8.9 Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a* $f \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$. *Potom každé řešení* x *rovnice* (8.1) *na* $[a,b]$ *je regulované na* $[a,b]$ *a platí pro něj vztahy*

$$\left.\begin{aligned} \Delta^- x(t) &= \Delta^- A(t)\; x(t) + \Delta^- f(t) \quad \textit{když}\ \ t \in (a,b], \\ \Delta^+ x(s) &= \Delta^+ A(s)\, x(s) + \Delta^+ f(s) \quad \textit{když}\ \ s \in [a,b). \end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

D ů k a z plyne z důsledku 6.41 Saksova-Henstockova lemmatu. □

Vzhledem k větě 8.9 je tedy vhodné hledat řešení zobecněných lineárních diferenciálních rovnic ve třídě $\mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$.

Analogiemi počátečních úloh pro lineární obyčejné diferenciální rovnice jsou úlohy

$$x(t) - \widetilde{x} - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\, A\, x = f(t) - f(t_0), \tag{8.14}$$

kde bod $t_0 \in [a,b]$ a vektor $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ jsou dány předem.

8.10 Definice. Řešením počáteční úlohy (8.14) na intervalu $[a,b]$ rozumíme funkci $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, pro kterou je splněna rovnost (8.14) pro každé $t \in [a,b]$.

8.11 Poznámka. Vzhledem k poznámce 8.3 je zřejmé, že funkce x je řešením počáteční úlohy (8.14) na $[a,b]$ právě tehdy, když je řešením rovnice (8.1) na $[a,b]$ a platí $x(t_0) = \widetilde{x}$.

Každé funkci $x \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$ a bodu $t_0 \in [a,b]$ přiřaďme funkci $\mathscr{A}_{t_0} x$ předpisem

$$(\mathscr{A}_{t_0} x)(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\, A\, x \quad \text{pro} \ \ t \in [a,b]. \tag{8.15}$$

Podle důsledku 6.41 jsou funkce $\mathscr{A}_{t_0} x$ regulované na $[a,b]$. Zobrazení

$$\mathscr{A}_{t_0} : x \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n) \to \mathscr{A}_{t_0} x \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$$

je zřejmě lineární a dále podle věty 6.18 platí

$$\|\mathscr{A}_{t_0}x\| \le \big(\operatorname{var}_a^b A\big)\,\|x\| \ \text{ pro každé } x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n).$$

Pro každé $t_0 \in [a,b]$ je tedy $\mathscr{A}_{t_0}$ spojitý lineární operátor na $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$, tj. $\mathscr{A}_{t_0} \in \mathscr{L}(\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n))$.

Dokážeme nyní, že současně je předpisem (8.15) definován spojitý lineární operátor zobrazující $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ do $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

8.12 Lemma. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0 \in [a,b]$ *a nechť funkce* $\mathscr{A}_{t_0}x$ *je pro* $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *definována vztahem* (8.15). *Potom* $\mathscr{A}_{t_0}x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *pro každé* $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *a operátor*

$$x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathscr{A}_{t_0}x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$$

je ohraničený.

D ů k a z . Buď $\boldsymbol{\sigma}$ libovolné dělení intervalu $[a,b]$. Podle věty 6.18 pro každé $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ máme

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |(\mathscr{A}_{t_0}x)(\sigma_j) - (\mathscr{A}_{t_0}x)(\sigma_{j-1})| = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big| \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \mathrm{d}\,A\,x \Big|$$
$$\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(\operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} A\big)\,\|x\| = \big(\operatorname{var}_a^b A\big)\,\|x\|$$

a

$$|(\mathscr{A}_{t_0}x)(a)| = \Big| \int_{t_0}^{a} \mathrm{d}\,A\,x \Big| \le \big(\operatorname{var}_a^b A\big)\,\|x\|.$$

Tudíž $\mathscr{A}_{t_0}x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a

$$\|\mathscr{A}_{t_0}x\|_{\mathbb{BV}} = |(\mathscr{A}_{t_0}x)(a)| + \operatorname{var}_a^b(\mathscr{A}_{t_0}x) \le 2\,\big(\operatorname{var}_a^b A\big)\,\|x\|$$

pro každé $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$. □

Pomocí operátoru $\mathscr{A}_{t_0}$ z (8.15) můžeme přepsat počáteční úlohu (8.14) jako operátorovou rovnici

$$x - \mathscr{A}_{t_0}x = g, \quad \text{kde } g = \widetilde{x} + f - f(t_0).$$

Protože nemáme k dispozici prostředky postačující k důkazu kompaktnosti operátoru $\mathscr{A}\in\mathscr{L}(\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n))$, nemůžeme přímo aplikovat Fredholmovu větu (věta 8.7) a musíme postupovat tak trochu oklikou. V následující větě ukážeme pomocí Hellyovy věty a Osgoodovy věty, že operátor $\mathscr{A}_{t_0}$ generuje kompaktní zobrazení prostoru $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ do sebe.

8.13 Věta. *Nechť* $t_0\in[a,b]$ *a* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$. *Položme* $L\,x=\mathscr{A}_{t_0}x$ *pro* $x\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$. *Potom* L *je kompaktní lineární operátor na* $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

D ů k a z. Protože je $\|x\|\le\|x\|_{\mathbb{BV}}$ pro každé $x\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$, plyne z lemmatu 8.12, že $L\in\mathscr{L}(\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n))$.

Dokážeme, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$ ohraničenou v $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ její obraz $\{L\,x_n\}\subset\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ obsahuje podposloupnost, která je konvergentní v $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Nechť jsou tedy posloupnost $\{x_n\}\subset\mathbb{BV}[a,b]$ a číslo $\varkappa\in[0,\infty)$ takové, že $\|x_n\|_{\mathbb{BV}}\le\varkappa<\infty$ pro každé $n\in\mathbb{N}$. Podle Hellyovy věty (věta 2.46) existují funkce $x\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a rostoucí podposloupnost $\{n_k\}\subset\mathbb{N}$ takové, že

$$\|x\|_{\mathbb{BV}}\le 2\,\varkappa \quad\text{a}\quad \lim_{k\to\infty}x_{n_k}(t)=x(t)\quad\text{pro každé } t\in[a,b].$$

Označme $z_k(t)=x_{n_k}(t)-x(t)$ a pro $k\in\mathbb{N}$ a $t\in[a,b]$. Potom

$$|z_k(t)|\le 4\,\varkappa \quad\text{a}\quad \lim_{k\to\infty}z_k(t)=0\quad\text{pro } k\in\mathbb{N} \text{ a } t\in[a,b].$$

Vzhledem k tomu, že integrály $\displaystyle\int_c^d \mathrm{d}\,A\,z_k$ a $\displaystyle\int_c^d \mathrm{d}\,[\operatorname{var}_a^s A]\,|z_k(s)|$ existují pro libovolná $c,d\in[a,b]$ a $k\in\mathbb{N}$, věta 6.18 zaručuje, že platí

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}|(L\,z_k)(\sigma_j)-(L\,z_k)(\sigma_{j-1})|=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\Big|\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\mathrm{d}\,A\,z_k\Big|$$
$$\le\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\mathrm{d}\big[\operatorname{var}_a^s A\big]\,|z_k(s)|\le\int_a^b\mathrm{d}\big[\operatorname{var}_a^s A\big]\,|z_k(s)|$$

pro libovolná $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ a $k\in\mathbb{N}$. Máme tedy

$$\operatorname{var}_a^b\,(L\,z_k)\le\int_a^b\mathrm{d}\big[\operatorname{var}_a^s A\big]\,|z_k(s)|\quad\text{pro } k\in\mathbb{N}.$$

Podle věty 6.51 je ovšem

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b \mathrm{d}\big[\operatorname{var}_a^s A\big]\,|z_k(s)| = 0,$$

a tudíž také

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{var}_a^b \big(L\,x_{n_k} - L\,x\big) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{var}_a^b (L\,z_k) = 0.$$

Podobně

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \big|\big(L\,x_{n_k}(a) - L\,x(a)\big)\big| &= \lim_{k\to\infty} |(L\,z_k)(a)| = \lim_{k\to\infty} \Big|\int_{t_0}^a \mathrm{d}\,A\,z_k\Big| \\ &\le \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^a \big[\operatorname{var}_a^s A\big]\,|z_k(s)| = 0.\end{aligned}$$

Věta je dokázána. □

Následující tvrzení je důsledkem věty 8.7 a věty 8.13.

8.14 Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a* $t_0\in[a,b]$. *Potom počáteční úloha*

$$x(t) - \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,A\,x = g(t) \tag{8.16}$$

má pro každou funkci $g\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *jediné řešení na* $[a,b]$ *právě tehdy, když odpovídající homogenní úloha*

$$x(t) - \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,A\,x = 0 \tag{8.17}$$

má na $[a,b]$ *pouze triviální řešení* $x\equiv 0$.

D ů k a z . Rovnice (8.16) je ekvivalentní s operátorovou rovnicí $x - L\,x = g$, kde $L\,x = \mathscr{A}_{t_0}\,x$ pro $x\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$, tj.

$$(L\,x)(t) = \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,A\,x \quad \text{pro } x\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n) \text{ a } t\in[a,b].$$

Podle věty 8.13 je L lineární kompaktní operátor na $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$. K dokončení důkazu věty využijeme větu 8.7. □

Předpokládejme nyní, že $\tau \in (t_0, b]$ a funkce $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ splňuje rovnost (8.14) na intervalu $[t_0,\tau)$. Zřejmě je $x(t_0)=\widetilde{x}$. Pomocí Hakeovy věty (věta 6.42, viz též příklady 6.44 a cvičení 6.45) snadno ověříme, že platí

$$\begin{aligned}
x(\tau-) &= \widetilde{x} + \lim_{s\to\tau-} \int_{t_0}^{s} \mathrm{d}\,A\,x + \big(f(\tau-) - f(t_0)\big)\\
&= \widetilde{x} + \int_{t_0}^{\tau} \mathrm{d}\,A\,x + f(\tau) - f(t_0) - \lim_{s\to\tau-} \int_{s}^{\tau} \mathrm{d}\,A\,x - \Delta^- f(\tau)\\
&= \widetilde{x} + \int_{t_0}^{\tau} \mathrm{d}\,A\,x + f(\tau) - f(t_0) - \Delta^- A(\tau)\,x(\tau) - \Delta^- f(\tau).
\end{aligned}$$

Má-li tedy funkce x splňovat (8.14) také v bodě τ, musí hodnota $x(\tau)$ vyhovovat rovnici

$$\big[I - \Delta^- A(\tau)\big]\,x(\tau) = x(\tau-) + \Delta^- f(\tau), \tag{8.18}$$

kde I značí jednotkovou matici typu $n\times n$ (viz Úmluvy a označení (xiv)). Odtud je zřejmé, že řešení počáteční úlohy (8.14) na intervalu $[t_0,\tau)$ bude možno jednoznačným způsobem prodloužit do bodu τ, jestliže bude platit

$$\det\big[I - \Delta^- A(\tau)\big] \neq 0. \tag{8.19}$$

Podobně jako výše můžeme usoudit, že funkce $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ splňující (8.14) na intervalu $(\tau, t_0]$, kde $\tau \in [a,t_0)$, splňuje (8.14) také v bodě τ tehdy a jen tehdy, když platí

$$\big[I + \Delta^+ A(\tau)\big]\,x(\tau) = x(\tau+) - \Delta^+ f(\tau), \tag{8.20}$$

a k tomu stačí, aby platilo

$$\det\big[I + \Delta^+ A(\tau)\big] \neq 0. \tag{8.21}$$

(Rozmyslete si detaily!) Můžeme tedy očekávat, že podmínky (8.19) a (8.21) jsou podstatné pro existenci řešení úlohy (8.14).

8.15 Lemma. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a* $t_0 \in [a,b]$. *Potom úloha* (8.16) *má jediné řešení pro každou funkci* $g \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *tehdy a jen tehdy, když*

$$\det\big[I - \Delta^- A(t)\big] \neq 0 \quad \textit{pro každé } t \in (t_0, b] \tag{8.22}$$

a

$$\det\big[I + \Delta^+ A(s)\big] \neq 0 \quad \textit{pro každé } s \in [a, t_0). \tag{8.23}$$

(*Zde* $(t_0,b]=\emptyset$, *když* $t_0=b$, *a* $[a,t_0)=\emptyset$, *když* $t_0=a$.)

D ů k a z . a) Předpokládejme, že $t_0 \in [a,b)$, $g \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$, A splňuje (8.22) a (8.23) a x splňuje (8.17) na $[a,b]$. Vzhledem k poznámce 8.3 je x řešením rovnice (8.1) na $[a,b]$, přičemž $x(t_0)=0$. Podle věty 8.9 je x regulovaná na $[a,b]$ a z druhé rovnice v (8.13) plyne, že platí $\Delta^+ x(t_0) = \Delta^+ A(t_0)\, x(t_0) = 0$, tj. $x(t_0+) = 0$.

Označme $\alpha(t) = \operatorname{var}_{t_0}^t A$ pro $t \in [t_0, b]$. Funkce α je neklesající na intervalu $[t_0, b]$. Existuje tedy konečná limita $\alpha(t_0+)$ a můžeme zvolit $\delta \in (0, b-t_0)$ tak, aby platilo $0 \le \alpha(t_0+\delta) - \alpha(t_0+) < 1/2$. Pro každé $t \in [t_0, t_0+\delta]$ odtud pomocí vět 6.18 a 6.42 odvodíme nerovnosti

$$
\begin{aligned}
|x(t)| &\le \int_{t_0}^t |x|\,\mathrm{d}\,\alpha = \Delta^+\alpha(t_0)\,|x(t_0)| + \lim_{\tau\to t_0+} \int_\tau^t |x|\,\mathrm{d}\,\alpha \\
&= \lim_{\tau\to t_0+} \int_\tau^t |x|\,\mathrm{d}\,\alpha \le \big[\alpha(t_0+\delta) - \alpha(t_0+)\big] \Big(\sup_{t\in[t_0,t_0+\delta]} |x(t)| \Big) \\
&\le \frac{1}{2} \Big(\sup_{t\in[t_0,t_0+\delta]} |x(t)| \Big).
\end{aligned}
$$

Tudíž $\Big(\sup_{t\in[t_0,t_0+\delta]} |x(t)| \Big) \le \frac{1}{2} \Big(\sup_{t\in[t_0,t_0+\delta]} |x(t)| \Big)$. To je ale možné pouze tehdy, když $x = 0$ na $[t_0, t_0+\delta]$.

Položme $t^* = \sup\{\tau \in (t_0, b] : x = 0$ na $[t_0, \tau]$. Zřejmě je $x = 0$ na $[t_0, t^*)$, a tudíž také $x(t^*-) = 0$. Dále podle (8.13) máme $0 = \big[I - \Delta^- A(t^*)\big]\, x(t^*)$. To je ale, vzhledem k předpokladu (8.22), možné pouze tehdy, když $x(t^*) = 0$.

Předpokládejme, že $t^* < b$. Stejnou argumentací, jakou jsme na začátku důkazu dokázali, že existuje $\delta \in (0, b-t_0]$ takové, že x je nulové na $[t_0, t_0+\delta]$, ukázali bychom nyní, že existuje $\eta \in (0, b-t^*)$ takové, že x se anuluje na $[t^*, t^*+\eta]$, což je ovšem vzhledem k definici t^* nemožné, tudíž musí být $t^* = b$. Dokázali jsme, že každé řešení úlohy (8.17) je nulové na $[t_0, b]$.

Podobně bychom pomocí předpokladu (8.23) dokázali, že je-li $t_0 \in (a, b]$, pak se řešení x úlohy (8.17) anuluje také na $[a, t_0]$.

Dokázali jsme, že platí-li (8.22) a (8.23), má úloha (8.17) pouze triviální řešení na $[a,b]$. Podle věty 8.14 má tedy úloha (8.16) jediné řešení na $[a,b]$.

b) Předpokládejme, že neplatí např. (8.22). Zřejmě je $\det\big[I - \Delta^- A(t)\big] \ne 0$, jestliže je $|\Delta^- A(t)| \le 1/2$. Na druhou stranu, podle důsledku 4.11 obrácená nerovnost $|\Delta^- A(t)| > 1/2$ platí pro nejvýše konečně mnoho bodů $t \in (t_0, b]$. Matice $I - \Delta^- A(t)$ tedy není regulární pro nejvýše konečně mnoho bodů $t \in (t_0, b]$.

Můžeme tedy zvolit $t^* \in (t_0, b]$ takové, že

$$\det\big[I - \Delta^- A(t)\big] \neq 0 \text{ pro } t \in (t_0, t^*) \quad \text{a} \quad \det\big[I - \Delta^- A(t^*)\big] = 0.$$

Dále ze základů lineární algebry je známo, že potom existuje $d \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\big[I - \Delta^- A(t^*)\big]\, c \neq d \quad \text{pro každé } c \in \mathbb{R}^n. \tag{8.24}$$

Definujme

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{když } t \neq t^*, \\ d & \text{když } t = t^*. \end{cases}$$

Máme $g \in \mathbb{BV}([a,b], \mathbb{R}^n)$ a $\Delta^- g(t^*) = d$. Předpokládejme, že rovnice (8.16) má na $[a,b]$ řešení x. Potom podle první části důkazu musí být $x = 0$ na $[a, t^*)$, a tedy také $x(t^*-) = 0$. Podle věty 8.9 musí platit $\big[I - \Delta^- A(t^*)\big]\, x(t^*) = d$. To je ovšem ve sporu s tvrzením (8.24). Úloha (8.16) tedy nemůže mít řešení.

Neplatí-li (8.23), pak analogicky najdeme bod $t^* \in [a, t_0)$ a funkci g takové, že bude

$$\big[I + \Delta^+ A(t^*)\big]\, c \neq \Delta^+ g(t^*) \quad \text{pro každé } c \in \mathbb{R}^n,$$

což vede opět ke sporu s větou 8.9. □

8.16 Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a* $t_0 \in [a,b]$. *Potom počáteční úloha* (8.14) *má pro každou funkci* $f \in \mathbb{BV}([a,b], \mathbb{R}^n)$ *a každý vektor* $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *jediné řešení tehdy a jen tehdy, když platí* (8.22) *a* (8.23).

D ů k a z . Věta je důsledkem lemmatu 8.15, kde položíme

$$g(t) = \widetilde{x} + f(t) - f(t_0) \quad \text{pro } t \in [a,b].$$

□

8.5 Zobecněné Gronwallovo lemma a apriorní odhady řešení

Důležitou roli v teorii obyčejných diferenciálních rovnic (např. při důkazu jednoznačnosti řešení počáteční úlohy nebo při důkazech spojité závislosti řešení na některých parametrech) hraje tvrzení, které se nazývá Gronwallovo lemma. Připomeňme si jeho znění. Důkaz lze najít ve většině učebnic obyčejných diferenciálních rovnic (viz např. [23, Pomocná věta 4.3.1]).

8.17 Lemma (GRONWALL). *Nechť funkce u a p jsou spojité a nezáporné na $[a,b]$, $K \ge 0$ a nechť*

$$u(t) \le K + \int_a^t \big(p(s)\,u(s)\big)\,\mathrm{d}\,s \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b].$$

Potom

$$u(t) \le K\, \exp\Big(\int_a^t p(s)\,\mathrm{d}\,s\Big) \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b].$$

Pro nás bude podobně důležité zobecnění Gronwallova lemmatu na případ, kdy se v příslušných integrálních nerovnostech vyskytuje Stieltjesův integrál.

8.18 Věta (ZOBECNĚNÉ GRONWALLOVO LEMMA). *Předpokládejme, že funkce $u:[a,b]\to[0,\infty)$ je ohraničená na $[a,b]$, funkce $h:[a,b]\to[0,\infty)$ je neklesající a zleva spojitá na $(a,b]$, $K\ge 0$, $L \ge 0$ a nechť*

$$u(t) \le K + L\int_a^t u\,\mathrm{d}\,h \quad \textit{pro} \;\; t\in[a,b]. \tag{8.25}$$

Potom

$$u(t) \le K\,\exp\big(L\,[h(t)-h(a)]\big) \quad \textit{pro} \;\; t\in[a,b]. \tag{8.26}$$

D ů k a z . Nechť $\kappa \ge 0$ a $w_\kappa(t) = \kappa\,\exp\big(L\,[h(t)-h(a)]\big)$ pro $t\in[a,b]$. Potom

$$\begin{aligned}\int_a^t w_\kappa\,\mathrm{d}\,h &= \kappa\int_a^t \exp\big(L\,[h(s)-h(a)]\big)\,\mathrm{d}\,h(s)\\ &= \kappa\int_a^t \Big(\sum_{k=0}^\infty \frac{L^k}{k!}\,\big[h(s)-h(a)\big]^k\Big)\,\mathrm{d}\,h(s) \quad \text{pro} \;\; t\in[a,b].\end{aligned}$$

Protože, jak známo, řada $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty \frac{L^k}{k!}\,\big[h(t)-h(a)\big]^k$ konverguje stejnoměrně na $[a,b]$, můžeme přehodit pořadí operací integrace a sčítání. Použijeme-li nyní navíc tvrzení z příkladu 6.22, dostaneme

$$\begin{aligned}\int_a^t w_\kappa\,\mathrm{d}\,h &= \kappa\sum_{k=0}^\infty\Big(\frac{L^k}{k!}\int_a^t \big[h(s)-h(a)\big]^k\Big)\,\mathrm{d}\,[h(s)]\\ &\le \kappa\sum_{k=0}^\infty\Big(\frac{L^k\,[h(t)-h(a)]^{k+1}}{(k+1)!}\Big) = \frac{\kappa}{L}\,\Big(\exp(L\,[h(t)-h(a)])-1\Big)\\ &= \frac{w_\kappa(t)-\kappa}{L}\end{aligned}$$

pro $t \in [a,b]$. To znamená, že funkce w_κ splňuje pro každé $\kappa \geq 0$ a $t \in [a,b]$ nerovnost

$$w_\kappa(t) \geq \kappa + L \int_a^t w_\kappa \, \mathrm{d}\, h. \tag{8.27}$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$ a položme $\kappa = K + \varepsilon$ a $v_\varepsilon = u - w_\kappa$. Odečtením nerovností (8.25) a (8.27) zjistíme, že platí

$$v_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon + L \int_a^t v_\varepsilon \, \mathrm{d}\, h \quad \text{pro } \ t \in [a,b]. \tag{8.28}$$

Speciálně $v_\varepsilon(a) \leq -\varepsilon < 0$. Zbývající část důkazu bude připomínat postup z důkazu lemmatu 8.15. Funkce u i w_κ jsou evidentně ohraničené na $[a,b]$ pro každé $\kappa \geq 0$. Tudíž také funkce v_ε je ohraničená na $[a,b]$. Podle Hakeovy věty 6.42 (ii) máme

$$\begin{aligned}\int_a^t v_\varepsilon \, \mathrm{d}\, h &= v_\varepsilon(a)\, \Delta^+ h(a) + \lim_{\delta \to 0+} \int_{a+\delta}^t v_\varepsilon \, \mathrm{d}\, h \\ &\leq -\varepsilon\, \Delta^+ h(a) + \|v_\varepsilon\| \, [h(t) - h(a+)] \leq \|v_\varepsilon\| \, [h(t) - h(a+)],\end{aligned}$$

a tedy

$$v_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon + L \int_a^t v_\varepsilon \, \mathrm{d}\, h \leq -\varepsilon + L \, \|v_\varepsilon\| \, [h(t) - h(a+)] \quad \text{pro } \ t \in [a,b].$$

Zvolme $\eta > 0$ tak, aby platilo $L \, \|v_\varepsilon\| \, [h(t) - h(a+)] < \varepsilon/2$ pro $t \in [a, a+\eta]$. Pak bude $v_\varepsilon < 0$ na $[a, a+\eta]$. Označme $t^* = \sup\{\tau \in [a,b] : v_\varepsilon < 0 \text{ na } [a,\tau]\}$.

Vidíme, že je $t^* > a$ a $v_\varepsilon < 0$ na $[a, t^*)$. Opětným použitím Hakeovy věty 6.42 (i) dostaneme z (8.28)

$$\begin{aligned}v_\varepsilon(t^*) &\leq -\varepsilon + L \int_a^{t^*} v_\varepsilon \, \mathrm{d}\, h \\ &= -\varepsilon + L \left(v_\varepsilon(t^*) \Delta^- h(t^*) + \lim_{\delta \to 0+} \int_a^{t^*-\delta} v_\varepsilon \, \mathrm{d}\, h \right) \leq -\varepsilon < 0,\end{aligned}$$

protože $\Delta^- h(t^*) = 0$ a $\displaystyle\int_a^{t^*-\delta} v_\varepsilon \, \mathrm{d}\, h \leq 0$ pro každé $\delta > 0$.

Kdyby bylo $t^* < b$, zopakovali bychom předcházející postup a ukázali, že existuje $\theta \in (0, b - t^*)$ takové, že $v_\varepsilon < 0$ na intervalu $[a, t^* + \theta]$, což je ve sporu s definicí t^*. Tudíž $t^* = b$, $v_\varepsilon < 0$ na celém $[a,b]$ a

$$u(t) < w_\kappa(t) = K \, \exp\big(L\,(h(t) - h(a))\big) + \varepsilon \, \exp\big(L\,(h(t) - h(a))\big) \text{ pro } t \in [a,b].$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že platí (8.26). □

8.19 Cvičení. Dokažte následující variantu věty 8.18:

Předpokládejme, že funkce $u : [a,b] \to [0,\infty)$ *je ohraničená na* $[a,b]$, *funkce* $h : [a,b] \to [0,\infty)$ *je neklesající a zprava spojitá na* $[a,b)$, $K \ge 0$, $L \ge 0$ *a*

$$u(t) \le K + L \int_t^b u \,\mathrm{d}\, h \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b]. \tag{8.29}$$

Potom

$$u(t) \le K \,\exp\big(L\,[h(b) - h(t)]\big) \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b]. \tag{8.30}$$

8.20 Poznámka. Obecnější verze zobecněného Gronwallova lemmatu jsou obsaženy v monografiích Š. Schwabika [45] (viz větu 1.40) a J. Kurzweila [27] (viz kapitola 22).

V následující větě využijeme zobecněné Gronwallovo lemma k odvození důležitého odhadu pro řešení úlohy (8.14).

8.21 Věta. *Nechť* $t_0 \in [a,b]$ *a* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *splňují* (8.22) *a* (8.23), $f \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$, $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *a nechť* x *je řešení počáteční úlohy* (8.14) *na* $[a,b]$. *Potom*

$$\operatorname{var}_a^b (x - f) \le (\operatorname{var}_a^b A)\, \|x\| < \infty, \tag{8.31}$$

$$\left.\begin{aligned} c_{(A,t_0)} := \max\Big\{1, \sup_{t\in(t_0,b]} \big|[I - \Delta^- A(t)]^{-1}\big|,&\\ \sup_{t\in[a,t_0)} \big|[I + \Delta^+ A(t)]^{-1}\big| \Big\} < \infty,&\end{aligned}\right\} \tag{8.32}$$

$$\left.\begin{aligned} |x(t)| &\le c_{(A,t_0)} \big(|\widetilde{x}| + 2\,\|f\|\big)\, \exp\big(2\, c_{(A,t_0)} \operatorname{var}_{t_0}^t A\big) \quad \textit{pro}\; t \in [t_0, b],\\ |x(t)| &\le c_{(A,t_0)} \big(|\widetilde{x}| + 2\,\|f\|\big)\, \exp\big(2\, c_{(A,t_0)} \operatorname{var}_t^{t_0} A\big) \quad \textit{pro}\; t \in [a, t_0]. \end{aligned}\right\} \tag{8.33}$$

D ů k a z . a) Pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ máme

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big| x(\sigma_j) - f(\sigma_j) - x(\sigma_{j-1}) + f(\sigma_{j-1}) \Big| \\ &\qquad = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big| \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \mathrm{d}[A]\, x \Big| \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big[(\operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} A)\, \|x\| \big] = (\operatorname{var}_a^b A)\, \|x\| < \infty. \end{aligned}$$

Odtud okamžitě plyne, že platí (8.31).

b) Pro $t \in (t_0, b\,]$ takové, že $|\Delta^- A(t)| \leq \frac{1}{2}$ máme podle lemmatu 8.8

$$\big|[I - \Delta^- A(t)]^{-1}\big| \leq \frac{1}{1 - |\Delta^- A(t)|} < 2.$$

Protože množina $\big\{t \in [a,b]\colon |\Delta^- A(t)| > \frac{1}{2}\big\}$ je podle důsledku 4.11 nejvýše konečná, plyne odtud, že

$$\sup_{t \in (t_0, b\,]} \big|[I - \Delta^- A(t)]^{-1}\big| < \infty.$$

Podobně bychom dokázali, že je $\sup\limits_{t \in [a, t_0)} \big|[I + \Delta^+ A(t)]^{-1}\big| < \infty.$ Platí tedy (8.32).

c) Nechť x splňuje (8.14). Položme

$$B(t) = \begin{cases} A(t), & \text{když } t \in [a, t_0], \\ A(t-), & \text{když } t \in (t_0, b\,]. \end{cases}$$

Zřejmě $A(t) - B(t) = \Delta^- A(t)$ a

$$\operatorname{var}_{t_0}^{t} (B - A) = \sum_{s \in (t_0, b\,]} |\Delta^- A(s)| \leq \operatorname{var}_{t_0}^{t} A \quad \text{pro } t \in (t_0, b]$$

(viz důsledek 2.27). Tudíž $A - B \in \mathbb{BV}([a,b], \mathbb{R}^n)$ a $\operatorname{var}_{t_0}^{t} B \leq 2 \operatorname{var}_{t_0}^{t} A.$ Dále podle lemmatu 6.31 je

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[A - B\,]\,x = \Delta^- A(t)\,x(t) \quad \text{pro } t \in (t_0, b\,].$$

Rovnice (8.14) se tedy na intervalu $(t_0, b\,]$ redukuje na

$$[I - \Delta^- A(t)]\,x(t) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,[B\,]\,x + f(t) - f(t_0)$$

a odtud snadno (také díky tomu, že je $c_{(A,t_0)} \geq 1$) odvodíme nerovnost

$$|x(t)| \leq K + L \int_{t_0}^{t} |x|\,\mathrm{d}\,h \quad \text{pro } t \in [t_0, b\,],$$

kde $K = c_{(A,t_0)}\,(|\widetilde{x}| + 2\,\|f\|)\,,\ L = c_{(A,t_0)}$ a $h(t) = \operatorname{var}_{t_0}^{t} B$. Funkce h je neklesající na $[t_0, b]$. Dále protože B je zleva spojitá na $(t_0, b]$, je podle lemmatu 2.24 funkce h také zleva spojitá na $(t_0, b]$. Podle zobecněného Gronwallova lemmatu 8.18 dostáváme tedy konečně první nerovnost v (8.33).

Důkaz druhé nerovnosti v (8.33) by se za pomoci varianty Gronwallovy nerovnosti ze cvičení 8.19 provedl podobně. □

8.22 Cvičení. Za předpokladů věty 8.21 dokažte podrobně nerovnosti

$$0 < \sup_{t\in[a,t_0)} \big|[I + \Delta^+ A(t)]^{-1}\big| < \infty$$

a

$$|x(t)| \le c_{(A,t_0)}\,\big(|\widetilde{x}| + 2\,\|f\|\big)\,\exp\,\big(2\,c_{(A,t_0)}\operatorname{var}_{t}^{t_0} A\big) \quad \text{pro } t \in [a, t_0\,].$$

8.6 Spojitá závislost řešení na parametrech a existence řešení pro regulované pravé strany

Nechť $t_0 \in [a, b]$ a $A \in \mathbb{BV}([a, b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ splňují (8.22) a (8.23), nechť $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{G}([a, b], \mathbb{R}^n)$ a nechť x je řešení úlohy (8.14) na $[a, b]$. Dále nechť y je na $[a, b]$ řešení počáteční úlohy

$$y(t) - \widetilde{y} - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,A\,y = g(t) - g(t_0), \tag{8.34}$$

kde $g \in \mathbb{G}([a, b], \mathbb{R}^n)$ a $\widetilde{y} \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$\big(x(t) - y(t)\big) = \big(\widetilde{x} - \widetilde{y}\big) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,A\,\big(x - y\big) + \big(f(t) - g(t)\big) - \big(f(t_0) - g(t_0)\big)$$

pro $t \in [a, b]$. Podle věty 8.21 tedy máme

$$\|x - y\| \le c_{(A,t_0)}\,\exp\,\big(2\,c_{(A,t_0)}\operatorname{var}_{a}^{b} A\big)\,\big(\big|\widetilde{x} - \widetilde{y}\big| + 2\,\big\|f - g\|\big),$$

kde $c_{(A,t_0)} \in (0, \infty)$ je definováno v (8.32). Vidíme, že vzájemná „vzdálenost“ řešení počátečních úloh (8.14) a (8.34) je přímo úměrná tomu, jak jsou od sebe „vzdálena“ vstupní data (tj. počáteční hodnoty $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ a pravé strany f, g) těchto rovnic. Podrobněji je tento jev popsán v následující větě.

8.23 Věta. *Nechť* $t_0 \in [a,b]$ *a* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *splňují* (8.22) *a* (8.23). *Dále nechť* $f, f_k \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$ *a* $\widetilde{x}, \widetilde{x}_k \in \mathbb{R}^n$ *pro* $k \in \mathbb{N}$. *Předpokládejme, že*

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\| = 0 \tag{8.35}$$

a

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{x}_k = \widetilde{x}. \tag{8.36}$$

Nechť počáteční úlohy

$$x_k(t) - \widetilde{x}_k - \int_{t_0}^t \mathrm{d}\, A\, x_k = f_k(t) - f_k(t_0) \tag{8.37}$$

mají pro $k \in \mathbb{N}$ *řešení* x_k *na intervalu* $[a,b]$. *Potom má také úloha* (8.14) *řešení* x *na intervalu* $[a,b]$ *a platí*

$$\lim_{k\to\infty} \big\|x_k - x\big\| = 0. \tag{8.38}$$

D ů k a z . a) V důsledku (8.35) a (8.36) existuje k_0 takové, že $\|f_k\| \le \|f\| + 1$ a $|\widetilde{x}_k| \le |\widetilde{x}| + 1$ platí pro $k \ge k_0$. Podle věty 8.21 platí tedy pro $k \ge k_0$ také

$$\|x_k\| \le \varkappa_0 < \infty, \quad \text{kde } \varkappa_0 = c_{(A,t_0)} \big(|\widetilde{x}| + 2\,\|f\| + 3\big) \exp\big(2\, c_{(A,t_0)} \operatorname{var}_a^b A\big)$$

nezávisí na k. Podle téže věty máme dále

$$\operatorname{var}_a^b (x_k - f_k) \le \varkappa_0 \operatorname{var}_a^b A < \infty \quad \text{pro } k \ge k_0.$$

Nyní, podle Hellyovy věty o výběru (věta 2.46) existují funkce $y \in \mathbb{BV}([a,b], \mathbb{R}^n)$ a rostoucí posloupnost $\{k_\ell\} \subset \mathbb{N}$ takové, že $k_1 \ge k_0$,

$$\|y\|_{\mathbb{BV}} \le 2 \max\{\varkappa_0 \operatorname{var}_a^b A, \varkappa_0 + \|f\| + 1\}$$

a

$$\lim_{\ell\to\infty} \big(x_{k_\ell}(t) - f_{k_\ell}(t)\big) = y(t) \quad \text{pro } t \in [a,b].$$

Vzhledem k předpokladu (8.35) to ovšem znamená, že pro každé $t \in [a,b]$ existuje limita $x(t) := \lim\limits_{\ell\to\infty} x_{k_\ell}(t)$ Díky stejnoměrné ohraničenosti posloupnosti $\{x_{k_\ell}\}$ a pomocí Osgoodovy věty (věta 6.51) tedy získáme pro každé $t \in [a,b]$ rovnost

$$\lim_{\ell\to\infty} \int_a^t \mathrm{d}\, A\, x_{k_\ell} = \int_a^t \mathrm{d}\, A\, x.$$

Tudíž limitním přechodem $\ell \to \infty$ v rovnici (8.37) (a také s použitím předpokladů (8.35) a (8.36)) dospějeme ke zjištění, že x je řešením úlohy (8.14) na $[a,b]$.

b) Zopakujeme-li nyní pro každé $k \in \mathbb{N}$ úvahu z úvodu tohoto odstavce, přičemž v ní x_k nahradí y, f_k nahradí g a $\widetilde{x}_k$ nahradí $\widetilde{y}$, zjistíme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\|x - x_k\| \leq K \left(\left|\widetilde{x} - \widetilde{x}_k\right| + 2 \left\|f - f_k\right\|\right),$$

kde $K = c_{(A,t_0)} \exp\left(2\, c_{(A,t_0)} \operatorname{var}_a^b A\right) < \infty$ nezávisí na k. Platí tedy také (8.38).
□

Požadavek existence řešení rovnic (8.37) v předchozí větě byl podstatný. Existenční věta 8.16, kterou máme zatím k dispozici, se vztahuje pouze na případy, kdy pravá strana f má konečnou variaci na $[a,b]$.

Nyní můžeme konečně doplnit větu 8.16 na obecný případ $f \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

8.24 Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0 \in [a,b]$ *a platí* (8.22) *a* (8.23).

Potom pro každou funkci $f \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *a každý vektor* $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *má počáteční úloha* (8.14) *jediné řešení na* $[a,b]$.

D ů k a z . a) Máme-li dvě řešení x, y úlohy (8.14) na intervalu $[a,b]$, bude jejich rozdíl na $[a,b]$ řešením homogenní úlohy (8.17), která má ovšem podle lemmatu 8.15 pouze triviální řešení. Musí tedy platit $x \equiv y$ na $[a,b]$.

b) Položme $\widetilde{x}_k = \widetilde{x}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Podle věty 4.8 existuje posloupnost $\{f_k\}$ jednoduchých skokových funkcí (tedy funkcí z $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$), která konverguje stejnoměrně na $[a,b]$ k f. Podle věty 8.16 pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje jediné řešení x_k úlohy (8.37) a podle věty 8.23 posloupnost $\{x_k\}$ konverguje stejnoměrně k řešení úlohy (8.14). □

Ve zbývající části odstavce se omezme pro jednoduchost na případ $t_0 = a$, tj. vyšetřujeme počáteční úlohu

$$x(t) - \widetilde{x} - \int_a^t \mathrm{d}\, A\, x = f(t) - f(a) \tag{8.39}$$

jako limitu úloh

$$x_k(t) - \widetilde{x}_k - \int_a^t \mathrm{d}\, A_k\, x_k = f_k(t) - f_k(a), \tag{8.40}$$

kde také jádra A_k závisí na parametru $k \in \mathbb{N}$. Tento případ je poněkud složitější než ten, který jsme řešili ve větě 8.23. Nejprve dokážeme konvergenční větu pro KS-integrály pro situaci, která není pokryta větami z kapitoly 6.

8.25 Věta. *Nechť* $f,\ f_k \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n),\ A, A_k \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *pro* $k\in\mathbb{N}$. *Předpokládejme, že platí* (8.35),

$$\lim_{k\to\infty} \|A_k - A\| = 0 \tag{8.41}$$

a

$$\alpha^* := \sup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{var}_a^b A_k < \infty. \tag{8.42}$$

Potom

$$\lim_{k\to\infty}\Big(\sup_{t\in[a,b]}\Big|\int_a^t \mathrm{d}\,A_k\,f_k - \int_a^t \mathrm{d}\,A\,f\Big|\Big) = 0.$$

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon>0$. Podle věty 4.8 můžeme zvolit funkci $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ takovou, že každá její komponenta je jednoduchá skoková funkce na $[a,b]$ a přitom $\|f-\varphi\|<\varepsilon$. Dále podle (8.35) a (8.41) můžeme zvolit $k_0\in\mathbb{N}$ tak, aby současně platilo

$$\|f_k - f\| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|A_k - A\| < \varepsilon \quad \text{pro } k\ge k_0.$$

Pro dané $t\in[a,b]$ a $k\ge k_0$ máme podle vět 6.18 a 6.25

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^t \mathrm{d}\,A_k\,f_k - \int_a^t \mathrm{d}\,A\,f\Big| \\
&\quad\le \Big|\int_a^t \mathrm{d}\,A_k\,(f_k-\varphi)\Big| + \Big|\int_a^t \mathrm{d}\,[A_k - A]\,\varphi\Big| + \Big|\int_a^t \mathrm{d}\,A\,(\varphi - f)\Big| \\
&\quad\le (\operatorname{var}_a^b A_k)\,\|f_k-\varphi\| + 2\,\|A_k - A\|\,\|\varphi\|_{\mathbb{BV}} + (\operatorname{var}_a^b A)\,\|\varphi - x\| \\
&\quad\le \alpha^*\big(\|f_k - f\| + \|f-\varphi\|\big) + 2\,\|A_k - A\|\,\|\varphi\|_{\mathbb{BV}} + (\operatorname{var}_a^b A)\,\|\varphi - f\| \\
&\quad\le \big(2\,\alpha^* + 2\,\|\varphi\|_{\mathbb{BV}} + \operatorname{var}_a^b A\big)\,\varepsilon = K\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

kde $K=\big(2\,\alpha^*+2\,\|\varphi\|_{\mathbb{BV}}+\operatorname{var}_a^b A\big)\in(0,\infty)$ nezávisí ani na k ani na t. Tím je věta dokázána. □

Dále je třeba dokázat následující pomocné tvrzení.

8.26 Lemma. *Nechť* $A,\ A_k\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *pro* $k\in\mathbb{N}$. *Dále předpokládejme, že platí* (8.22) $($*kde* $t_0=a)$ *a* (8.41).

Potom existuje $k_0\in\mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $k\ge k_0$ *platí*

$$\det\big[I - \Delta^- A_k(t)\big] \ne 0 \quad \textit{pro}\ \ t\in(a,b] \tag{8.43}$$

a

$$\sup_{t\in(a,b]} \left|[I-\Delta^- A_k(t)]^{-1}\right| < 2\,c_A, \tag{8.44}$$

kde $c_A = c_{(A,a)} \in (0,\infty)$ *je konstanta definovaná v* (8.32) *pro* $t_0 = a$.

D ů k a z. Díky (8.41) platí podle lemmatu 4.15 $\lim_{k\to\infty} \|\Delta^- A_k - \Delta^- A\| = 0$. Můžeme tedy zvolit $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo

$$|\Delta^- A_k(t) - \Delta^- A(t)| < \frac{1}{4\,c_A} \quad \text{pro } t\in[a,b] \ \text{ a } \ k\geq k_0. \tag{8.45}$$

Nechť $t\in(a,b]$ a $k\geq k_0$ jsou dány. Snadno ověříme, že platí rovnost

$$I - \Delta^- A_k(t) = \big[I - \Delta^- A(t)\big]\,\big[I - T_k(t)\big],$$

kde

$$T_k(t) = \big[I-\Delta^- A(t)\big]^{-1}\big(\Delta^- A_k(t)-\Delta^- A(t)\big).$$

Vzhledem k předpokladu (8.22) je tudíž matice $I-\Delta^- A_k(t)$ regulární tehdy a jen tehdy, když je regulární matice $I - T_k(t)$.

Podle (8.32) a (8.45) máme

$$|T_k(t)| = \left|\big[I-\Delta^- A(t)\big]^{-1}\right| \left|\Delta^- A_k(t)-\Delta^- A(t)\right| < \frac{1}{4}.$$

Lemma 8.8 tedy zaručuje, že matice $I-T_k(t)$, a tudíž také $I-\Delta^- A_k(t)$ jsou regulární, a že platí $\left|\big[I-T_k(t)\big]^{-1}\right| < 2$. Odtud a z (8.32) plyne

$$\left|\big[I-\Delta^- A_k(t)\big]^{-1}\right| \leq \left|\big[I-T_k(t)\big]^{-1}\right| \left|\big[I-\Delta^- A(t)\big]^{-1}\right| < 2\,c_A.$$

Důkaz je dokončen. □

Nyní můžeme zformulovat a dokázat hlavní větu tohoto odstavce.

8.27 Věta. *Nechť* $t_0 = a$, $A,\ A_k \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $f,\ f_k \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{x},\ \widetilde{x}_k \in \mathbb{R}^n$ *pro* $k\in\mathbb{N}$. *Dále předpokládejme, že platí* (8.22), (8.35), (8.36), (8.41) *a* (8.42).

Potom existuje $k_0\in\mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $k\geq k_0$ *má počáteční úloha* (8.40) *jediné řešení* x_k *na* $[a,b]$ *a platí* (8.38), *kde* x *je řešení úlohy* (8.39).

D ů k a z . Podle věty 8.24 má úloha (8.39) jediné řešení x na $[a,b]$. Dále podle lemmatu 8.26 existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že (8.43) platí pro $k \geq k_0$. Tudíž, vzhledem k větě 8.24, úloha (8.40) má pro každé $k \geq k_0$ jediné řešení x_k na $[a,b]$. Položme

$$w_k = (x_k - f_k) - (x - f). \tag{8.46}$$

Potom

$$w_k(t) = \widetilde{w}_k + \int_a^t \mathrm{d}\,A_k\,w_k + h_k(t) - h_k(a) \quad \text{pro } k \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad t \in [a,b],$$

kde $\widetilde{w}_k = (\widetilde{x}_k - f_k(a)) - (\widetilde{x} - f(a))$ a

$$h_k(t) = \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k - A\,]\,(x - f) + \Big(\int_a^t \mathrm{d}\,A_k\,f_k - \int_a^t \mathrm{d}\,A\,f\Big). \tag{8.47}$$

Dokážeme, že

$$\lim_{k\to\infty} \|w_k\| = 0. \tag{8.48}$$

Podle (8.42), (8.44) a věty 8.21 je

$$|w_k(t)| \leq 2\,c_A\,(|\widetilde{w}_k| + \|h_k\|)\,\exp\big(4\,c_A\,\alpha^*\big) \quad \text{pro } t \in [a,b], \tag{8.49}$$

kde, podobně jako v lemmatu 8.26, píšeme c_A místo $c_{(A,a)}$. Stačí tedy dokázat, že

$$\lim_{k\to\infty} |\widetilde{w}_k| = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} \|h_k\| = 0. \tag{8.50}$$

Nejprve si povšimněme, že první vztah z (8.50) plyne okamžitě z předpokladů (8.35) a (8.36). Dále podle věty 8.25 je

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} \Big|\int_a^t \mathrm{d}\,A_k\,f_k - \int_a^t \mathrm{d}\,A\,f\Big| = 0. \tag{8.51}$$

Současně podle věty 6.25 máme

$$\Big|\int_a^t \mathrm{d}\,[A_k - A]\,(x - f)\Big| \leq 2\,\|A_k - A\|\,\|x - f\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{pro } t \in [a,b].$$

Protože $(x-f)\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ podle (8.31), plyne odtud díky (8.41), že platí také

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{t\in[a,b]}\left|\int_a^t \mathrm{d}[A_k-A]\,(x-f)\right|=0. \tag{8.52}$$

Souhrnem, podle (8.47) a (8.51)–(8.52) dostáváme $\lim\limits_{k\to\infty}\|h_k\|=0.$ Platí tedy (8.50), a vzhledem k (8.49) tudíž také (8.48).

Podle (8.46) je $x_k-x=w_k+\big(f_k-f\big).$ Tvrzení věty tudíž plyne z (8.35) a (8.48). □

8.7 Fundamentální matice

Zobecněním homogenních systémů lineárních obyčejných diferenciálních rovnic je rovnice

$$x(t)-x(s)-\int_s^t \mathrm{d}\,A\,x=0. \tag{8.53}$$

Nechť $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0\in[a,b]$ a nechť platí (8.22) a (8.23). Potom podle věty 8.16 (kde $f(t)\equiv f(a)$ na $[a,b]$) má rovnice (8.53) pro každé $\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n$ právě jedno řešení $x\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ na $[a,b]$ takové, že $x(t_0)=\widetilde{x}$. Naopak, každému řešení x rovnice (8.53) můžeme přiřadit hodnotu $x(t_0)\in\mathbb{R}^n$. Vzhledem k poznámkám 8.3 a 8.11 je tento vztah mezi řešeními rovnice (8.53) a vektorovým prostorem $\mathbb{R}^n$ vzájemně jednoznačný. Snadno ověříme, že jsou-li x,y řešení rovnice (8.53) na $[a,b]$ a $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$, pak $\alpha\,x+\beta\,y$ je také řešení rovnice (8.53) na $[a,b]$. Nyní můžeme tyto úvahy shrnout do následujícího tvrzení.

8.28 Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a nechť platí* (8.22) *a* (8.23). *Potom množina řešení rovnice* (8.53) *je lineární a tvoří podprostor* $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *dimenze* n.

Nyní ukážeme, že i pro zobecněné lineární diferenciální rovnice existuje obdoba fundamentální matice. Fundamentální matici pro zobecněné lineární diferenciální rovnice definujeme následujícím způsobem.

8.29 Definice. Maticová funkce $X:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ se nazývá *fundamentální matice rovnice* (8.53) na intervalu $[a,b]$, jestliže splňuje rovnost

$$X(t)=X(s)+\int_s^t \mathrm{d}\,A\,X\quad \text{pro}\ \ t,s\in[a,b] \tag{8.54}$$

a $\det X(t) \neq 0$ pro alespoň jedno $t \in [a,b]$.

8.30 Poznámka. Jestliže maticová funkce X splňuje vztah (8.54), pak snadno ověříme, že pro libovolné $c \in \mathbb{R}^n$ je funkce $x(t) = X(t)\,c$ řešením rovnice (8.53).

8.31 Lemma. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0 \in [a,b]$ *a nechť platí* (8.22) *a* (8.23). *Potom pro každou matici* $\widetilde{X} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *existuje jednoznačně určená maticová funkce* $X_{t_0} \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *taková, že platí*

$$X_{t_0}(t) = \widetilde{X} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,A\,X_{t_0} \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b]. \tag{8.55}$$

D ů k a z . Pro $k = 1, 2, \dots, n$ označme k-tý sloupec matice $\widetilde{X}$ jako $\widetilde{x}_k$. Máme tedy $\widetilde{x}_k \in \mathbb{R}^n$ pro $k = 1, 2, \dots, n$ a $\widetilde{X} = \big(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_n\big)$. Podle věty 8.16 pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ existuje právě jedna funkce $x_k \in \mathbb{BV}([a,b], \mathbb{R}^n)$ vyhovující rovnosti

$$x_k(t) - \widetilde{x}_k - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,A\,x_k = 0 \quad \text{pro} \;\; t \in [a,b].$$

Funkce $X_{t_0}(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big)$ (tj. maticová funkce se sloupci x_k pro $k = 1, 2, \dots, n$) splňuje tedy vztah (8.55) a je určena jednoznačně. □

8.32 Poznámka. Je-li $t_0 \in [a,b]$, $\widetilde{X} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ a funkce X_{t_0} je určená lemmatem 8.31, pak funkce $X = X_{t_0}$ zřejmě splňuje vztah (8.54). Je-li tedy $\det \widetilde{X} \neq 0$, pak je takto definovaná funkce X fundamentální maticí rovnice (8.53).

Nyní, pro usnadnění, poněkud zesílíme naše předpoklady (8.22) a (8.23). Budeme nyní předpokládat, že platí

$$\left.\begin{aligned} &\det\big[I - \Delta^{-}A(t)\big] \neq 0 \quad \text{pro každé} \;\; t \in (a,b] \\ \text{a} \\ &\det\big[I + \Delta^{+}A(s)\big] \neq 0 \quad \text{pro každé} \;\; s \in [a,b). \end{aligned}\right\} \tag{8.56}$$

8.33 Lemma. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a nechť platí* (8.56). *Potom pro libovolnou fundamentální matici* X *rovnice* (8.53) *je*

$$\det X(t) \neq 0 \quad \textit{pro každé} \;\; t \in [a,b]. \tag{8.57}$$

D ů k a z . Nechť X je fundamentální matice rovnice (8.53) na $[a,b]$ a nechť (8.57) neplatí. Potom existují body $\tau_0, \tau_1 \in [a,b]$ takové, že

$$\det X(\tau_0) \neq 0 \quad \text{a} \quad \det X(\tau_1) = 0.$$

Z druhé rovnosti plyne, že sloupce $x_1(\tau_1), x_2(\tau_1), \dots, x_n(\tau_1)$ matice $X(\tau_1)$ jsou lineárně závislé. Existují tedy koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| > 0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k(\tau_1) = 0.$$

Položme $x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k(t)$ pro $t \in [a,b]$. Potom x je řešením rovnice (8.53) (viz poznámku 8.30) a $x(\tau_1) = 0$. Dosazením $s = \tau_1$ do (8.53) a odečtením takto získané rovnosti od (8.53) zjistíme, že x je řešením počáteční úlohy

$$x(t) = \int_{\tau_1}^{t} \mathrm{d}\, A\, x \quad \text{pro} \ \ t \in [a,b].$$

Vzhledem k předpokladu (8.56) jsou podmínky (8.22) a (8.23) splněny pro $t_0 = \tau_1$, a protože stejnou úlohu jako x splňuje i identicky nulová funkce, plyne z věty 8.16, kde položíme $t_0 = \tau_1$, že $x = 0$ na $[a,b]$. Speciálně

$$x(\tau_0) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k(\tau_0) = 0,$$

což ovšem, vzhledem k předpokladům $\det\, X(\tau_0) \neq 0$ a $\sum_{k=1}^{n} |c_k| > 0$, není možné.

□

Připomeňme nyní některá označení užívaná pro funkce dvou proměnných.

8.34 Označení. Nechť $U \colon [a,b] \times [a,b] \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Potom pro dané $\tau \in [a,b]$ značí symboly $U(\tau,\cdot\,)$, resp. $U(\cdot,\tau)$ funkce jedné proměnné

$$U(\tau,\cdot\,) : s \in [a,b] \to U(\tau,s) \ \text{resp.} \ U(\cdot,\tau) : t \in [a,b] \to U(t,\tau).$$

Podobně

$$U(\tau,s+) = \lim_{\delta\to 0+} U(\tau,s+\delta),\ U(\tau,s-) = \lim_{\delta\to 0+} U(\tau,s-\delta),$$
$$U(t+,\tau) = \lim_{\delta\to 0+} U(t+\delta,\tau),\ U(t-,\tau) = \lim_{\delta\to 0+} U(t-\delta,\tau).$$

Následující věta je důsledkem lemmat 8.31 a 8.33.

8.35 Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *splňuje* (8.56). *Potom existuje právě jedna maticová funkce* $U:[a,b]\times[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *taková, že platí*

$$U(t,s) = I + \int_s^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s) \quad \textit{pro}\ \ t,s\in[a,b]\times[a,b]. \tag{8.58}$$

Pro každé $t_0\in[a,b]$ *je funkce* $U(\cdot,t_0): t\in[a,b]\to U(t,t_0)\in\mathbb{R}^n$ *fundamentální matice rovnice* (8.53).

Funkce U *má navíc tyto vlastnosti:*

(i) $U(\cdot,s)\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *pro každé* $s\in[a,b]$,

(ii) $U(t,t)=I$ *pro každé* $t\in[a,b]$,

(iii) $\det U(t,s)\neq 0$ *pro všechna* $t,s\in[a,b]$.

D ů k a z . Pro každé $s\in[a,b]$ existuje podle lemmatu 8.31 právě jedna maticová funkce $X_s\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ taková, že platí

$$X_s(t) = I + \int_s^t \mathrm{d}\,A\,X_s \quad \text{pro}\ \ t\in[a,b].$$

Definujme $U(t,s)=X_s(t)$ pro $t,s\in[a,b]$. Potom U splňuje (8.58) a $U(t,t)=I$ pro $t\in[a,b]$. Vzhledem k poznámce 8.32 odtud plyne, že pro každé $t_0\in[a,b]$ je $U(\cdot,t_0)$ fundamentální matice rovnice (8.53) na $[a,b]$. Konečně, podle lemmatu 8.33 je $\det U(t,s)\neq 0$ pro všechna $t,s\in[a,b]$. □

8.36 Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0\in[a,b]$, $\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n$, *nechť platí* (8.56) *a nechť maticová funkce* U *je určena větou* 8.35. *Potom* $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ *je řešení počáteční úlohy*

$$x(t)-\widetilde{x}-\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,A\,x = 0 \tag{8.59}$$

na intervalu $[a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když*

$$x(t)=U(t,t_0)\,\widetilde{x} \quad \textit{pro}\ \ t\in[a,b]. \tag{8.60}$$

D ů k a z . a) Dosadíme-li (8.60) do $\displaystyle\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,A\,x$ a využijeme-li (8.58), dostaneme

$$\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,A\,x = \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)\,\widetilde{x} = \big(U(t,t_0)-I\big)\,\widetilde{x} = x(t)-\widetilde{x}$$

pro $t\in[a,b]$, tj. funkce x definovaná vztahem (8.60) je řešení úlohy (8.59).

b) Obrácená implikace plyne z jednoznačnosti řešení počáteční úlohy (8.59) (viz větu 8.16). □

8.37 Definice. Nechť $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ a nechť platí (8.56). Potom maticovou funkci U určenou větou 8.35 nazýváme *Cauchyova matice* rovnice (8.53).

8.38 Důsledek. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0\in[a,b]$ *a* $\widetilde{X}\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. *Dále nechť platí* (8.56) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.53). *Potom maticová funkce* $X:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *splňuje rovnost*

$$X(t)=\widetilde{X}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}\,A\,X \tag{8.61}$$

pro $t\in[a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když*

$$X(t)=U(t,t_0)\,\widetilde{X}\quad \textit{pro}\ \ t\in[a,b]. \tag{8.62}$$

D ů k a z . Pro každý sloupec x_k, $k=1,2,\dots,n$, maticové funkce X platí podle věty 8.36

$$x_k(t)=U(t,t_0)\,\widetilde{x}_k\quad \text{pro}\ \ t\in[a,b],$$

kde $\widetilde{x}_k$ jsou sloupce matice $\widetilde{X}$. Odtud tvrzení okamžitě plyne. □

8.39 Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, *nechť platí* (8.56) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.53). *Potom vztahy*

$$U(t,r)\,U(r,s)=U(t,s), \tag{8.63}$$

$$(U(t,r))^{-1}=U(r,t) \tag{8.64}$$

platí pro libovolnou trojici bodů t,s,r *z intervalu* $[a,b]$.

D ů k a z . a) Pro libovolná $t,s,r\in[a,b]$ máme podle (8.58)

$$\begin{aligned}U(t,s)&=I+\int_s^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,U(\tau,s)\\&=I+\int_s^r \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,U(\tau,s)+\int_r^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,U(\tau,s)\\&=U(r,s)+\int_r^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,U(\tau,s).\end{aligned}$$

Označíme-li sloupce matice U symboly $u_k,\ k=1,2,\dots,n,$ zjistíme, že pro každé $k=1,2,\dots,n$ a $r,s\in[a,b]$ je funkce $x(t)=u_k(t,s)$ řešením úlohy

$$x(t)-u_k(r,s)-\int_r^t \mathrm{d}\,A\,x=0$$

na $[a,b]$. Podle věty 8.36 tudíž platí

$$u_k(t,s)=U(t,r)\,u_k(r,s)\quad \text{pro}\ \ k=1,2,\dots,n\ \ \text{a}\ \ t,s,r\in[a,b].$$

Odtud už vztah (8.63) okamžitě plyne.

b) Speciálně jestliže $t=s,$ pak podle věty 8.35 dostáváme $U(t,r)\,U(r,t)=I$ pro každé $r\in[a,b]$. Vzhledem k větě 8.35 (iii) tedy platí (8.64). □

8.40 Poznámka. Je-li U Cauchyova matice pro (8.53), pak podle věty 8.39 platí

$$U(t,s)=U(t,a)\,U(a,s)=U(t,a)\,(U(s,a))^{-1}\quad \text{pro}\ \ t,s\in[a,b].$$

Označíme-li tedy $X(t)=U(t,a)$, bude platit $U(t,s)=X(t)\,(X(s))^{-1}$ pro $t,s\in[a,b]$. Připomeňme, že X je fundamentální matice rovnice (8.53).

Ve zbývající části tohoto odstavce uvedeme ještě několik dalších vlastností Cauchyovy matice rovnice (8.53).

8.41 Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, *nechť platí* (8.56) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.53). *Potom existuje* $M\in(0,\infty)$ *takové, že platí*

$$|U(t,s)|+\operatorname{var}_a^b U(\cdot,s)+\operatorname{var}_a^b U(t,\cdot\,)\le M\qquad \textit{pro}\ \ t,s\in[a,b].\tag{8.65}$$

D ů k a z . a) Pro $k=1,2,\dots,n$ označme symbolem e_k k-tý sloupec jednotkové matice I. Potom $|e_k|=1$ pro každé $k=1,2,\dots,n$. Podle věty 8.21 máme

$$|u_k(t,s)|\le M_1{:}=c_A\,\exp\big(2\,c_A\operatorname{var}_a^b A\big)<\infty \text{ pro } t,s\in[a,b]\ \text{ a }\ k=1,2,\dots,n,$$

kde díky předpokladu (8.56) můžeme položit

$$c_A{:}=\max\Big\{1,\sup_{t\in(a,b]}\big|[I-\Delta^-A(t)]^{-1}\big|,\sup_{t\in[a,b)}\big|[I+\Delta^+A(t)]^{-1}\big|\ \Big\}.$$

Tudíž

$$|U(t,s)|=\max_{k=1,2,\dots,n}|u_k(t,s)|\le M_1\quad \text{pro}\ \ t,s\in[a,b].\tag{8.66}$$

b) Nechť $t_1, t_2, s \in [a,b]$ a $t_1 \le t_2$. Potom

$$|u_k(t_2,s) - u_k(t_1,s)| = \Big| \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\, u_k(\tau,s)\Big| \le M_1 \operatorname{var}_{t_1}^{t_2} A.$$

Pro libovolné $s \in [a,b]$, $k = 1,2,\dots,n$ a libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ tedy máme

$$V(u_k(\cdot,s),\boldsymbol{\sigma}) \le M_1 \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} A = M_1 \operatorname{var}_a^b A =: M_2 < \infty,$$

a proto

$$\operatorname{var}_a^b U(\cdot,s) \le \max_{k=1,2,\dots,n} \operatorname{var}_a^b u_k(\cdot,s) \le M_2 \quad \text{pro} \ \ s \in [a,b]. \tag{8.67}$$

c) Nechť $s_1, s_2 \in [a,b]$ a $s_1 \le s_2$. Potom pro každé $t \in [a,b]$ máme

$$\begin{aligned} &u_k(t,s_2) - u_k(t,s_1) \\ &\quad = \int_{s_2}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\, u_k(\tau,s_2) - \int_{s_2}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\, u_k(\tau,s_1) - \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\, u_k(\tau,s_1) \\ &\quad = -\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,] u_k(\tau,s_1) + \int_{s_2}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\big(u_k(\tau,s_2) - u_k(\tau,s_1)\big). \end{aligned}$$

Funkce $x(t) = u_k(t,s_2) - u_k(t,s_1)$ je tedy na $[a,b]$ řešením počáteční úlohy

$$x(t) = -\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,] u_k(\tau,s_1) + \int_{s_2}^{t} \mathrm{d}\,A\,x.$$

Podle věty 8.36 pro každé $t \in [a,b]$ a $k = 1,2,\dots,n$ platí

$$u_k(t,s_2) - u_k(t,s_1) = -U(t,s_2)\Big(\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,] u_k(\tau,s_1)\Big).$$

Tudíž $|u_k(t,s_2) - u_k(t,s_1)| \le M_1^2 \operatorname{var}_{s_1}^{s_2} A$ pro $k = 1,2,\dots,n$ a $t \in [a,b]$.

Pro libovolné $t \in [a,b]$, $k = 1,2,\dots,n$ a libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ platí

$$V(u_k(t,\cdot\,),\boldsymbol{\sigma}) \le M_1^2 \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} A = M_1^2 \operatorname{var}_a^b A =: M_3 < \infty,$$

a proto

$$\operatorname{var}_a^b U(t,\cdot\,) \le \max_{k=1,2,\dots,n} \operatorname{var}_a^b u_k(t,\cdot\,) \le M_3 \quad \text{pro} \;\; t\in[a,b]. \tag{8.68}$$

d) Podle (8.65)–(8.67) tvrzení věty platí pro $M = M_1 + M_2 + M_3$. □

8.42 Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, *nechť platí* (8.56) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.53). *Potom platí*

$$\left.\begin{aligned}
U(t+,s) &= \big[I+\Delta^+A(t)\big]\,U(t,s) && \textit{pro}\;\; t\in[a,b),\ s\in[a,b],\\
U(t-,s) &= \big[I-\Delta^-A(t)\big]\,U(t,s) && \textit{pro}\;\; t\in(a,b],\ s\in[a,b],\\
U(t,s+) &= U(t,s)\,\big[I+\Delta^+A(s)\big]^{-1} && \textit{pro}\;\; t\in[a,b],\ s\in[a,b),\\
U(t,s-) &= U(t,s)\,\big[I-\Delta^+A(s)\big]^{-1} && \textit{pro}\;\; t\in[a,b],\ s\in(a,b].
\end{aligned}\right\} \tag{8.69}$$

D ů k a z . Nejprve si všimněme, že podle předchozí věty mají funkce $U(\cdot,s)$ a $U(t,\cdot\,)$ konečné variace na $[a,b]$ pro libovolná $t,s\in[a,b]$. Všechny jednostranné limity objevující se ve vztazích (8.69) tedy mají smysl.

a) První dva vztahy odvodíme, jestliže do vztahů (8.13) z lemmatu 8.15 dosadíme postupně za x sloupce maticové funkce U.

b) Nechť $s\in[a,b)$ a $\delta\in(0,b-s)$. Potom podle (8.58) máme

$$\begin{aligned}
U(t,s+\delta)-U(t,s) &= \int_{s+\delta}^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s+\delta) - \int_s^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)\\
&= \int_{s+\delta}^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,\big(U(\tau,s+\delta)-U(\tau,s)\big) - \int_s^{s+\delta} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)
\end{aligned}$$

pro každé $t\in[a,b]$. Maticová funkce $Y(t)=U(t,s+\delta)-U(t,s)$ tedy splňuje rovnost

$$Y(t) = \widetilde{Y} + \int_{s+\delta}^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,Y(\tau) \quad \text{pro} \;\; t\in[a,b],$$

kde

$$\widetilde{Y} = -\int_s^{s+\delta} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s).$$

Podle důsledku 8.38 tudíž máme

$$U(t,s+\delta)-U(t,s)=Y(t)=U(t,s+\delta)\,\widetilde{Y}$$
$$=-U(t,s+\delta)\int_s^{s+\delta}\mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)$$

pro $t\in[a,b]$. Limitním přechodem $\delta\to 0+$ při použití Hakeovy věty 6.42 odtud dostaneme

$$U(t,s+)-U(t,s)=-U(t,s+)\,\Delta^+A(s)\,U(s,s)=-U(t,s+)\,\Delta^+A(s)$$

neboli $U(t,s)=U(t,s+)\,\big[I+\Delta^+A(s)\big]$. Odtud okamžitě plyne platnost třetího vztahu z (8.69). Zbývající rovnost bychom dokázali analogicky. □

Pro funkce dvou proměnných je možno definovat pojem variace několika různými způsoby. Pro nás je zajímavá definice Vitaliova.

8.43 Definice. Nechť $F:[a,b]\times[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Pro daná dělení $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}$ intervalu $[a,b]$, $j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})$ a $k=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\rho})$ položme

$$\Delta_{j,k}(F,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho})=F(\sigma_j,\rho_k)-F(\sigma_{j-1},\rho_k)-F(\sigma_j,\rho_{k-1})+F(\sigma_{j-1},\rho_{k-1}).$$

Potom veličina

$$v(F)=\sup_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}\in\mathscr{D}[a,b]}\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\sum_{k=1}^{\nu(\boldsymbol{\rho})}\big|\Delta_{j,k}(F,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho})\big|$$

se nazývá *Vitaliova variace* funkce F na intervalu $[a,b]\times[a,b]$.

8.44 Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, *nechť platí* (8.56) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.53). *Potom* $v(U)<\infty$.

D ů k a z . Mějme dvě libovolná dělení $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}$ intervalu $[a,b]$. Podle věty 8.39 (viz též poznámku 8.40) je $U(t,s)=U(t,a)\,U(a,s)$ pro $t,s\in[a,b]$. Pro libovolná $j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})$ a $k=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\rho})$ tedy máme

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\sum_{k=1}^{\nu(\boldsymbol{\rho})}\big|\Delta_{j,k}(U,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho})\big|$$
$$=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\sum_{k=1}^{\nu(\boldsymbol{\rho})}\Big|\big[U(\sigma_j,a)-U(\sigma_{j-1},a)\big]\,\big[U(a,\rho_k)-U(a,\rho_{k-1})\big]\Big|$$
$$\le \operatorname{var}_a^b U(\cdot,a)\ \operatorname{var}_a^b U(a,\cdot)|\le M^2,$$

kde $M<\infty$ bylo určeno ve větě 8.41. □

8.8 Nehomogenní rovnice

Vraťme se nyní k nehomogenní počáteční úloze

$$x(t)-\widetilde{x}-\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}\,A\,x=f(t)-f(t_0). \tag{8.14}$$

Budeme předpokládat, že $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ splňuje (8.56). Pro libovolná $\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n$ a $f\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ existuje podle věty 8.24 jediné řešení x počáteční úlohy (8.14) a toto řešení je regulované na $[a,b]$.

Následující věta ukazuje, že toto řešení je možno vyjádřit ve tvaru připomínajícím formuli *variace konstant* známou z teorie obyčejných diferenciálních rovnic.

8.45 Věta. *Nechť* $t_0\in[a,b]$, $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *splňuje* (8.56) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.53). *Potom úloha* (8.14) *má pro každé* $\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n$ *a každé* $f\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *jediné řešení* x *na* $[a,b]$. *Toto řešení je dáno formulí*

$$\left.\begin{aligned} x(t)=U(t,t_0)\,\widetilde{x}+f(t)-f(t_0)-\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}_s[U(t,s)\,]\,\big(f(s)-f(t_0)\big)\\ \textit{pro}\ \ t\in[a,b]. \end{aligned}\right\} \tag{8.70}$$

Je zřejmé, že pro podrobný důkaz je nutné něco vědět o integrálních operátorech typu

$$\mathscr{K}\colon x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)\to y(t)=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}_s[K(t,s)\,]\,x(s), \tag{8.71}$$

kde funkce K má stejné vlastnosti jako Cauchyova matice U příslušné homogenní rovnice a symbol d_s naznačuje, že integrujeme funkce proměnné s, zatímco t je zde parametr. Vzhledem k vlastnostem funkce U popsaným v předešlém odstavci je vidět, že pro každou funkci $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je její obraz $y=\mathscr{K}\,x$ dobře definován na celém intervalu $[a,b]$. (Jde vždy o integraci funkce regulované vzhledem k funkci s konečnou variací.) Bohužel, vlastnosti operátorů tvaru (8.72) nejsou už tak na první pohled zřejmé. Navíc, abychom dokázali, že funkce x je řešením úlohy (8.14), potřebujeme umět zaměnit pořadí integrace ve dvojném integrálu

$$\int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,\Big(\int_{t_0}^{\tau}\mathrm{d}_s\,[U(\tau,s)\,]\,\big(f(s)-f(t_0)\big)\Big)$$

tak, aby bylo možno využít vztah (8.58) definující funkci $U.$ K tomu je nutné mít k dispozici aparát umožňující zacházení s dvojnými integrály. Ten se opírá též o pojem variace funkcí dvou proměnných zavedený v definici 8.43. Toto vše se v potřebném rozsahu už do tohoto textu nevejde. Nebudeme zde tedy provádět podrobné důkazy a jenom se pokusíme aspoň přiblížit jejich hlavní myšlenky. Většinou není obtížné doplnit vynechané detaily na základě znalosti postupů z předešlých kapitol. Podrobnosti týkající se variace funkcí dvou proměnných a integrálních operátorů určených takovýmito funkcemi lze najít zejména v kapitole III monografie [11] a v odstavci I.6 a kapitole II monografie [55]. Formule variace konstant pro $f \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je dokázána v [55, III.2] nebo v [45, Theorem 6.17], zatímco v [59, Proposition 4.4.3] je dokázána pro f regulovanou.

Omezíme se nyní na případ $t_0 = a,$ tj. hledáme řešení úlohy (8.39). Důkaz je rozdělen na 4 kroky:

Nejprve definujeme

$$K(t,s) = \begin{cases} U(t,s) \text{ když } a \le s \le t \le b, \\ U(t,t) \text{ když } a \le t < s \le b. \end{cases}$$

Zřejmě je $\operatorname{var}_a^b K(t,\cdot) \le \operatorname{var}_a^t U(t,\cdot)$ a $\operatorname{var}_a^b K(\cdot,s) \le \operatorname{var}_s^b U(\cdot,s)$ pro libovolná $t,s \in [a,b].$ Lze také dokázat, že je $v(K) < \infty$ (viz [55, Lemma III.2.7]). Existuje tedy konstanta $\varkappa \in (0,\infty)$ taková, že

$$v(K) + \operatorname{var}_a^b K(t,\cdot) + \operatorname{var}_a^b K(\cdot,s) \le \varkappa < \infty \quad \text{pro } t,s \in [a,b].$$

Dále pro každé $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je funkce

$$y : t \in [a,b] \to \int_a^b \mathrm{d}_s[K(t,s)]\,x(s) \tag{8.72}$$

dobře definována na $[a,b],$ přičemž

$$\int_a^c \mathrm{d}_s\,[K(t,s)]\,x(s) = \int_a^t \mathrm{d}_s[U(t,s)]\,x(s) \quad \text{pro každé } t \in [a,b] \text{ a } c \in [t,b].$$

Podle [55, Theorem I.6.18] je $\operatorname{var}_a^b y \le v(K)\,\|x\| < \infty.$

Druhý krok spočívá v důkazu, že platí

$$y(t+) = \int_a^b \mathrm{d}_s\,[K(t+,s)\,]\,x(s) \quad \text{když } t \in [a,b), \tag{8.73}$$

$$y(t-) = \int_a^b \mathrm{d}_s\,[K(t-,s)\,]\,x(s) \quad \text{když } t \in (a,b]. \tag{8.74}$$

Podle [55, Lemma I.6.14] mají všechny funkce

$$K(t+,\cdot\,) \;\text{ a }\; K(s-,\cdot\,),\;\; t \in [a,b),\; s \in (a,b],$$

konečnou variaci na $[a,b]$, a tudíž jsou integrály na pravých stranách v (8.73) dobře definovány. Protože x je na $[a,b]$ stejnoměrná limita jednoduchých skokových funkcí, stačí dokázat, že rovnosti (8.73) platí pro každou funkci typu

$$\chi_{[a,\tau]},\, \chi_{[\tau,b]}, \qquad \tau \in [a,b]. \tag{8.75}$$

Je-li například $x = \chi_{[a,\tau]}$, kde $\tau \in [a,b]$, pak pro každé $t \in [a,b]$ dostaneme (viz (6.18)) $y(t) = K(t,\tau+) - K(t,a)$, a tudíž

$$y(t+) = K(t+,\tau+) - K(t+,a) \quad \text{když } t \in [a,b)$$

a

$$y(t-) = K(t-,\tau+) - K(t-,a) \quad \text{když } t \in (a,b].$$

Na druhou stranu, máme

$$\int_a^b \mathrm{d}_s\,[K(t+,s)]\chi_{[a,\tau]} = K(t+,\tau+) - K(t+,a) \quad \text{když } t \in [a,b)$$

a

$$\int_a^b \mathrm{d}_s\,[K(t-,s)]\chi_{[a,\tau]} = K(t-,\tau+) - K(t-,a) \quad \text{když } t \in (a,b],$$

tj. platí (8.73) pro $x = \chi_{[a,\tau]}$. Podobně bychom ověřili platnost relací (8.73) pro funkce tvaru $x = \chi_{[\tau,b]}, \tau \in [a,b]$, a tedy i pro každou funkci $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Vidíme tedy, že funkce $x(t)$ definovaná formulí (8.70) je regulovaná na $[a,b]$ pro každou funkci $f \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a každý vektor $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$.

Třetím krokem je důkaz, že za našich předpokladů je pro každé $t \in [a,b]$ a každou funkci $f \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ pravdivá relace Fubiniova typu

$$\int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\Big(\int_a^t \mathrm{d}_s\,[K(\tau,s)\,]\,\big(f(s)-f(a)\big)\Big) = \int_a^t \mathrm{d}_s \left[\int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,K(\tau,s)\right]\,\big(f(s)-f(a)\big).$$

V důkazu tohoto kroku se opět využije stejnoměrná aproximace regulovaných funkcí jednoduchými skokovými funkcemi, vzorce z příkladů 6.15 a konvergenční vlastnosti KS-integrálu. Navíc je ovšem nutno také použít vlastnosti operátorů tvaru $f \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n) \to \int_a^b K(\cdot,s)\,\mathrm{d}\,[f(s)\,]$.

Na závěr dosadíme (8.70), tj.

$$x(t) = U(t,a)\,\widetilde{x} + f(t) - f(a) - \int_a^t \mathrm{d}_s[K(t,s)\,]\,\big(f(s) - f(a)\big),$$

do integrálu $\displaystyle\int_a^t \mathrm{d}\,A\,x$ a, vzhledem k definici funkce $K,$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_a^t \mathrm{d}\,A\,x &= \int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,U(\tau,a)\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}\,[A(s)\,]\,(f(s)-f(a))\\
&\qquad - \int_0^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\left(\int_a^\tau \mathrm{d}_s\,[U(\tau,s)]\,(f(s)-f(a))\right)\\
&= [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}[\,A(s)]\,(f(s)-f(a))\\
&\qquad - \int_0^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\left(\int_a^t \mathrm{d}_s\,[K(\tau,s)]\,(f(s)-f(a))\right)\\
&= [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}[\,A(s)]\,(f(s)-f(a))\\
&\qquad - \int_a^t \mathrm{d}_s\left[\int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,K(\tau,s)\right]\,(f(s)-f(a))\\
&= [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}[\,A(s)]\,(f(s)-f(a))\\
&\qquad - \int_a^t \mathrm{d}_s\left[\int_a^s \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,\tau)\right](f(s)-f(a))\\
&\qquad - \int_a^t \mathrm{d}_s\left[\int_s^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)\right](f(s)-f(a))\\
&= [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}[\,A(s)](f(s)-f(a))\\
&\qquad -\int_a^t \mathrm{d}\,[A(s)\,]\,(f(s)-f(a)) - \int_a^t \mathrm{d}_s\,[U(t,s)-I]\,(f(s)-f(a))
\end{aligned}$$

$$= [U(t,a) - I]\,\widetilde{x} - \int_a^t \mathrm{d}_s[U(t,s)]\,(f(s) - f(a))$$
$$= x(t) - \widetilde{x} - f(t) + f(a).$$

Funkce x je tedy řešení úlohy (8.39) na $[a,b]$. Tímto je důkaz věty 8.45 dokončen.

Jestliže je funkce A spojitá zleva na intervalu $(a,b]$ a $t_0 = a$, pak je možno vzorec (8.70) poněkud zjednodušit, definujeme-li $X(t) = U(t,a)$ pro $t \in [a,b]$ a

$$Y(s) = \begin{cases} U(a,s+), & \text{když } a \le s < b, \\ U(a,b), & \text{když } s = b. \end{cases} \tag{8.76}$$

8.46 Důsledek. *Nechť* $t_0 = a$ *a* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *je zleva spojitá na* $(a,b]$ *a platí* $\det[I + \Delta^+ A(t)] \ne 0$ *pro* $t \in [a,b)$. *Nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.53), $X(t) = U(t,a)$ *pro* $t \in [a,b]$ *a* Y *je definovaná předpisem* (8.76).

Potom rovnice (8.39) *má pro každé* $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *a každou funkci* $f \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$ *zleva spojitou na* $(a,b]$ *jediné řešení* x *na* $[a,b]$. *Toto řešení je dáno formulí*

$$x(t) = X(t)\,\widetilde{x} + X(t)\left(\int_a^t Y\,\mathrm{d}\,f\right) \quad \textit{pro}\ t \in [a,b]. \tag{8.77}$$

D ů k a z. Nechť $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ a nechť $f \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$ je zleva spojitá na $(a,b]$. Podle věty 8.45 má rovnice (8.39) jediné řešení x na $[a,b]$. Formuli (8.70) můžeme přepsat ve tvaru

$$x(t) = X(t)\,\widetilde{x} + \big(f(t) - f(a)\big) - X(t)\left(\int_a^t \mathrm{d}\,[X^{-1}(s)]\,\big(f(s) - f(a)\big)\right),$$

kde $X^{-1}(s) = U(a,s)$ pro $s \in [a,b]$. Vzhledem k definici (8.76) máme

$$X^{-1}(s) = Y(s) - \Delta^+ X^{-1}(s) \quad \text{pro}\ s \in [a,b)\,.$$

Podle lemmatu 6.35 je tedy pro každé $t \in [a,b]$

$$\int_a^t \mathrm{d}\,[X^{-1}(s)]\,\big(f(s) - f(a)\big)$$
$$= \int_a^t \mathrm{d}\,[Y(s)]\,\big(f(s) - f(a)\big) - \Delta^+ X^{-1}(t)\,\big(f(t) - f(a)\big).$$

Protože f je zleva spojitá na $(a,b]$ a Y je zprava spojitá na $[a,b)$, integrací per-partes (věta 6.36) dostaneme pro každé $t\in[a,b]$

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t)\,\widetilde{x} + \big(f(t)-f(a)\big) - X(t)\Big(\int_a^t \mathrm{d}\,[X^{-1}(s)]\,\big(f(s)-f(a)\big)\Big)\\ &= X(t)\,\widetilde{x} - \big(f(t)-f(a)\big) + X(t)\int_a^t Y\,\mathrm{d}\,f\\ &\qquad + X(t)\,\Delta^+X^{-1}(t)\,\big(f(t)-f(a)\big) - X(t)\,Y(t)\,\big(f(t)-f(a)\big). \end{aligned}$$

Konečně, protože pro každé $t\in[a,b]$

$$\begin{aligned} &X(t)\,\Delta^+X^{-1}(t)\,\big(f(t)-f(a)\big) - X(t)\,Y(t)\,\big(f(t)-f(a)\big)\\ &\quad = X(t)\,\big(X^{-1}(t+) - X^{-1}(t)\,\big(f(t)-f(a)\big) - X(t)\,X^{-1}(t+)\,\big(f(t)-f(a)\big)\\ &\quad = -\big(f(t)-f(a)\big), \end{aligned}$$

dostáváme konečně (8.77). □

Díky větě 8.45, resp. jejímu důsledku 8.46 je již možné s úspěchem vyšetřovat například okrajové úlohy, ve kterých se hledá funkce, která splňuje na intervalu $[a,b]$ rovnici (8.59) a navíc i nějaké dodatečné podmínky, například dvoubodové podmínky $M\,x(a)+N\,x(b)=0$, kde $M,N\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. To je ale už jiný příběh, který se do tohoto textu, stejně jako řada dalších témat, jako jsou souvislosti s funkcionálně-diferenciálními rovnicemi, dynamickými systémy na tzv. časových škálách (*time scales*), aplikace na úlohy s impulsy a další, už opravdu nevejde. Jako doplňkovou literaturu k této kapitole lze doporučit například monografie [12], [27], [45], [59] nebo články [1], [7], [38], [51], [52].