

VZPOMÍNKOVÉ ODPOLEDNE A SEMINÁŘ
METODA KONEČNÝCH PRVKŮ DNES
KE 100. VÝROČÍ NAROZENÍ PROFESORA

Miloše Zlámal

MEMORIAL AFTERNOON AND SEMINAR
FINITE ELEMENT METHOD TODAY
TO THE 100TH ANNIVERSARY OF PROFESSOR

Miloš Zlámal



Brno, January 15, 2025

© Ing. Antonín Aujeský
Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
Prof. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D., DSc.
Prof. RNDr. Zdeněk Dostál, DSc.
Ing. Jiří Egermaier, Ph.D.
Doc. Ing. Ladislav Janíček, Ph.D., MBA, LL.M.
Ing. Hana Kopincová, Ph.D.
Prof. Ing. Tomáš Kozubek, Ph.D.
Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc.
Doc. RNDr. Václav Kučera, Ph.D.
Prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ing. Jakub Šístek, Ph.D.
Doc. Petr Vašík, Ph.D.
Doc. RNDr. Tomáš Vejchodský, Ph.D.
Prof. RNDr. Jan Franců, CSc. (editor), 2025.

Tato publikace podléhá licenci Creative Commons: [Uved'te autora](#)
— [Neužívejte dílo komerčně](#) — [Nepracovávejte 4.0 Mezinárodní](#)



ISBN 978-80-214-6392-9

Vzpomínkové odpoledne a seminář
Metoda konečných prvků dnes
ke 100. výročí narození profesora
Miloše Zlámala

Memorial Afternoon and Seminar
Finite Element Method today
to the 100th anniversary of Professor
Miloš Zlámal



Brno, January 15, 2025



Busta profesora Miloše Zlámala
od podzimu 2025 ve foyer auly Centra VUT.
Z podnětu rektora Ladislava Janíčka
vytvořil MgA. Tomáš Pavlacký (VUT).

Před sto lety 28. prosince 1924 se narodil Miloš Zlámala, profesor Vysokého učení technického v Brně, zakladatel matematické teorie Metody konečných prvků. Před 20 lety, 12. ledna 2005 se v Centru Vysokého učení technického v Brně konalo *Vzpomínkové odpoledne* k nedožitým osmdesátinám profesora Zlámala. Akci zahájil rektor VUT, prof. Jan Vrbka. Následovaly příspěvky: prof. Alexander Ženíšek (FSI VUT v Brně): *Profesor Zlámala a metoda konečných prvků*, prof. Michal Křížek (MÚ AV ČR Praha): *Superkonvergenční jevy v metodě konečných prvků*, prof. Jiří Kratochvíl (FAST VUT v Brně): *O spolupráci inženýra s matematikem*, Ing. Libor Holuša (FI MU Brno): *O spolupráci programátora s matematikem*, prof. Ivo Marek (FSv ČVUT Praha): *Prof. Zlámala, světový průkopník matematické teorie metody konečných prvků*.

Jednotlivé přednášky v slavnostním prostředí barokní auly byly odděleny varhanními předěly v podání prof. Ing. Jiřího Jana z FEKT VUT. V předsálí bylo možno si prohlédnout výstavku dokumentů a fotografií prof. Zlámala včetně jeho článku, kterým zahájil matematickou teorii MKP. Vzpomínkové odpoledne bylo zakončeno přípitkem s občerstvením v dvoraně Centra VUT. Jednotlivé příspěvky i materiály výstavky lze najít v brožurce *Miloš Zlámala zakladatel matematické teorie metody konečných prvků* vydané nakladatelstvím VUTIUM v roce 2006. Rozšířená brožurka je dostupná na <https://hdl.handle.net/11012/255643>.

Před 10 lety jsme si připomněli nedožité devadesátiny profesora Zlámala 14. ledna 2015. Vzpomínkové odpoledne zahájil rektor VUT, prof. Petr Štěpánek. Následovaly příspěvky: prof. Michal Křížek (MÚ AV ČR, Praha): *Podmínka minimálního úhlu*, prof. Miloslav Feistauer (MFF UK, Praha): *Metoda konečných prvků pro řešení parciálních diferenciálních rovnic s hraničními singularitami*, prof. Jozef Kačúr (FMFI UK, Bratislava): *Riešenia priamych a inverzných úloh transportu v pórovitom prostredí*, prof. Alexander Ženíšek (FSI VUT, Brno): *Profesor Zlámala a já*, Ing. Libor Holuša (Brno): *Pracoviště s počítači pod vedením profesora Zlámala*, Prof. Ivo Marek (MFF UK a FSv ČVUT, Praha): *Několik slov o prvním článku světového písemnictví věnovanému metodě konečných prvků*.

V této tradici pokračuje i Vzpomínkové odpoledne 15. ledna 2025. Protože z přednášejících předchozích odpolední (kromě M. Feistauera, J. Kačúra a M. Křížka) již nikdo není mezi námi, přednášky se zaměřily na metodu konečných prvků dnes. O problémech řešených současnou teorií metody konečných prvků, jejích aplikacích a výpočetních systémech promluvili odborníci z Prahy, Ostravy, Plzně, Bratislavy a VUT.

Seminář zakončil společný slavnostní přípitek Akademickým vínem VUT 2023 v přilehlém foyer, kde bylo možno si na sedmi panelech prohlédnout dokumenty a fotografie ze života Zlámala, počátků počítačů v Brně včetně vzpomínek absolventa VUT Antonína Aujeského (1940-2024) žijícího v Austrálii (zachoval jsem jeho osobitý styl), i z předchozích vzpomínkových odpolední. Odborné přednášky jsou v anglické části sborníku, bohužel prof. Mikula z rodinných zdravotních důvodů svůj příspěvek nedodal. Úplný seznam Zlámalových publikací poskytla knihovna MÚ AV ČR.

Editor

Obsah – Contents

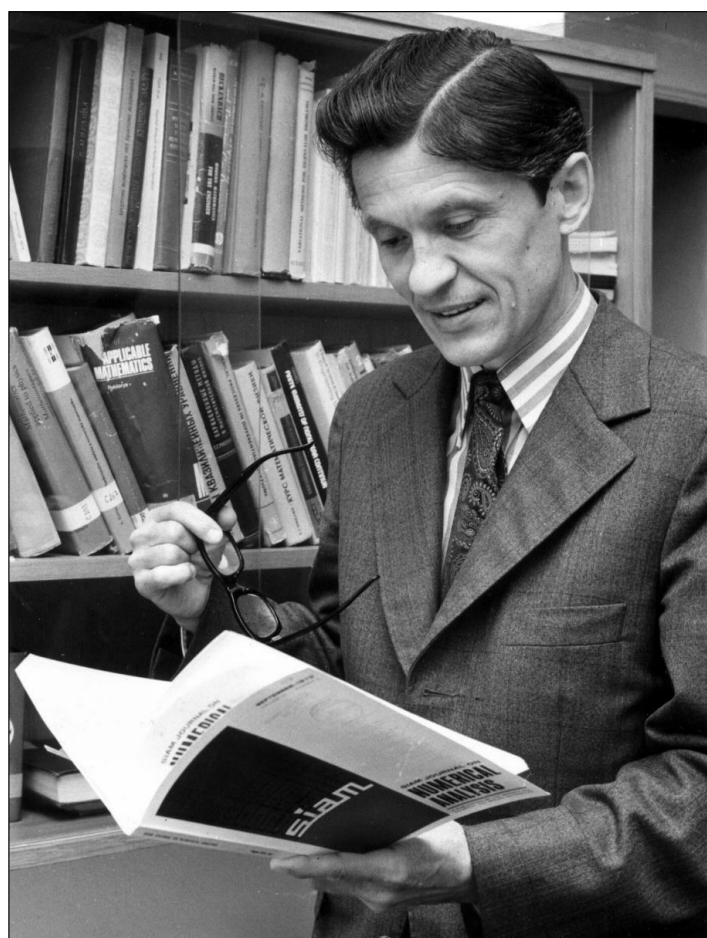
Česká část

Úvodní slovo.....	5
Pozvánka.....	8
Přednášející a anotace přednášek.....	10
Foto ze Vzpomínkového odpoledne 15. ledna 2025.....	14
<i>Ladislav Janíček</i> : Úvodní slovo rektora.....	17
<i>Petr Vašík</i> : Profesor Zlámal a Ústav matematiky.....	19
<i>Jan Franců a Michal Křížek</i> : Profesor Miloš Zlámal — život a dílo	20
<i>Jindřich Petruška</i> : MKP a rozvoj počítačové mechaniky na strojní fakultě VUT v Brně.....	24
<i>Tonda Aujeský</i> : Vzpomínky na VUT — Jak jsme začínali s počítači.....	33
<i>Tonda Aujeský</i> : V zemi klokanů.....	44

English part – Scientific Contributions

Introductory word.....	55
<i>Ladislav Janíček</i> : Rector's address	56
<i>Michal Křížek</i> : Professor Miloš Zlámal – his life and work	57
<i>Václav Kučera</i> : Geometrical conditions in the finite element method.....	69
<i>Tomáš Vejchodský</i> : Adaptive mesh refinement and <i>a posteriori</i> error estimates ..	78
<i>Vít Dolejší</i> : Finite element <i>hp</i> -methods for PDEs.....	89
<i>Tomáš Kozubek</i> : From HPC to Quantum at IT4Innovations	100
<i>Zdeněk Dostál</i> : From direct solvers to hybrid TFETI domain decomposition for solving huge 3D elastic problems.....	107
<i>Jakub Šístek</i> : Parallel implementation of immersed boundary adaptive FEM or how to avoid mesh generation in a mesh-based method	112
<i>Marek Brandner, Jiří Egermaier, Hana Kopincová</i> : Numerical techniques for conservation laws: continuous and discontinuous approximations.....	118
Complete list of Zlámal's publications.....	126

**Vzpomínkové odpoledne a seminář
k 100. výročí narození profesora
Vysokého učení technického v Brně
Miloše Zlámalu**



**Zakladatel matematické teorie
metody konečných prvků
a metoda konečných prvků dnes
středa 15. ledna 2025, 12 – 19 hod.
Aula centra VUT, Antonínská 1, Brno**

Program

- 13:00 Doc. Ing. Ladislav Janíček, Ph.D., MBA, LL.M.
Úvodní slovo rektora VUT
- 13:10 Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc.
Profesor Miloš Zlámal – život a dílo
- 14:00 Doc. RNDr. Václav Kučera, Ph.D.
Geometrické podmínky v MKP
- 14:20 Doc. RNDr. Tomáš Vejchodský, Ph.D.
Adaptivní zjemňování sítě a aposteriorní odhady chyby
- 14:40 Prof. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D., DSc.
hp-metody konečných prvků pro parciální diferenciální rovnice
- 15:00 – 15:40 – přestávka
- 15:40 Prof. Ing. Tomáš Kozubek, Ph.D.
Vývoj HPC systémů pro řešení inženýrských úloh
- 16:00 Prof. RNDr. Zdeněk Dostál, DSc.
Hybridní FETI pro řešení velkých soustav problémů diskretizovaných MKP
- 16:20 Ing. Jakub Šístek, Ph.D.
Paralelní implementace adaptivní MKP s vnořenou hranicí aneb jak se vyhnout síťování
- 16:40 Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
Spojité a nespojité aproximace řešení v numerických metodách pro zákony zachování
- 17:00 Prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.
MKP v spracovaní obrazu
- 17:20 Prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
MKP a rozvoj počítačové mechaniky na strojní fakultě VUT v Brně
- 17:40 Zakončení
- 18:00 Přípitek
- Varhanní přechody – Prof. Ing. Jiří Jan, CSc.



Přednášející a anotace přednášek



Foto Václav Koníček

Doc. Ing. Ladislav Janíček, Ph.D.
(Rektor Vysokého učení technického)
Úvodní slovo rektora



Doc. Petr Vašík, Ph.D.
(Ředitel Ústavu matematiky FSI VUT)
Prof. Zlámal a Ústav matematiky



Prof. RNDr. Michal Krížek, DrSc.
(Matematický ústav, Akademie věd ČR, Praha)
Profesor Miloš Zlámal - život a dílo

Anotace: V úvodu přednášky si promítneme krátké video z části přednášky, kterou měl prof. Miloš Zlámal (1924-1997) na University of Jyväskylä ve Finsku v roce 1993 a připomeneme si stručný životopis prof. Zlámala. Poté se soustředíme na nejdůležitější matematické problémy, kterými se zabýval, jako například numerické řešení polovodičových rovnic, křivočaré konečné prvky či superkonvergenci metody konečných prvků. Prof. Zlámal byl také jedním z prvních numerických matematiků, kteří vyvinuli takzvané přechodové konečné prvky.



Doc. RNDr. Václav Kučera, Ph.D.
(Katedra numerické matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha)
Geometrické podmínky v MKP

Anotace: Uplynulo již více než půl století od chvíle, kdy Miloš Zlámal položil základy matematické teorii konvergence metody konečných prvků. Přesto základní Zlámalova otázka – kdy vlastně MKP konverguje – zůstává stále nezodpovězena i v nejjednodušším případě. V tomto krátkém příspěvku si povíme o post-Zlámalovských snahách najít geometrické podmínky na výpočetní síti zaručujících konvergenci MKP, jaká jsou s tím spojená překvapení a úskalí a zkusíme nahlédnout i do budoucnosti MKP.



Doc. RNDr. Tomáš Vejchodský, Ph.D.

(Matematický ústav, Akademie věd ČR, Praha)

Adaptivní zjemňování sítě a aposteriorní odhady chyby

Anotace: Adaptivní algoritmus umožňuje optimalizovat síť konečných prvků v průběhu výpočtu a tím dosáhnout požadované přesnosti řešení pokud možno co nejrychleji. Klíčovou roli v tomto algoritmu hrají aposteriorní odhady chyby, které umožní identifikovat části výpočetní oblasti, kde je velká chyba a kde je nutné zjemnit síť. Navíc dávají kvantitativní informaci o velikosti chyby a umožňují tak zastavit výpočet v okamžiku, kdy je dosažena požadovaná přesnost.



Prof. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D., DSc.

(Katedra numerické matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha)

hp-metody konečných prvků pro parciální diferenciální rovnice

Anotace: Nespojité Galerkinova metoda jako zobecnění klasických MKP, adaptivita a aplikace pro problémy mechaniky tekutin: obtékání profilů v aerodynamice, proudění v atmosféře a proudění v porézních prostředích.

← Foto Václav Koníček



Prof. Ing. Tomáš Kozubek, Ph.D.

(IT4Innovations, VŠB Technická univerzita Ostrava)

Vývoj HPC systémů pro řešení inženýrských úloh

Anotace: Vysokovýkonné výpočetní systémy (HPC) představují zásadní nástroj pro řešení komplexních inženýrských úloh, které vyžadují mimořádný výpočetní výkon a rozsáhlé paměťové a diskové kapacity. Tento příspěvek se zaměřuje na nejnovější pokroky a trendy ve vývoji HPC systémů, s důrazem na jejich aplikaci v různých oblastech inženýrství. Příspěvek rovněž poskytne podrobný přehled o současných možnostech využití superpočítačů v České republice i v rámci Evropské unie, včetně konkrétních případových studií, které demonstrují praktické přínosy těchto technologií pro inženýrskou praxi.



Prof. RNDr. Zdeněk Dostál, DSc.

(Fakulta elektrotechniky a informatiky, VŠB Technická univerzita Ostrava)

Hybridní FETI pro řešení velkých soustav problémů diskretizovaných MKP

Anotace: V úvodu připomeneme metody řešení MKP soustav v době prof. Zlámala a jejich reálnou efektivnost. Stručně projdeme nástup iteračních metod a budeme se věnovat masivně paralelním metodám rozložení oblasti, zejména hybridním FETI (BETI) metodám, které používají hrubou síť rozloženou mezi primární a duální proměnné. Jejich efektivnost bude demonstrována na řešení soustav s miliardami neznámých.

Pro nemoc autora se přednáška nekonala, foto z roku 2019



Ing. Jakub Šístek, Ph.D.

(Matematický ústav, Akademie věd ČR, Praha)

Paralelní implementace adaptivní MKP s vnořenou hranicí aneb jak se vyhnout síťování v metodě na síti založené

Anotace: Metoda konečných prvků s vnořenou hranicí představuje atraktivní přístup k simulacím, který se vyhýbá diskretizaci geometrie. To může být náročné a zdoluhavé pro složité geometrie, ale i pro velké adaptivně zjemňované sítě rozdělené na mnoho částí na paralelním počítači. Budu prezentovat náš přístup k implementaci a paralelizaci jedné takové metody, která kombinuje popis oblasti pomocí levelsetové funkce, adaptivní zjemnění sítě a řešení výsledné soustavy rovnic pomocí víceúrovňové metody rozkladu oblasti. Ukážu výsledky testu pro řešení benchmarkových, ale i inženýrských úloh s několika tisíci subdoménami.



Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.

(Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd ZČU, Plzeň)

Spojitě a nespojitě aproximace řešení v numerických metodách pro zákony zachování

Anotace: V současné době existuje velmi velké množství numerických přístupů pro řešení úloh pro zákony zachování (od metody konečných diferencí, přes různé verze metody konečných prvků až po spektrální metody). V příspěvku se budeme stručně věnovat jedné z občas diskutovaných otázek: je vhodnější aproximovat řešení spojitou nebo nespojitou funkcí?



Prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.

(Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebná fakulta STU v Bratislave)

MKP v spracovaní obrazu

Anotácia: V prednáške ukážeme využitie metódy konečných prvkov a z nej odvodených numerických algoritmov na riešenie nelineárnych difúzných rovníc v analýze statického a dynamického obrazu. Metódy budú zahŕňať biologické a environmentálne aplikácie, spracovanie a analýzu videí z konfokálnych mikroskopov, zachytávajúcích vývoj bunkového rodostromu pri embryogenéze, ako aj automatickú klasifikáciu chránených biotopov Natura 2000 na báze satelitných optických dát.



Prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.

(Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně)

**MKP a rozvoj počítačové mechaniky na
strojní fakultě VUT v Brně**

Anotace: V příspěvku uvedeme hlavní etapy začlenění MKP do odborné a pedagogické práce ústavu mechaniky těles FSI VUT v Brně. Ukážeme typické problémy, řešené v uplynulých desetiletích i techniku, se kterou jsme v té době pracovali. Zmíníme i postupné začlenění MKP a počítačů do výuky základních kurzů mechaniky na strojní fakultě. Připomeneme tak vývoj, kterým v souvislosti s nástupem počítačové techniky a MKP prošla všechna obdobná vysokoškolská pracoviště od šedesátých let 20. století do současnosti.



Přednášející zleva: Jakub Šístek, Michal Křížek, Vít Dolejší, Marek Brandner, Václav Kučera,
Tomáš Kozubek, Tomáš Vejchodský, Karol Mikula a Jindřich Petruška.

Foto ze Vzpomínkového odpoledne

Přednášky v neobarokním sále



Foto Václav Koníček a Jan Franců (JF)



Michal Křížek



atmosféra neobarokního sálu s varhany



Tomáš Vejchodský



Ivo Zlámal (JF)
syn prof. Zlámal



Aleš Zlámal
synovec prof. Zlámal



Jan Franců
organizátor a moderátor



Jiří Jan (JF)
hrál varhanní předěly

Přestávka s kávou a výstavkou



Foto Václav Koníček a Jan Franců (JF)



Vladislav Kozák, Mojmír Šob



Petra Rozehnalová, Pavel Štarha



Jan Čermák, Bohumil Maroš



Tomáš Vejchodský, Zuzana Došlá (JF)



Přípitek vínem VUT 2023



Foto Jan Franců



Ivan Dírer, Libor Čermák, Marcela Benešová,
Antonín Dvořák, Michal Krížek



Pavel Vařejka, Karol Mikula



Vítězslav Veselý, Jiří Vala



Ivan Dírer, Jiří Vala, Marcela Benešová

Úvodní slovo rektora

LADISLAV JANÍČEK

Vážené dámy, vážení pánové,

Je mi velkým potěšením, že tu mohu být s Vámi na vzpomínkovém setkání při příležitosti 100. výročí narození pana profesora Miloše Zlámala. Je úžasné vidět na tomto setkání tolik osobností nejen naší univerzity, ale i předních univerzit z České republiky, Slovenska i ze zahraničí. Je to svědectvím toho, že jméno pana profesora Zlámala je stále živé v myslích těch, kdo jej znali i těch, kteří poznali jeho odkaz.

Vystudoval jsem na Vysokém učení technickém v Brně obor stavba letadel na tehdejší Katedře letadel (dnes Leteckém ústavu) Fakulty strojního inženýrství. Po absolvování studia jsem měl velké štěstí, neboť díky panu Ing. Antonínu Píšťkovi, pozdějším profesorovi a řediteli Leteckého ústavu, se kterým jsem se setkal u státní závěrečné zkoušky, se mi dostalo úžasné příležitosti jít pracovat do jednoho z největších leteckých podniků v zemi, do státního podniku LET Kunovice.

Nastupoval jsem tehdy do toho snad nejprestižnějšího oddělení, o kterém si snad do letadel nadšený mladý inženýr mohl tehdy nechat pouze snít — do oddělení statických výpočtů leteckých konstrukcí a jeho skupiny vývoje pevnostních výpočtových metod. Vedoucím celého oddělení byl tehdy právě pan Antonín Píštěk.

LET Kunovice (dnes Aircraft Industries) byl v té době naprosto jedinečným špičkovým výpočtovým centrem a centrem vývoje pokročilých výpočtových metod v leteckém průmyslu v celém tehdejší Československu. Byl tu vyvinut mimo jiné systém SAVLE pro výpočty aerodynamického zatížení letadel a především systém SOFEM pro pevnostní výpočty leteckých konstrukcí metodou konečných prvků. Hlavními autory systému SOFEM byli právě pan Ing. Antonín Píštěk, CSc., a jeho kolega, pan Ing. Rudolf Böhm, můj první přímý nadřízený.

Vše tehdy bylo programováno v jazyce FORTRAN. Psal se rok 1989 a v tu dobu začaly nastupovat UNIXové systémy a také jazyk C. A tak jsem dostával svoje první úkoly programovat pevnostní výpočtové aplikace v jazyce C a transformovat a propojovat některé fortranovské moduly systému SOFEM v tomto programovacím jazyce.

Právě tehdy jsem často slýchal jméno pana profesora Miloše Zlámala, ale také jeho spolupracovníků, pánů Jiřího Kratochvíla a Alexandra Ženíška, později také profesorů. A posledního z jmenovaných jsem měl možnost i osobně poznat, mimochodem u přijímací zkoušky na doktorské studium. Po necelých dvou letech v LET Kunovice jsem se totiž vrátil zpět na Vysoké učení technické v Brně na Katedru letadel a stal jsem se odborným asistentem pro stavební mechaniku leteckých konstrukcí a konstrukci a pevnost letadel.

To už jsem ovšem o MKP a jeho historii věděl mnohem více a profesor Zlámal byl pro mne legendou a obdivovanou odbornou autoritou. Když mne pan profesor Miroslav Doupovec, prorektor pro studium, zprostředkoval setkání s panem profesorem Janem Franců, který přišel s návrhem na tento vzpomínkový akt na profesora Zlámala, vůbec jsem nezaváhal.

Jsem přesvědčen, že VUT nesmí zapomínat na svoje osobnosti a u pana profesora Zlámala to platí násobně. Inicioval jsem také vznik galerie nejvýznamnějších osobností naší univerzity,

kteřou ozdobíme naše univerzitní prostory a s umělci naší Fakulty výtvarných umění právě pracujeme na bustě pana profesora Zlámala, kterou věřím, že v brzké době odhalíme.

Současně jsem požádal pana prof. Doupovce zvážení možnosti přípravy publikace o dobrodružství, kterým prošel vývoj metod konečných prvků, a kterak se z původně intuitivní inženýrské metody zrodil dnes v nejrůznějších variantách konečných prvků či konečných objemů nezastupitelný výpočtový nástroj pevnostními výpočty počínaje a aerodynamickými nekonče.

Skutečnost, že k rozvoji těchto metod významně přispěla naše univerzita je naprosto unikátní. S úctou a hrdostí vzhlížím k osobnosti pana profesora Zlámala a vyjadřuji k jeho odkazu hluboký obdiv. Učiním vše, abychom jeho odkaz i jméno spolu s odkazem a jmény jeho spolupracovníků, pánů profesorů Jiřího Kratochvíla a Alexandra Ženíška na naší univerzitě, a nejen na ní, patřičně připomínali, ale také abychom je učinili vzorem pro tvůrčí práci dalších generací našich akademických a výzkumných pracovníků.

Profesor Zlámal a Ústav matematiky

PETR VAŠÍK

Vážený pane rektore, vážení hosté,

jen velmi krátce přednesu zdravici za Ústav matematiky. Jsem ředitel Ústavu matematiky Fakulty strojního inženýrství, kde profesor Zlámal působil, ale i když to tak možná nevypadá, já jsem ho osobně z časových důvodů nezažil. Jeho jméno ale bylo vždy na ústavu patrné a zmiňované. Jeho působení na katedře matematiky začalo v roce 1990, kdy profesor Zlámal přešel s vědeckou skupinou profesorem Ženíškem, docentem Nedomou, docentem Liborem Čermákem, Janem Franců a dalšími z Oblastního výpočetního centra VUT (dřívější Laboratoře počítačových strojů) na tehdejší katedru matematiky fakulty strojní. Zahájil vstup ústavu matematiky, tenkrát ještě katedry, mezi uznávaná etablovaná matematická pracoviště.

Pro nás v současné době, kromě samozřejmě toho, že u nás byla zavedena metoda konečných prvku, je zásadní to, že vědecká váha profesora Zlámala přispěla k akreditaci studijního programu Matematické inženýrství, který nadále předává matematické dovednosti dalším generacím. Studijní program je pořád prestižním oborem, jakým byl v době svého založení. Dá se to demonstrovat například na tom, že prvním předsedou státnicové komise byl profesor Jaroslav Kurzweil.

Jméno profesora Zlámala nese dodnes pořádaný seminář, který profesor Zlámal založil v 60. letech pod názvem Seminář z numerických metod a na jehož udržení má obrovskou zásluhu právě profesor Franců, který seminář spravuje dodnes.

Na závěr bych jen dodal, že odkaz profesora Zlámala se snažíme udržovat i nadále už jenom tím, že stejně jako například mí předchůdci, profesor Ženíšek nebo profesor Šlapal, dbáme na vysokou vědeckou úroveň a předáváme mladým lidem poznatky z kvalitní matematiky.

Děkuji za pozornost.

Profesor Miloš Zlámal – život a dílo

JAN FRANCŮ A MICHAL KŘÍŽEK

Stručný životopis

Miloš Zlámal se narodil 30. prosince 1924 ve Zborovicích na Kroměřížsku. Jeho otec ing. František Zlámal byl ze statkářské rodiny a matka rozená Zbořilová ze selské. Rodina ještě před narozením jeho mladšího bratra Jaromíra (1926–2010) se přestěhovala do Brna. V letech 1936–1945 Miloš studoval na 3. reálném gymnáziu v Brně. Studium musel ovšem přerušit, protože v letech 1944–1945 byl totálně nasazen ve Vratislavi.

Dne 6. 2. 1946 se zapsal na Přírodovědeckou fakultu Masarykovy univerzity. Studium ukončil 10. 2. 1949 a získal titul RNDr. V období 1950–1951 byl aspirantem v Matematickém ústavu Československé akademie věd (ČSAV) v Praze. V letech 1951–1952 absolvoval základní vojenskou službu, během níž se 19. 1. 1952 oženil s Ludmilou rozenou Vichrovou. Měli spolu dva syny Iva (*1954) a Martina (*1963).

V roce 1955 získal v Matematickém ústavu ČSAV vědeckou hodnost kandidáta věd CSc. obhájením práce: *Studium oscilačních a asymptotických vlastností řešení diferenciálních rovnic* pod vedením prof. Otakara Borůvky. Docentem byl jmenován 1. 6. 1956 na Přírodovědecké fakultě v Brně.

V roce 1956 se stal zakládajícím členem redakční rady nově vzniklého časopisu *Aplikace matematiky* (později přejmenovaného na *Applications of Mathematics*), který dodnes vydává Matematický ústav Akademie věd. V redakční radě působil až do roku 1992.

Dne 1. 9. 1961 přestoupil na Fakultu strojní VUT v Brně, stal se vedoucím nově založené *Laboratoře počítačích strojů* a od roku 1963 do 1990 byl jejím ředitelem. ČSAV mu 17. 3. 1963 udělila vědeckou hodnost doktora věd DrSc. a 28. 5. 1965 byl jmenován profesorem matematiky. Dne 16. 3. 1981 byl zvolen členem korespondentem ČSAV.

O jeho výjimečnosti svědčí také skutečnost, že ač nestraník funkci ředitele zastával 27 let a v letech 1983–1992 byl předsedou vědeckého kolegia pro matematiku ČSAV. V době normalizace měl odvahu přijmout do své laboratoře i pracovníky, kteří byli režimu nepohodlní. Pod jeho vedením se *Laboratoř počítačích strojů* (později *Oblastní výpočetní centrum*) stala nejvýznamnějším ústavem tohoto typu v zemi a sehrála klíčovou roli při zavádění výpočetních metod a počítačů do praxe nejen v rámci VUT, ale i do výzkumných ústavů a výrobních závodů.



Foto svatební



Foto okolo r. 1955

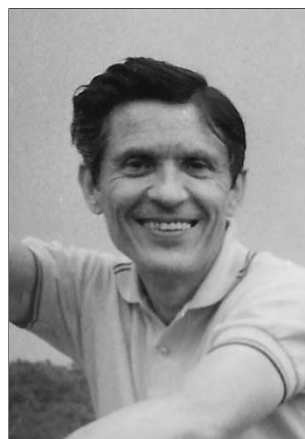
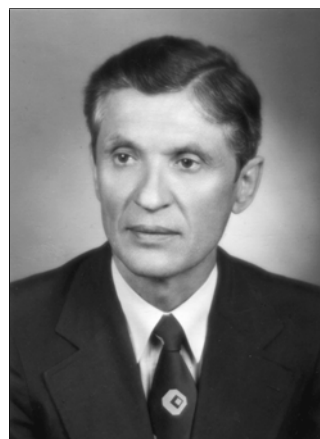


Foto okolo r. 1970



1990 foto archiv rodiny

V letech 1964 a 1981 přednášel v USA, v letech 1976/77 v Novosibirsku a v roce 1986 v Pekingu, v roce 1972 v Londýně, 1973 v Dundee, v roce 1975 v Claustalu (Německo) a Římě. Zúčastnil se řady tuzemských i zahraničních vědeckých konferencí, udržoval styky s předními matematickými pracovišti ve světě.

V roce 1990 přestoupil na Katedru matematiky Fakulty strojní VUT. Svojí vahou podpořil vznik nového studijního programu *Matematické inženýrství*. V roce 1995 odešel do důchodu. Profesor Zlámal náhle zemřel v Brně dne 22. 6. 1997.

Připomeňme si některá jeho významná ocenění. V roce 1969 získal Bronzovou pamětní medaili VUT a v roce 1974 mu prezident ČSSR udělil Státní cenu Klementa Gottwalda *za vypracování a rozvinutí matematické teorie metody konečných prvků a její aplikace*. V roce 1979 mu Prezidium ČSAV udělilo Stříbrnou plaketu Bernarda Bolzana *za zásluhy o rozvoj matematických věd* a v roce 1984 získal ještě Zlatou plaketu Bernarda Bolzana. Mezi jeho největší vědecká uznání nepochybně patří udělení čestného doktorátu na Technische Universität v Drážďanech v roce 1984. V témže roce byl oceněn i Zlatou pamětní medailí VUT v Brně. V roce 1987 byl zvolen čestným členem Jednoty československých matematiků a fyziků. V roce 1992 obdržel Pamětní medaili Univerzity Karlovy *za významný příspěvek k rozvoji a aplikaci metody konečných prvků*. Další jeho ocenění jsou uvedena v brožurce [2, str. 47].

Dílo

Uveďme nejdůležitější matematické problémy, kterými se profesor Miloš Zlámal zabýval. V padesátých a šedesátých letech se věnoval především studiu vlastností analytických řešení obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic. Pak se postupně čím dále, tím více koncentroval na jejich numerická řešení. Šlo zejména o numerickou integraci a metodu konečných diferencí.

V roce 1967 se prostřednictvím inženýra Jiřího Kratochvíla seznámil s poměrně novou empirickou inženýrskou metodou zvanou *metoda konečných prvků*, která se výborně hodila pro řešení problémů mechaniky kontinua. Tato metoda umožňovala numericky počítat např. mechanická napětí a posunutí rámových konstrukcí, viz [2, str. 12–18]. Zlámalovi se metoda tak zalíbila, že již v roce 1968 publikoval jako první na světě článek o matematické teorii metody konečných prvků, viz [7]. V něm dokázal její konvergenci za podmínky, že všechny úhly v triangulaci vyšetřované oblasti jsou zdola ohraničeny jednou pevnou kladnou konstantou. Tento článek je dodnes hojně citován a významně ovlivnil rozvoj numerických metod v tomto i minulém století.



Zlatou plaketu B. Bolzana předává akademik Ryš



Čestný doktorát Technické Univerzity Drážďany

Další stěžejní práce Miloše Zlámalu [9] se týkala aproximace křivočaré hranice vyšetřované oblasti pomocí tzv. křivočarých prvků. Podle americké databáze MathSciNet je to jedna z nejcitovanějších Zlámalových prací. V ní je zaveden ideální konečný prvek, který umožňuje dokonalé rozdělení vyšetřované oblasti na prvky.

Prof. Zlámal byl také jedním z prvních numerických matematiků, kteří vyvinuli takzvané přechodové konečné prvky. Ty se používají tam, kde jedna část vyšetřovaná oblasti je pokryta jiným typem konečných prvků než jiná část. Jde kupříkladu o přechodové konečné prvky umožňující spojitě napojení lineárních prvků na prvky kubické, viz [8].

Velkých úspěchů dosáhl prof. Zlámal v oblasti superkonvergence metody konečných prvků, viz série článků [3, 10, 11]. Dále se zabýval metodou konečných prvků pro numerické řešení rovnice vedení tepla, pro výpočet magnetického pole, pro přibližné řešení polovodičových rovnic aj., viz [6, 12, 13, 14, 15, 16].

Prof. Miloš Zlámal naprosto jednoznačně patří ke špičkovým světově uznávaným numerickým matematikům. Své teoretické výsledky dokládal numerickými výsledky, které mu počítal Libor Holuša. Byl jedním ze zakladatelů slavné brněnské školy metody konečných prvků, viz např. [1, 4, 5, 6, 17, 18]. Kromě Zlámalu její jádro tvořili zejména Libor Čermák, Libor Holuša, Vladimír Kolář, Stanislav Koukal, Jiří Kratochvíl, František Leitner, František Melkes, Josef Nedoma, Alexander Ženíšek a další. Zlámalovo rozsáhlé dílo výrazně přispělo k efektivnímu numerickému řešení problémů matematické fyziky.

Podrobnější popis vědeckých výsledků profesora Zlámalu je uveden v anglické části tohoto sborníku na stránkách 58–68. Seznam všech jeho vědeckých publikací je na konci sborníku.

Literatura

- [1] *L. Čermák, M. Zlámal*: Finite element solution of a nonlinear diffusion problem with a moving boundary, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **20** (1986), 403–426.
- [2] *J. Franců (ed.)*: Miloš Zlámal, zakladatel matematické teorie metody konečných prvků, *VUTIUM*, Brno, 2006.
- [3] *P. Lesaint, M. Zlámal*: Superconvergence of the gradient of finite element solutions, *RAIRO Anal. Numér.* **13** (1979), 139–166.
- [4] *V. Kolář, J. Kratochvíl, F. Leitner, A. Ženíšek*: Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, *STNL*, Praha, 1972.
- [5] *V. Kolář, J. Kratochvíl, M. Zlámal, A. Ženíšek*: Technical, physical and mathematical principles of the finite element method, *Rozpravy ČSAV*, Praha, 1971.
- [6] *F. Melkes, M. Zlámal*: Numerical solution of nonlinear quasi-stationary magnetic fields, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **19** (1983), 1053–1062.
- [7] *M. Zlámal*: On the finite element method, *Numer. Math.* **12** (1968), 394–409.
- [8] *M. Zlámal*: The finite element method in domains with curved boundaries, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **5** (1973), 367–373.
- [9] *M. Zlámal*: Curved elements in the finite element method, *SIAM J. Numer. Anal.* **10** (1973), 229–240.

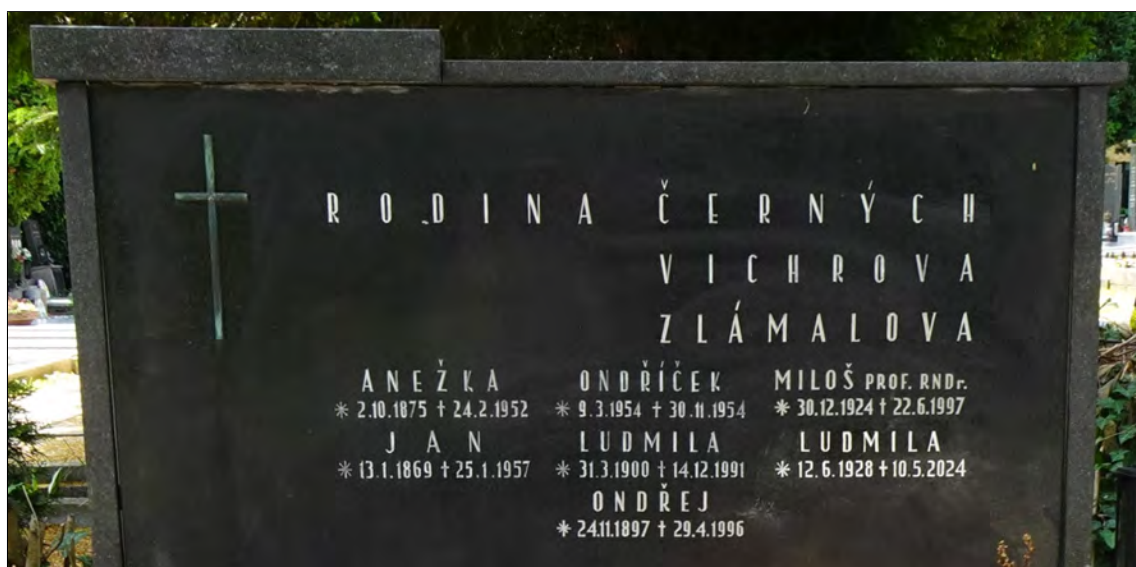
- [10] *M. Zlámal*: Some superconvergence results in the finite element method, LN in Math. 606, Springer, 1977, 353–362.
- [11] *M. Zlámal*: Superconvergence and reduced integration in the finite element method, Math. Comp. **32** (1978), 663–685.
- [12] *M. Zlámal*: A finite element solution of the nonlinear heat equation, RAIRO Anal. Numér. **14** (1980), 203–216.
- [13] *M. Zlámal*: Finite element solution of quasistationary nonlinear magnetic fields, RAIRO Anal. Numér. **16** (1982), 161–191.
- [14] *M. Zlámal*: A linear scheme for the numerical solution of nonlinear quasi-stationary magnetic fields, Math. Comp. **41** (1983), 425–440.
- [15] *M. Zlámal*: Finite element solution of the fundamental equations of semiconductor devices, Part I. Math. Comp. **49** (1986), 27–43.
- [16] *M. Zlámal*: Finite element solution of the fundamental equations of semiconductor devices, Part II. Appl. Math. **46** (2001), 251–294.
- [17] *A. Ženíšek*: The convergence of the finite element method for boundary value problems of a system of elliptic equations, (Czech), Apl. Mat. **14** (1969), 355–377.
- [18] *A. Ženíšek, M. Zlámal*: Convergence of a finite element procedure for solving boundary value problems of the fourth order, Internat. J. Numer. Methods Engrg. **2** (1970), 307–310.

Prof. RNDr. Jan Franců, CSc., je profesorem Ústavu matematiky Fakulta strojního inženýrství VUT, Technická 2, 616 69 Brno, e-mail: francu@fme.vutbr.cz.

Prof. RNDr. Michal Krížek, DrSc., je profesorem Matematického ústavu Akademie věd České republiky, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: krizek@math.cas.cz.

Poděkování.

Druhý autor byl podpořen grantem GAČR 24-10586S a projektem RVO 67985840.



Hrob profesora Zlámala, Ústřední hřbitov v Brně, skupina 9.

MKP a rozvoj počítačové mechaniky na strojní fakultě VUT v Brně

JINDŘICH PETRUŠKA

Title: FEM and the development of computer mechanics at the Faculty of Mechanical Engineering of the Brno University of Technology.

Abstract: In this contribution, we present the main stages of the integration of FEM into the professional and pedagogical work of the Institute of Solid Mechanics of the Faculty of Mechanical Engineering of the Brno University of Technology. The gradual integration of FEM and computers into the teaching of basic courses of mechanics at the Faculty of Mechanical Engineering will also be mentioned. We will thus recall the characteristic development that all similar university workplaces have undergone in connection with the advent of computer technology and FEM from the 1960s to the present.

1. Úvodem

Jako počátek rozvoje a využívání MKP bývá uváděna publikace článku [1] v roce 1956. Její pronikání do tehdejšího Československa a na VUT v Brně bylo poněkud komplikováno díky závislosti na rozvoji počítačové techniky, jejíž úroveň u nás bohužel za hospodářsky vyspělými státy v té době zaostávala. Konkrétně na VUT jsou počátky počítačové techniky spojeny s Laboratoří počítačích strojů, která byla založena v roce 1959 rozhodnutím rektora při katedře matematiky FS VUT v Brně, od roku 1961 pak jako samostatné pracoviště. Laboratoř využívala při své práci nejdříve počítače instalované v Praze, a to hlavně sovětský počítač **URAL 1** na ministerstvu chemického průmyslu. V roce 1961 byl v laboratoři uveden do provozu malý samočinný počítač **LGP-30** z USA, první na celé Moravě.

Dalším mezníkem byl rok 1966, kdy zahájil zkušební provoz malý sovětský počítač **MINSK 22** a zejména byl zakoupen švédský střední počítač **DATASAB D 21**. Na tomto stroji byly již programovány algoritmy Metody konečných prvků, jejímž průkopníkem na VUT byl Ing. Jiří Kratochvíl, pozdější profesor stavební fakulty VUT. Podle jeho vzpomínek bylo i pro něj prvotní inspirací právě studium článku [1]. Šťastné spojení inženýrů ve skupině prof. Kratochvíla s tehdejšími řediteli laboratoře, matematikem prof. Zlámallem, vedlo nejen k řešení prvních praktických inženýrských problémů, ale i k celosvětově významnému vkladu do teorie MKP. Tím se stala publikace proslulého článku profesora Zlámalu [2], která v roce 1968 položila základy rigorózní matematické teorie MKP se širokým mezinárodním ohlasem.

Úspěch prof. Zlámalu vynikne ještě více, pokud si připomeneme podmínky, kterým byly věda a školství v tehdejší Československu vystaveny. Nejlépe to dokumentuje citace z projevu poslance Slobody k projednávanému návrhu novely VŠ zákona na 10. schůzi Národního Shromáždění ve středu 16.3.1966: „Domnievam sa, že krátkodobé cesty učiteľov vysokých škôl do zahraničia, ktorých účelom má byť vedecký výskum, treba úplne eliminovať. Mám tu na mysli krátkodobé „vedecké“ cesty, nejde mi pochopiteľne o vzájomné návštevy učiteľov vysokých škôl v rámci družby a pod.“

2. Počítače a MKP v problémech strojařské mechaniky



Obr. 1 Ondráček u počítače EMR 6070.

počítač PDP 11/70. Jeho výkonové parametry umožňovaly paralelní obsluhu přibližně deseti uživatelům, kteří komunikovali s centrální jednotkou pomocí alfanumerických a několika grafických terminálů. Ty byly umístěny v kancelářích i mimo vlastní počítačové centrum a stylem práce tak předjímaly pozdější nástup osobních počítačů. Díky spolupráci s podnikem se žďárské pracoviště stalo po řadu dalších let místem, kde probíhal další vývoj i praktické nasazení programů MKP z dílny pracovníků katedry mechaniky strojí fakulty.

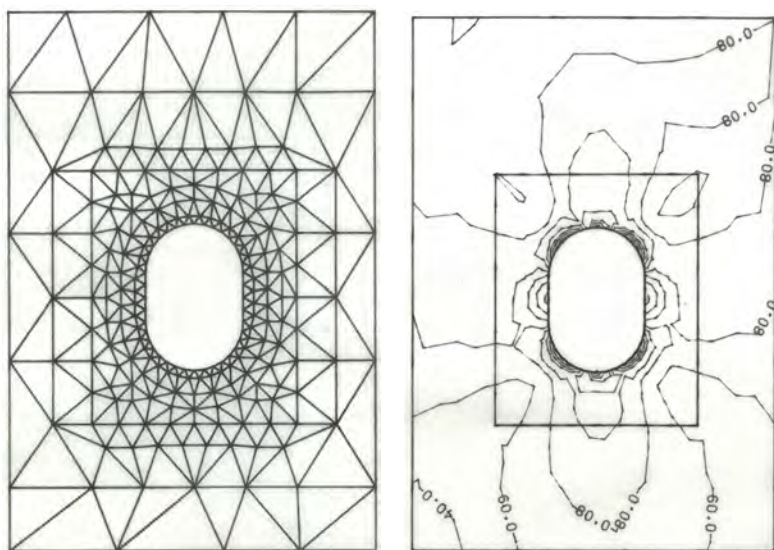
Nutnost dojíždění mimo Brno byla bohatě vyvážena novým stylem práce. Tvůrčí pracovník měl nyní svůj terminál k dispozici po celou pracovní směnu, odpadlo pracné děrování štítků, ladění a programové změny bylo možno provádět přímo na místě z klávesnice a výsledky okamžitě kontrolovat na testovacích úlohách. Proti omezeným přidělům strojového času na starších sálových počítačích to byl skok do úplně nové éry.

Podstatně se rozšířilo i využívání vyvinutých programů MKP pro řešení praktických

Ústav mechaniky, dříve Katedra technické mechaniky, pružnosti a pevnosti Strojní fakulty, byl po Laboratoři počítačích strojů a Stavební fakultě dalším z pracovišť, kde se počítače a MKP začaly intenzivně využívat. Hlavní postavou tohoto procesu byl doc. Emanuel Ondráček, pozdější profesor a první porevoluční rektor VUT. Hrál zde podobnou roli iniciátora a hlavního hybatele jako prof. Kratochvíl na FAST VUT.

Dobová fotografie z konce 70. let (Obr. 1) zachycuje doc. Ondráčka u řídicího panelu sálového počítače **EMR 6070** v podniku Geofyzika Brno. Jednalo se o verzi **IBM 360**, ve své době nejvýkonnější počítač v Brně, využívaný primárně pro seismické výpočty. Kolektiv okolo doc. Ondráčka zde na základě smluvní spolupráce v rámci státních úkolů vyvíjel první programy MKP SADUR a SADUS, které řešily nejen statiku rovinných a rotačně symetrických konstrukcí, ale i jejich dynamiku při rychlém, rázovém zatěžování.

Počátkem 80. let byl v oddělení technických výpočtů koncernového podniku Žďas-Vítkovice instalován mini-

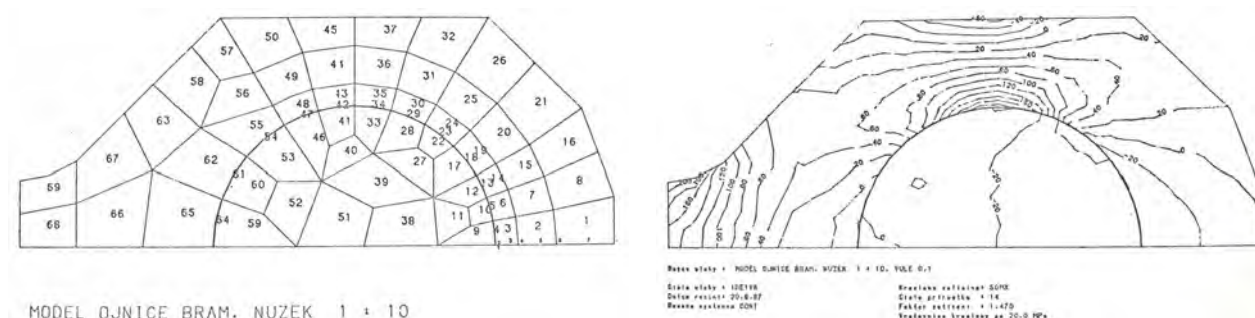


Obr. 2 Detail rámu lisu, síť a izolinie napětí.

problémů podniku. Šlo o konstrukce rozměrných tvářecích strojů, rovnaček, kovacíh manipulatorů a dalších. Od rovinných úloh (Obr. 2) se postupně přešlo k řešení prostorových konstrukcí (Obr. 3), byť z dnešního pohledu šlo stále o jednoduché konstrukční podskupiny s omezeným počtem prvků. Byly odladěny a začaly se řešit i jednoduché kontaktní úlohy jako první příklad nelinearit. Na Obr. 4 je to příklad kontaktní napjatosti mezi okem a čepem ojnice bramových nůžek.

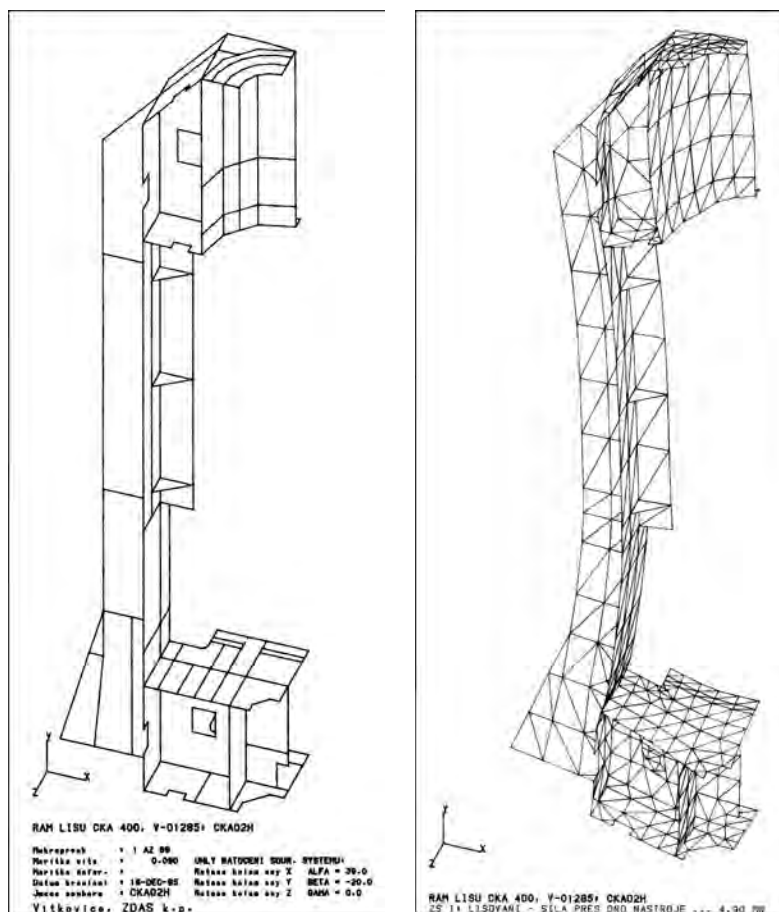
Zcela novou kvalitu přinesl nástup osobních počítačů na konci 80. let. U nás se v počátcích jednalo o šestnáctibitové systémy TNS z JZD Slušovice. První tři kusy jsme jeli vyzvednout přímo do Slušovic s kolegou doc. Vlčkem v roce 1988. Vzhledem k ceně přes 100 000 Kč za kus — v dnešních cenách kolem milionu — musel na pořízení přispět tehdejší koncern

Vítkovice. Náklad tří počítačů, naložených tehdy do vozu Škoda 120, tak několikanásobně převyšoval cenu automobilu i s posádkou. Vzhledem k omezenému počtu kusů bylo nutné na tyto stroje zpočátku připravovat rozvrh hodin, ve kterých se jednotliví pracovníci katedry u nich střídali. Jako nejmladší jsem byl tehdy pověřen sestavováním těchto týdenních rozvrhů.



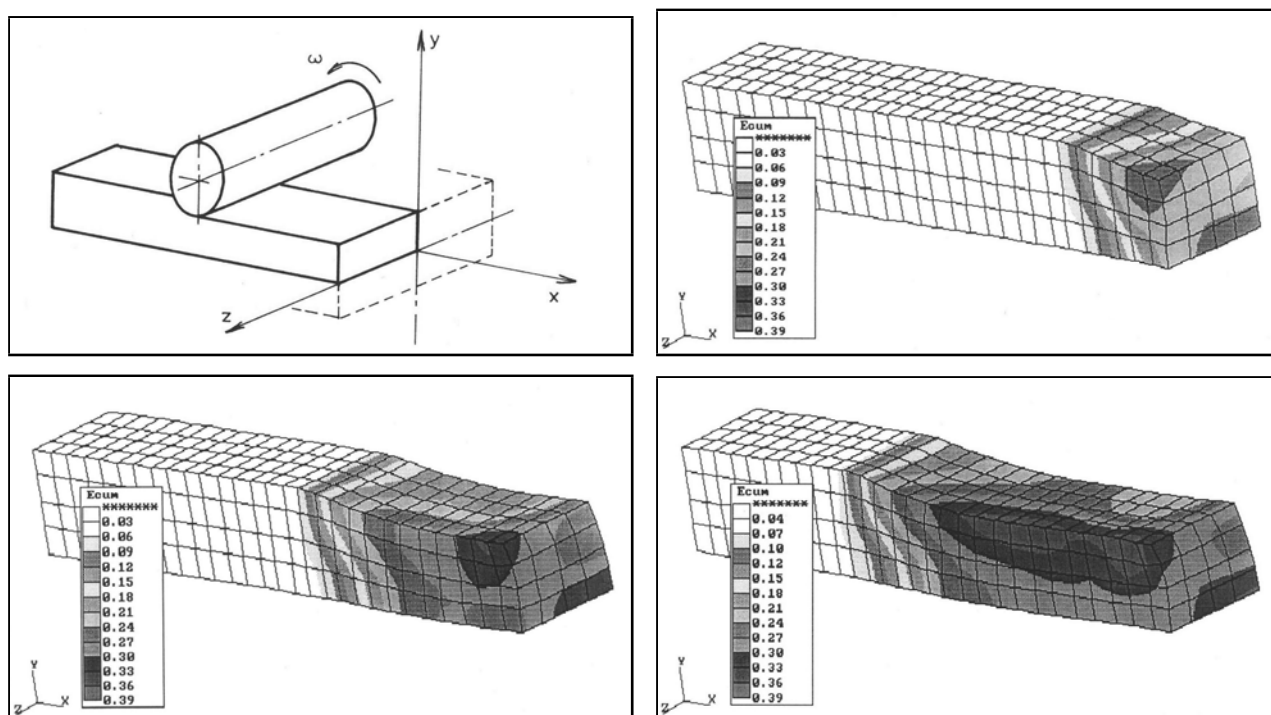
Obr. 4. Kontakt čepu a oka ojnice bramových nůžek, síť a napětí.

Na moji prognózu, že do několika let budeme mít tyto stroje na svých pracovních stolech, se tehdy mnozí dívali velmi skepticky. Na tato slova nicméně došlo a následující období představuje asi poslední etapu živelného rozvoje programů MKP, vznikajících „na koleně“ na jednotlivých pracovištích vysokých škol, akademie věd, rezortních výzkumných ústavů a velkých průmyslových podniků. Převážně byly vyvíjeny programy pro řešení nejružnějších typů nelinearit, za naše pracoviště zde můžeme zmínit tuhoplastické modely pro simulaci tvářecích procesů,



Obr. 3. Část stojanu lisu, geometrie a síť s deformacemi.

jako byl proces válcování na Obr. 5.



Obr. 5. Simulace válcování, nestacionární tuhoplastický model.

Počátek devadesátých let je v oblasti počítačů a MKP poznamenán především ukončením embarga na dovoz nejnovějšího softwaru i hardwaru do zemí střední a východní Evropy. Dostupnost komerčních systémů MKP jako je Ansys, Abaqus a další znamenala téměř všude konec vývoje vlastních programů na bázi MKP. Můžeme to dokumentovat na příkladu kolokvií o programech MKP, pořádaných pravidelně Dopravoprojektem Brno.

Ještě v roce 1986 sborník obsahoval 156 anotačních listů k jednotlivým samostatně vyvinutým programům MKP pro nejrůznější aplikace. V roce 1991 (Obr. 6) to bylo už jen 91 nabízených programů. Do dnešní doby jich na komerční bázi přežilo a dále se rozvíjí jen hrstka. Ostatní tvůrci postupně přešli na komerční programy západní proveniencí, stejně jako výpočtová oddělení velkých průmyslových podniků. Zkušenost s tvorbou vlastních programů však přinesla jejich autorům trvalou konkurenční výhodu ve vědecké či konzultační činnosti dalších let.

3. Počítače a MKP ve výuce strojařské mechaniky

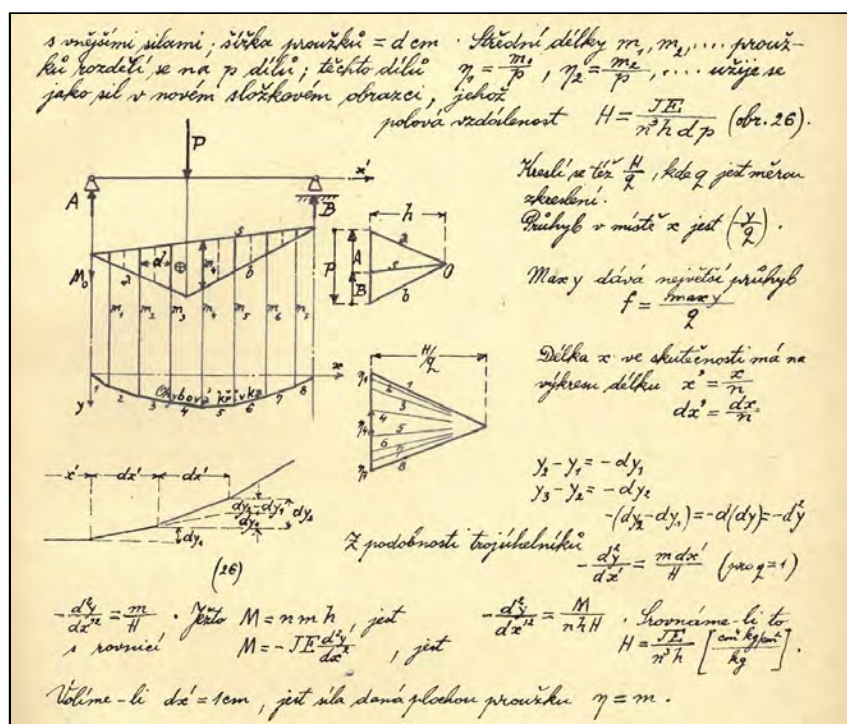
Ve výuce mechaniky se nástup počítačů a MKP projevil se zpožděním. Je to pochopitelné zejména pokud si připomeneme technické možnosti a styl práce prvních sálových počítačů, k nimž měl omezený přístup jen úzký okruh zasvěcených. Počítačová výuka v dnešním slova smyslu byla ještě hůbdu daleké budoucnosti. Výuka mechaniky byla v šedesátých a z velké části i v sedmdesátých letech postavena na klasických přístupech analytických a grafických metod.

Příkladem mohou být poválečná brněnská skripta prof. A. Nedomy [3], psaná ještě úhledným rukopisem a obsahující vedle grafoanalytické metody řešení průhybu nosníků (Obr. 7) i podrobné pojednání o využití Airyho funkce napětí i s příklady (Obr. 8). Sám mohu vzpomenout, že průhyb hřídelů podle Obr. 7 jsme v konstrukčních cvičeních řešili, byť podle modernějších

	
VÝPOČETNÍ STŘEDISKO DOPRAVOPROJEKTU BRNO ZÁVODNÍ Pobočka ČSVTS DOPRAVOPROJEKT BRNO HIGHWAY DESIGNING AND TRAFFIC ENGINEERING INSTITUTE 658 30 BRNO, KOVÁŘOVA 13, CZECHOSLOVAKIA COMPUTER DEPARTMENT	ČS. SPOLEČNOST PRO MECHANIKU PŘI ČSAV ODBORNÁ SKUPINA NUMEG Czechoslovak Society for Mechanics of the Czechoslovak Academy of Science (CSAS) Geomechanical Section Group for Numerical Methods in Geomechanics
PROGRAMY METODY KONEČNÝCH A HRANIČNÍCH PRVKŮ V ČSFR IV (1991)	
F E M - B E M PROGRAMS IN CZECHOSLOVAKIA IV (1991)	
KOLOKVIUM V BRNĚ 4. června 1991 COLLOQUIUM IN BRNO 4th June 1991	

XIV	
věcný rejstřík 1991	
věcný rejstřík obsahuje klíčová slova zdůrazněná v anotačních listech nebo charakterizující oblast aplikace. Univerzální programové systémy, uvedené v rejstříku společně, mají široký rozsah možných aplikací	
Deskařské soustavy	23, 31, 57, 59, 79, 81, 137
Desky obecné	13-17, 29, 67
Desky na vrstevnatém podloží	29
Desky na Winkler-Pasternakově podloží, pružnoplustický stav	135
Desky žaluziové	17
Dotazovací systém	73
Důlní dílo	145, 146
Dynamické úlohy obecné	59, 91
Dynamické výpočty konstrukcí	105, 113, 119, 137
Dynamika - vlastní kmitání	13 - 31, 59
Elektromagnetické pole	3, 79, 101
Generování sítě prvků	37, 111
Grafy - obecné	35, 57, 59, 79, 90, 97, 115, 121, 143
Grafy sedání povrchu podloží staveb	45
Grafy statických veličin rámb	61, 87, 93, 121
Horniny - nelineární přetváření	109
Horský masiv	145
Kroucení prutů	25
Nelineární úlohy	43, 45, 59, 79, 90, 109, 115, 123-139, 141-142, 145-148
Nevětvěné nosníky a skepiny (jednoduché řetězce)	103
Nosníky základové na Winkler-Pasternakově podkladu	139
Obecné prostorové soustavy	51, 57, 59, 79, 81
Obecné soustavy z 1D a 2D prvků	23, 31, 147
Optimalizace	81, 138
Pevnost částí strojů	91
Piloty vrtané	122
Plasticita zemín	141, 142
Preprocesory	13 - 33, 37, 59, 79, 111, 113, 115, 120, 147
Postprocesory	35, 59, 79, 81, 87, 89, 97, 105, 112, 115, 147
Proudění kapalin	105
Proudění podzemní vody	49
Prutové soustavy	1, 39, 41, 63, 65, 84, 93, 110, 113, 119, 121
Pružnoplustická 2D úloha	123
Pružnoplustická 3D úloha	127
Pružnovazkoplustická 2D úloha	125, 131
Pružnovazkoplustická 3D úloha	129, 133
Průřezové veličiny prutů	120
Přepínací kabely - ekvivalentní zatížení	83
Páda základová podle ČSN 731001(1988)	43, 45
Rámy - grafy statických veličin	39, 87
Rámy rovinné	11
Rámy s patkami na podloží	41
Rošty	5
Rotačně symetrická úloha	21, 131, 137
Rovinná deformace zemních či betonových těles vod.stav.	47
Rovinná úloha pružnosti	19, 33, 47, 71
Rovinné konstrukce obecné	143
Sedání a parametry podloží staveb	43, 45
Signoriniho kontakt	71

Obr. 6. Sborník kolokvia programů MKP, Dopravoprojekt Brno, 1991.



Obr. 7. A. Nedoma, Pružnost a pevnost I, řešení průhybové čáry nosníků [3].

skript, ještě v polovině sedmdesátých let. Jedním z vrcholných příkladů využití grafických metod ve výuce předpočítačového období je Sběrka příkladů z kinematiky doc. R. Brepty z roku 1957 [4]. Výuka mechaniky za pomoci a s využitím výpočetní techniky se nejprve realizovala

- 13 -

Airyho funkce napětí.

Když napětí kolmé k ose je rovinně-tělesné, tedy na př. $\nu = 0$, $\tau_{xz} = 0$, předpokládá se obyčejně, že nejen vřadná napětí, ale i příčkové jsou rovinně-tělesné, t. j. rovné, ve skutečnosti se dělí průměrně také kolmo k této rovině. Předpokládá se k rovinnému řešení, když lze volit v daném případě $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$.

Platí tedy vyjádření pomocí Airyho funkce:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (I); \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (II);$$

$$\sigma_x = 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \nu \quad (III); \quad \sigma_y = 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \mu \nu \quad (IV);$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \quad (V)$$

Do prvníh dvou rovnic se dosadí $\nu = \frac{\partial \phi}{\partial y}$, $\nu_y = \frac{\partial \nu}{\partial x}$, takže

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \nu}{\partial y}.$$

Když se zvolí dále $\phi = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ a $\nu = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, jest

$$\nu_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \nu_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Funkce F slouží Airyho funkci. Z rovnic (I) a (V) vyplývá podmínka

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^4} = 0, \quad \text{kteří nutno splnit, aby funkce } F \text{ vyjadřovala napětí v daném případě. Nímto to jest vyhovující geometrickým a dynamickým rovinným podmínkám.}$$

Výmenku lze též vyjádřit $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = 0$,
 či $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nu_x + \nu_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\nu_x + \nu_y) = 0$.

Často se vyjadřují funkce napětí a složky napětí v polárních souřadnicích $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $r = x + y$.

K této jest $\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin 2\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$,
 $\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos 2\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$.

- 15 -

Příklad. Napětí kolem silového otvoru v těle obdélníkového průřezu.

Kolem malého otvoru jest napětí asi takové jako v nekonečné látce, roztažené v jednom směru.

Na obr. (10) jest naznačena číselná tabulka, na jejích průřezích neskalena působe rovinně-tělesné hlavní napětí σ . Dálko od otvoru musí jeho velikost a směrce (1) sloužit při $\nu_x = \sigma$, $\nu_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$ napětí.

$$\nu_x = \sigma \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} \sigma + \frac{1}{2} \sigma \cos 2\varphi, \quad (3)$$

$$\nu_y = \sigma \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} \sigma - \frac{1}{2} \sigma \cos 2\varphi, \quad \dots$$

$$\tau_{xy} = -\sigma \sin \varphi \cos \varphi = -\frac{1}{2} \sigma \sin 2\varphi.$$

Tato napětí lze určit pomocí vzorce (2) a funkce napětí $F = \frac{1}{4} \sigma r^2 - \frac{1}{8} \sigma r^2 \cos 2\varphi$.
 Z toho snadno se také podle otvoru jest funkce napětí, slovně a číselně, závislé na délce r , a z číselní rovnice má být uhlí; volí se $F = M + N \cos 2\varphi$.

Výpočet funkce M.

Výpočet se z podmínky $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0$, kde $u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial M}{\partial r} \right)$,
 $\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2}$ napětí jest u p.m. pro r konstantní. Výsledek funkce má potom tvar $\frac{1}{r} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dM}{dr} \right) \right] \right\} = 0$. Po integracích podmínky jest $r \frac{dM}{dr} = C_1$; $u = C_1 \ln r + C_2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dM}{dr} \right)$. Po druhé integraci $r \frac{dM}{dr} = \frac{1}{2} C_1 r^2 (\ln r - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} C_1 r^2 + C_3$. Končozí integrál dává $M = \frac{1}{4} C_1 r^2 (\ln r - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{4} C_1) \frac{r^2}{2} + C_3 \ln r$,
 či $M = A r^2 \ln r + B r^2 + C \ln r$ ($C_1 = 0$)

Výpočet funkce N.

Výmenku funkce napětí $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$.
 Funkce N musí periodicky na původu a na délce r ; lze tedy zohlednit na př. $N = N_1 \cos n\varphi + N_2 \sin n\varphi$, takže

Obr. 8. A. Nedoma, Pružnost a pevnost I, Airyho funkce napětí s příklady [3].

koncem šedesátých let formou postgraduálních kurzů, specializovaných školení a seminářů pro úzký okruh studentů a absolventů techniky. Tato historie je dodnes uložena ve sbornících a skriptech vytvořených pro uvedené účely. Jejich výčet by byl dlouhý a určitě neúplný. Pokud se omezíme na celostátní učebnice, pak je možno zmínit knihu prof. Servíta z roku 1967 [5], která se podrobně zabývá formulací statických výpočtů stavebních konstrukcí s využitím metody síťí a Ritzovy metody. Jedno z prvních stručných pojednání o podstatě a algoritmu MKP je ve známé učebnici pružnosti prof. Höschla z roku 1971 [6]. Následujícího roku vyšla monografie o MKP kolektivu brněnských autorů Koláře, Kratochvíla, Leitnera a Ženíška [7] a v roce 1975 pak další souborné zpracování počítačově zaměřených výpočtových metod autorů Valenty, Němce, Ulrycha a kol. [8] (Obr. 9). Další ze známých knih byly speciálně věnovány MKP v oblastech dynamiky [9] a nelineárních problémů [10].

Podstatné změny ve výuce nastaly až v polovině 80. let s příchodem minipočítačů ADT a prvních osmibitových osobních mikropočítačů PMD-85 a IQ151. Jejich možnosti byly sice příliš omezené na rozsáhlé programování, nicméně poprvé umožnily přímý kontakt studentů s počítači a základní programování pro všechny studenty. Prvními počítači, kterými byla na FS VUT v Brně vybavena učebna pro výuku mechaniky, byly šestnáctibitové verze slušovického systému TNS. Foto z této první učebny bohužel nemám k dispozici, uvedeme zde pro ilustraci proto učebnu z doby o pár let později (Obr. 10).

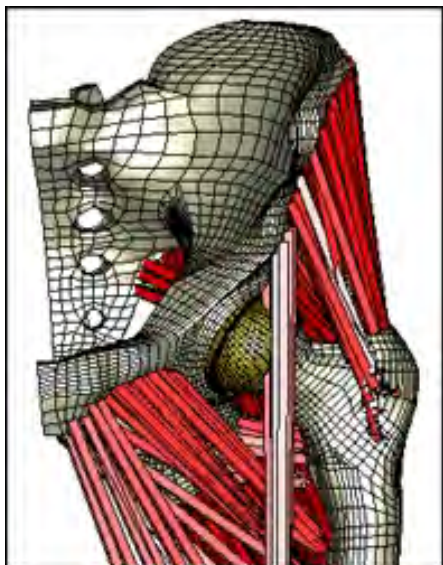


Obr. 9. První tuzemské monografie zachycující nástup počítačů a MKP v mechanice.



Obr. 10. Počítačová učebna mechaniky kolem roku 2000.

Přechod k počítačovému řešení problémů mechaniky ve výuce i praktických aplikacích vedl k zavedení a užívání pojmu „počítačová mechanika“. Bohatá diskuse k němu proběhla například na stránkách Bulletinu České společnosti pro mechaniku v roce 1989. Příspěvky brněnských autorů Ondráčka [11], Janíčka [12] a Vykutíla [13] odrážejí tehdejší diskuse vedené i na našem pracovišti katedry mechaniky. Vyplynulo z nich, že počítač se z pouhého nástroje stal mocným impulsem k dalšímu rozvoji mechaniky v oblastech, které by jinak nebyly možné či smysluplné. Týká se to všech typů nelinearit a zejména vývoje v oblasti modelů materiálu. Týká se to rovněž souvislostí mezi výběrem teoretické formulace problému a efektivností jeho numerického řešení, která zpětně ovlivnila rozvoj nových teoretických přístupů k úlohám mechaniky. Záhy bylo zřejmé, že obsáhnout všechny zmíněné souvislosti není možné v rámci omezené dotace základních kurzů mechaniky na strojních a stavebních fakultách, a to ani při vypuštění některých zastaralých partií. Řešením bylo postupné zavádění nových specializací zaměřených na *aplikovanou*, *výpočtovou* či přímo *počítačovou* mechaniku v závěrečných ročnících studia.



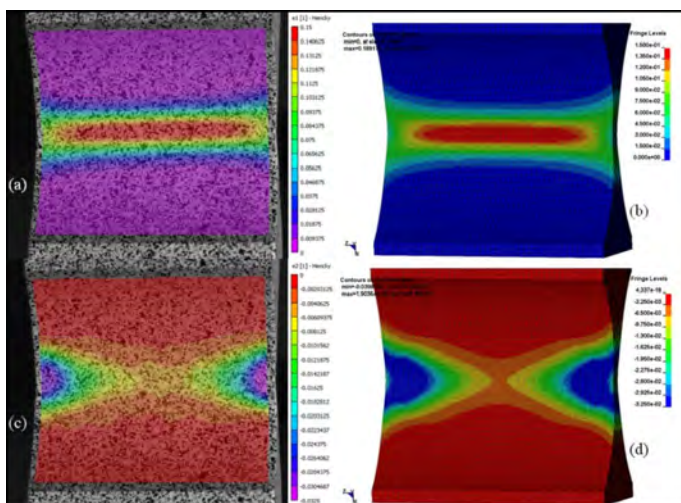
Obr. 11. Analýza kyčelního kloubu.

Dramaticky roste i velikost výpočtových modelů, které jsme schopni řešit i v podmínkách vysokoškolského pracoviště například v rámci diplomových projektů.

Obr. 12 ukazuje výsledek náročné simulace nárazové zkoušky automobilu ve srovnání se skutečným experimentem.



Obr. 12. Výsledek simulované a skutečné bariérové zkoušky..



Obr. 13. Srovnání DIC a MKP metody.

Na FSI VUT v Brně se rozběhnul podobný obor v roce 1987/88 nejprve jako jednoúčelově zaměřený studijní plán pro stipendisty podniku ŽĐAS-Vítkovice pod názvem Počítačové navrhování strojních soustav. Ten se následně vyvinul ve standardní obor Inženýrská mechanika, nabízený všem studentům 4. a 5. ročníku studia. V současné podobě se jedná o navazující magisterský program se dvěma specializacemi - Inženýrská mechanika a Biomechanika.

Vedle toho vznikl pod záštitou Ústavu i program Mechatronika, který má jak bakalářskou, tak i navazující magisterskou podobu. Tyto nové obory jsou důsledkem pronikání mechaniky i do oblastí jako je medicína. Katalyzátorem tohoto procesu jsou počítače, v mnoha případech i spolu s MKP, jak ukazuje příklad analýzy silového namáhání kyčelního kloubu na Obr. 11.

V klasické části strojařské mechaniky počítače proměnily i oblast mechaniky experimentální, zejména pomocí digitálního snímání a analýzy obrazu.

Na Obr. 13 je srovnání lokální deformace zatěžovaného vzorku experimentální metodou digitální korelace obrazu (DIC) s výsledkem výpočtové analýzy téhož pomocí MKP.

Toto srovnání je cestou k formulaci, verifikaci a následnému využití stále komplexnějších modelů materiálu.

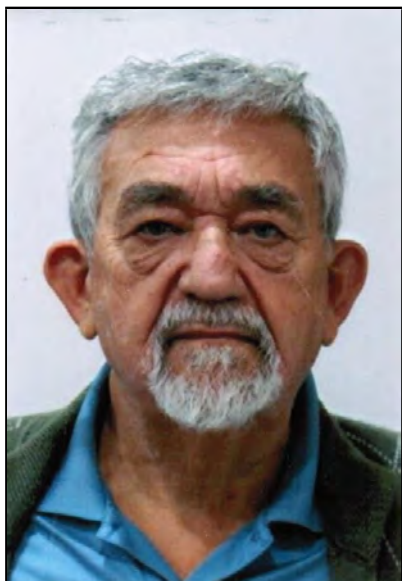
4. Závěr

Pokusili jsme se stručně nastínit několik desítek let vývoje inženýrské mechaniky, spojené s nástupem počítačů a Metody konečných prvků. Podobný vývoj jako na VUT v Brně proběhl i na mnoha jiných vysokoškolských pracovištích. Vidíme, že naše možnosti analýzy, návrhu i měření strojních konstrukcí se dramaticky proměnily. Současné nástroje nám umožňují postihnout komplexně mnoho aspektů a vlastností dříve nepostížitelných. Je dobré mít na paměti, že v základech tohoto úspěchu leží průkopnická práce takových osobností, jako byl profesor Miloš Zlámal, jehož sté výročí narození si tímto sborníkem připomínáme.

Literatura

- [1] *M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Matrin, L. J. Topp*: Stress and deflection analysis of complex structures, *J. Aero. Sci.* **23** (1956), 805-823.
- [2] *M. Zlámal*: On the Finite Element Method, *Numer. Math.* **12** (1968), 394-409.
- [3] *A. Nedoma*: Pružnost a pevnost I, Skriptum Vysoké školy technické Dra E. Beneše v Brně 1945.
- [4] *R. Brepta*: Sbíрка řešených příkladů z kinematiky, SNTL, Praha, 1957.
- [5] *R. Servít*: Automatizace statických výpočtů, SNTL, Praha, 1967.
- [6] *C. Höschl*: Pružnost a pevnost ve strojnictví, SNTL, Praha, 1971.
- [7] *V. Kolář, J. Kratochvíl, F. Leitner, A. Ženíšek*: Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, SNTL, Praha, 1972.
- [8] *J. Valenta, J. Němec, E. Ulrych a kol.*: Novodobé metody výpočtů tuhosti a pevnosti ve strojírenství, SNTL, Praha, 1975.
- [9] *Z. Bittnar, P. Řeřicha*: Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí, SNTL, Praha, 1981.
- [10] *Z. Bittnar, J. Šejnoha*: Numerické metody mechaniky I, II, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1992.
- [11] *E. Ondráček*: Potřebuje mechanika přívlastky?, *Bulletin ČSM* č.1/1989.
- [12] *P. Janíček*: Potřebuje počítačová mechanika experiment?, *Bulletin ČSM* č.1/1989.
- [13] *J. Vykuřil*: Existují bariéry u osobních počítačů?, *Bulletin ČSM* č.1/1989.

Prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc. je ředitelem Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky Fakulty strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně, Technická 2, 602 00 Brno, Czech Republic. e-mail: petruska@fme.vutbr.cz.



VZPOMÍNKY NA VUT

Jak jsme začínali s počítači

V potu tváře sepsal

Tonda Aujeský

Absolvent Fakulty elektrotechnické

Autor se narodil 4. ledna 1940 v Brně Holáskách. Vystudoval VUT obor elektro v roce 1963. V roce 1968 emigroval do Austrálie. Působil v oboru *research into satellite imaging* a později v oboru *process control engineering*. Byl řečníkem na mnoha konferencích po celém světě. Byl spoluautorem knihy *Batch Controls*, která byla publikována v USA. Pro archiv VUT napsal tyto vzpomínky. Zemřel 26. prosince 2024 v Austrálii.

Úvodem

Byl jsem požádán, abych jako pamětník zachytil svoje vzpomínky na to, jak jsme na VUT zaváděli počítačovou techniku, a to hlavně na úplné začátky. Tak se tedy do toho pustím, ale bude to taková pohádka, něco jako „Cesta do pravěku“. Snad je to dobré přirovnání, protože to, co jsme tenkrát dělali a s jakou technologií pracovali, musí asi dnešnímu čtenáři připadat „předpotopní“. Každý začátek je těžký, to je všeobecně uznávaná pravda. Ta platila zvláště v té době „pravěku“, kdy jsme něco začali a nevěděli, k čemu to vlastně povede. Tehdy nebyly k dostání ani ty základní věci, které jsou dnes docela běžné, jako například výkonové transistory, mikročipy a podobně.

Nicméně, myslím si, že to byla doba velice zajímavá a dokonce i vzrušující, protože se v ní formovaly myšlenky naznačující, že něco nového má přijít na scénu, i když nikomu nebylo ještě jasné, co by to přesně mělo být. Něco se pohnulo a dalo se na pochod. Ovšem co to bylo, jsme tenkrát nevěděli. Hádali jsme a tápali jsme, ale prostě jsme nevěděli. Dnes už to víme, byla to „informační revoluce“, která se tenkrát dávala do pohybu a přetrvala pak po několik desetiletí. Dnes už se ovšem o „revoluci“ mluvit nedá, spíše o evoluci.

A ještě chtěl bych podotknout, než se zakousnete do čtení, že pokud se vám snad nebude líbit můj sloh, tak vezměte prosím v úvahu, že už žiju nějakých 40 let v Austrálii. A dále, že jsou to jenom mé vlastní vzpomínky a ne historický zápis, jaký se očekával od kvalifikovaného kronikáře, takže nemohu brát zodpovědnost za případné nepřesnosti.

Tak se tedy pohodlně posaďte, pohádka začíná. A vy děcka nezlobte, Pepíčku neber Mařence ten iPod a ty Honzíčku nech toho Googlu, budeš mít čtveratý očička. A vůbec vypněte si mobily a hezky poslouchejte, jaké to bývávalo za starých časů, kdy takové věci ještě nebyly na světě.

První impuls

aneb

Kudláčkova kybernetika

Tak jak to vlastně tenkrát začalo, co byl ten první impuls? Na to bohužel nemohu odpovědět bez osobního zaujetí. Pro mne to začalo tím, že jsem v roce 1958 jako posluchač prvního ročníku

Fakulty energetické VUT navštívil přednášku Václava Kudláčka, který nás učil matematiku, o kybernetice. Tato přednáška a všechno, co z ní potom vyplynulo, mně dala takový ten první silný impuls, který mě postavil na dráhu počítačů, informatiky a řízení (process control) pro zbytek života. Byla to dráha, která mě zavedla daleko od domova (žiji už nějakých 40 let v Austrálii), ale zato mně dala možnost se dokonale „vyřádit“ ve stále se vyvíjejícím oboru. Ovšem ta přednáška o kybernetice mně pořád zůstala v paměti jako životní mezník.

Mladší čtenáři se asi ptají, co to vlastně bylo ta kybernetika? Odpověď záleží na tom, jak se slovo kybernetika vyslovovalo. V původní formě to byla *cybernetics* (vysloveno „sajbrnetyks“), což byla úpadková pavěda západních imperialistů. Bylo to v roce 1958, v době hlubokého komunismu. Zato však v modifikované formě to byla „kybernetika“, tedy pokroková věda našich východních bratrů Sovětů, a jako taková začínala právě přicházet do módy - ale zase ne tak docela, přílišná propagace této vědy mohla být politicky riskantní.

Tato věda či pavěda byla založena v knize Norberta Wienera, která vyšla někdy těsně po druhé světové válce v Americe. Wiener v ní rozvinul myšlenky týkající se řízení systémů pomocí informace. Ale nejen to, Wiener dokázal vystihnout, co mají tyto systémy společné. V tom zobecnění spočívalo jádro věci. Do té doby byly jednotlivé typy systémů chápány odděleně. Například elektronické navigační a stabilizační systémy neměly nic společného s nervovými systémy živých bytostí, a ty zase neměly nic společného s řízením ekonomiky. Wiener dokázal vystihnout a popsat společné rysy těchto zdánlivě odlišných systémů, a tím je konceptuálně sjednotit. Díky tomuto sjednocení bylo možno vyvozovat závěry společné všem takovým systémům, a popřípadě vědomosti získané v jedné oblasti aplikovat v oblasti jiné. Myšlenka to byla opravdu zajímavá a otvírající nové možnosti. A tak vznikla nová věda, lépe řečeno zárodek nové vědy zvaná kybernetika, která se těmito otázkami zabývala. K Wienerovi se pak připojili další autoři jako Ashby a Shannon (ten se ale více věnoval problémům komunikace), takže literatury bylo poměrně dost.

To by bylo všechno hezké a zajímavé, ale co se s tím dalo dělat? Ona jedna věc je sepsat teoreticko-populární knihu, jako byla Wienerova *Kybernetika*, nebo dumat nad „nesmrtelností chrousta“. Druhá věc je dát to všechno do praxe nebo aspoň někde začít s aplikací Wienerových myšlenek. To byl čas, kdy přišel na scénu Václav Kudláček. Mluvím o situaci v Brně, nevím, co se dělo v té době jinde v republice.

Než ale budu psát o něm a o ostatních, chtěl bych předeslat, že akademické tituly nebudu uvádět, abych se nedopustil nepřesností — konec konců žili jsme v socialismu, tak jsme byli všichni soudruzi.

Václav Kudláček nám přednášel v prvním ročníku matematiku. Byl to člověk středního věku, ale přesto plný mladického elánu a energie, která z něho vyzařovala na všechny strany a hledala si uplatnění. Byl to rozený organizátor a zdálo se, že měl prsty v každé akci. Není tedy divu, že si našel kybernetiku jako jeden z bodů k uplatnění svého tvůrčího a organizačního talentu. Dalo by se i říct, že si kybernetika našla jeho jakožto svého nejlepšího propagátora. A tak se to díky Václavovi rozjelo, téměř jako kdyby byl pronesl známou magickou formuli „Budiž světlo“. A světlo bylo čím dál větší, až do osudného roku 1968, kdy to zase ruplo, ale to bychom předbíhali událostem.

Pro zajímavost bych ještě dodal, že Kudláček byl „Vančák“, to jest z Ivančic u Brna, zrovna tak jako malíř Alfons Mucha a herec Vladimír Menšík. Myslím, že měl s Menšíkem hodně společného, co se týče chuti do života, smyslu pro humor a optimismu. Četl jsem v Menšíkově životopisu, že jeho matka byla rozena Kudláčková, takže nějaké spojení by tady bylo.

Ale zpátky ke Kudláčkově přednášce. Pro mě osobně to bylo něco strašně zajímavého a řekl bych i fascinujícího. Měl jsem dojem, že přišel čas, kdy fantasie a science fiction se brzo

stanou skutečností. Snad to bylo díky Kudláčkově přednesu, nebo tím, že jsem konečně našel svůj pravý zájem a že mně ho někdo vlastně pomohl definovat.

Abych tento bod vysvětlil, musím zde podotknout, že už jako dítě školou povinné jsem rád četl knížky zaměřující se na vědu, ať to byla astronomie, chemie či elektřina, všechno mě zajímalo. Pak jsem šel na Elektrotechnickou průmyslovku studovat obor Rádio a sdělovací technika, ale nijak mě to nechytlo, cítil jsem, že to nebylo ono. Pak jsem se dostal na VUT a přišla ta Kudláčková přednáška. Ano, to bylo ono, konečně něco, co mne opravdu a do hloubky zajímalo. Kybernetika tedy získala dalšího stoupence, i když to byl pouhý student.

Jenže zájem studentů o obor sám o sobě nestačí, bylo zapotřebí dalších akcí k tomu, aby se to opravdu rozjelo. To věděl i Kudláček moc dobře. Přednáškou nás sice na chvílku zachytil, ale šlo o to, udržet si momentum. Jak sám přiznával, jeho metoda postrkávání věcí dopředu byla „naťuknout a doťuknout“. Přednáškou nás tedy naťukl, a aby nás doťukl, zadal nám takovou domácí úlohu - vyřešit problém známý v odborných kruzích pod jménem „Myš v bludišti“.

Myš v bludišti aneb Neboj, to zmáknem

„Myš v bludišti“ byla hračka, kterou vymyslel a sestrojil jeden ze zakladatelů, neboli pionýrů kybernetiky, Shannon v roce 1952. Šlo mu o to dokázat, že inteligentní chování živých tvorů se dá simulovat na mrtvém stroji, mechanickém, elektrickém atd.

Jak to fungovalo? Krátce řečeno, simulovaná myš vlez do bludiště a hledá východ. Až ho najde, je odměněna kouskem sýra. Když se pak pokus opakuje, myš už si pamatuje, jak šla předtím a nejen to, vypracuje si svoji inteligenci, jak se dostat k východu co nejrychleji a bez bloudění. Dnes by se taková věc mohla snad zdát k smíchu, protože dnešní počítače dokážou dělat věci mnohem těžší, jenže tenkrát to byly opravdu prvopočátky.

Když jsme tedy dostali tuto domácí úlohu, tak jsem přišel na takové jednoduché řešení, ve kterém si stěny bludiště ohledával elektricky proud. Každá stěna bludiště byla totiž spojena s kontakty, a ty byly vzájemně propojené do určité sítě, něco jako pavučina. Pomyslná myš běhala bludištěm a rozsvěcovala žárovečky, kudy běžela. Když jsem pak na další přednášce odevzdal svoji úlohu vyřešenou, zjistilo se, že jsem byl sám, kdo to vlastně vzal vážně a opravdu se snažil něco udělat. Takže to bylo jediné řešení, které jsme měli. Bylo to pouze teoretické řešení a myslel jsem, že to tím skončí a půjde se dál na zajímavější věci. Václav Kudláček se ale toho chytil a pozval mě na schůzi na Katedře matematiky na Gorkého ulici, abych tam svoje řešení předložil panelu znalců k posouzení.

Oni se tam totiž sešli profesori ze všech možných a nemožných škol a ústavů, samé kapacity, jak se tenkrát říkalo, pro mě bohové na Olympu. Kudláček je sehnal dohromady, aby je získal pro kybernetiku, tedy aby je naťuknul. Tak jsem se tedy dostavil na místo, ale byla ve mně malá dušička. Nikdy předtím jsem totiž neviděl tolik *vážených soudruhů* pohromadě.

Dovolte mi odbočit, abych vysvětlil titul *vážený soudruh*. Byla to jedna z vymožeností socialistické rovnoprávné společnosti, takové dialektické spojení starodávného titulu *vážený pán* a pokrokového titulu *soudruh*. *Váženému soudruhu* se vykalo, kdežto *soudruhu* se tykalo. *Vážený soudruh* také mohl kdykoliv seřvat *soudruha*, nikoliv však naopak.

Já měl před *váženými soudruhy* trému, avšak se ukázalo, že zbytečně. Byli ke mně shovívaví jako praví bohové k obyčejnému smrtelníku. Předložil jsem jim výplod své fantazie a oni podumali, i hlavami pokývali, a pak opatrně pronesli znalecký posudek: „To by mohlo fungovat“. Měl

jsem z toho mít radost, ale naopak ve mně hrklo jak ve starých pendlovkách: „Šmarjá panno, teď snad mně řeknou, abych to postavil, uvedl do chodu a předvedl.“ To by byla katastrofa, protože já byl „levej na obě ruce“.

Tedy na vysvětlenou, kdysi jsem sice postavil boudu pro psa, ale pes v ní odmítal spát, a to z dobrých důvodů. Pak jsem stavěl holubník a nešťastnou náhodou rozboural půl střechy na rodném domku. Co se týče elektroniky, rozmontoval jsem doma rádio, ale nějak mně potvora nešla dát zpátky dohromady. Když jsem to konečně smontoval, tak na něm nešlo chytnout nic jiného než rušička Svobodné Evropy — alespoň, ideologicky jsem to potrefil správně.

Mé obavy se bohužel naplnily, neboť naši *vážení soudruzi* opravdu očekávali, že se do toho dám. A tak s těžkým srdcem jsem se vypoklonkoval ven a musím říct, že moje nadšení pro kybernetiku utrpělo vážnou trhlinu. Vypadalo to na velkou ostudu. Pak se ale na scéně objevila další osoba, a ta mě vlastně zachránila. Byl to Jan Brejl, řečený Honza, z našeho ročníku, se kterým jsem se do té doby stýkal jen povšechně. Když jsem Honzovi přednesl svůj problém i žal, nadechl se a suverénně prohlásil slova pro mě památná „Neboj, to zmáknem“. Tímto prohlášením mně značně pozvedl náladu a uvedl věci na kolej pokroku vstříc lepším zítřkům. Zdálo se, že informační revoluce se znovu rozjela plnou parou.

Honza byl totiž, jak on sám hrdě o sobě prohlašoval, *bastlíř* a řekl bych i, že nezlomný ve své víře v „bastlení“.

Pro nezasvěcené musím vysvětlit, co je to *bastlíř*. Je to člověk, který dokáže dělat technické zázraky metodou *bastlení*, to jest *by trial and error*, neboli *metodou pokusu a omylu*. Jsou ovšem různé druhy *bastlířů*, například existuje *bastlíř primitivis* který, třebaže se umí sotva podepsat, dokáže spravit každé rádio. Dále pak je tu *bastlíř obecný*, to jest člověk, který s úspěchem absolvoval obecnou školu, takže podpis mu nečiní žádné potíže, ovšem o nějakých teoriích nemá ponětí. A konečně je zde *bastlíř superioris*, který sice ovládá teorii na výbornou, ale pokládá ji za nepoužitelnou v praxi. A to byl Honza.

Tedy, když takový *bastlíř superioris* řekne: „to zmáknem“, tak to něco znamená.

Jenže ono to Honzovo zmáknutí nebylo tak snadné. Neměli jsme materiál, náradí a ani místo, kde by se to všechno dalo dělat. Ale i to se vyřešilo, a nakonec jsme, jako ti komsomolci na celinách, překonali všechny překážky a splnili plán na 120 %. Nutno však dodat, že to bylo „s pomoci Boží a dobrých lidí“, jak by asi napsala Karolína Světlá. Ale abych nepřeskakoval celou dějinnou epochu, vrátím se zpět k tomu, jak jsme vlastně tu slavnou Myš *zmákli*. Tak tedy „s pomocí Boží a dobrých lidí“ jsme se do toho pustili. Václav Kudláček nám opatřil místo pro skromnou dílničku přímo na Katedře matematiky na Gorkého ulici a dokonce i peníze na nákup základních věcí, jako jsou různé kleštičky, šroubováky, páječky a podobně. K dovršení všeho dobra nám zařídil placené džoby na katedře, a tím se z nás stali takzvaní *pomvědi*, což znamená pomocné vědecké síly. Na katedře jsme se tedy usadili a začali pracovat na našem projektu *Myš v bludišti*. Kvůli tomuto projektu jsme pak dostali společnou přezdívku „Myšáci“, která nám zůstala prakticky až do konce studií.

Jenže ono se řekne pracovat, ale s čím? Technické součástky nebyly tenkrát k dostání jen tak přes pult. Naštěstí Honzův otec byl na poště velkým šéfem přes telefony, a tak nám opatřil součástky ze staré telefonní ústředny. Jenže mělo to háček, museli jsme si tu ústřednu sami rozmontovat, a získané součástky (relé, spínače, objímky a podobně) očistit, než jsme vůbec mohli začít s naším hlavním projektem. K tomu ovšem přistupovaly další povinnosti jako divadlo, kino, tancovačky, no a také ovšem studium, ale s tím vás milí čtenáři nebudu nudit.

No a za nějakého půlroku bylo všechno hotové a k našemu překvapení to opravdu jelo.

I viděl to Kudláček a ostatní a hle, bylo to dobré.

No ale, co dál?

Jak pokračovat v započatém díle *revoluce*, i když pouze informační? V tomto momentu prapor revoluce přebírala nová osobnost: Miroslav Fendrych (jinak Mirek), který byl tehdy asistentem na Katedře matematiky, a rozvinul ho do nebývalé šíře. Kudláček ovšem dále zůstal zainteresován, ale byl vytížen na jiných úsecích. Pokud se dobře pamatuji, vznikaly tehdy nové fakulty jako strojní a elektrotechnická, a to bylo něco pro jeho organizační talent.

Akce pokračuje aneb Fendrychův zájmový kroužek kybernetiky

Mirek Fendrych to vzal za trochu jiný konec než Václav Kudláček a zavedl oficiálně jakýsi zájmový *kroužek kybernetiky*.

Tehdy, za vlády lidu pod vedením *rodné strany*, byly zájmové kroužky vlastně jedním z mála způsobů, jak se lidé mohli a směli organizovat. A nejen to, zájmové kroužky byly podporovány a členství v nich se hodnotilo jako kladný poměr k lidu a socialismu. A tak bylo kroužků všude plno: šachový, výtvarný, modelářský, Valašský, Slovácký, divadelní, písni a tanců, ... a k nim pak přibyl kroužek kybernetiky.

V té době totiž začala být kybernetika konečně plně uznávaná jako pokroková věda, takže založení kybernetického kroužku byl vlastně politicky korektní čin. Čtenáři ať mi prominou, že se mně do vyprávění pořád ta politika nějak plete, ale byla to taková doba, kdy se politika pletla do všeho. Také se už začaly objevovat první počítače sovětské výroby, jako například počítač URAL, a s nimi přišla postupná orientace katedry matematiky na programování.

Ten URAL byl ale v Praze, takže na katedře samotné se programovalo pouze „na sucho“ - k tomuto bodu se ještě vrátím.

Mirek rozjel akce na několik frontách současně, rozšířil členství v kroužku, pomohl nám zvětšit naši dílnu, abychom mohli pokračovat v pokusech stavět další mašinky, ale hlavně, začal nás uvádět do tajuplného světa počítačů.

V tom mu také pomáhal Pavel Břeň, který byl o něco starší než my, taky studoval, ale už si nemohu vzpomenout, kde a v kterém ročníku. Ono to bylo tenkrát období velkých změn, řekl bych *stěhování národů* na akademické úrovni mezi fakultami a dokonce i mezi VTA (Vojenská technická akademie), takže vlastně nevím. V pohádce by se řeklo: „Kde se vzal, tu se vzal“. Pavel byl hodně sečtělý a byl dobře informován o všech posledních výstřelcích počítačové techniky. Jeho hlavní příspěvek spočíval v tom, že byl takový náš *d'áblův advokát*. Byla to funkce někdy nevděčná, přesto však velmi užitečná, jak už dnes všichni víme z praxe.

Kdy a jak se to všechno dělo, mám už ve vzpomínkách velmi matné, takže v mém vyprávění budou asi mezery a nepřesnosti. A tak, abych nehlásal bludy, zaměřím se pouze na to, co si poměrně dobře pamatuji, a ostatní vynechám.

Pro úplnost bych ještě dodal, že kromě tohoto kroužku vznikl další podobný kroužek na Katedře jazyků, který vedl Simeon Romportl. Zde se zabývali teoretickým problémem překladu textů z různých jazyků za pomoci počítačů.

Navštívil jsem několikrát pracovní schůzku tohoto kroužku jako „host“ a zdálo se mi to velmi zajímavé. Šli na to, jak se říká „od lesa“, a snažili se najít univerzální platformu pro všechny jazyky, hlavně tedy indoevropské, a způsob mapování jednotlivých jazyků pomocí této platformy.

Byla to práce na svou dobu avantgardní, protože počítačová technika byla tehdy ještě tak říkajíc „v plenkách“. Dnes jsou automatické překlady k dispozici na mnoha webových stránkách, ale i tak mají pořád ještě daleko k ideálu.

Náš první computer

aneb

Není číslo jako číslo

Jak už bylo řečeno, na katedře se rozmáhalo programování. Jenže v těch dobách „pravěku“ se programovalo pouze na nejnižší úrovni abstrakce, to jest přímo ve strojovém kódu. Nebylo to snadné a vyžadovalo to hodně mentální práce. Jedním z problémů bylo kódování čísel v programu. On totiž takový počítač jako URAL neuznával žádná jiná čísla než binární.



Honza (ten velký stojící) a já, s naší slavnou *převáděčkou*. Jak vidíte, oba jsme se na fotografování *ohákli* – tvídové sako a vázanka, jak se to tenkrát nosilo, když se šlo *štatlovat*.

v malém, nemusí fungovat ve velkém. Ta setsakra převáděčka nám dala hodně zabrat, ale nakonec to jelo a dobře.

Akorát to bylo děsně pomalé, protože celá ta mašinka byla postavena ze součástek staré telefonní ústředny (relátka a krokové voliče). No ale byl to náš vůbec první „počítač“ na katedře a jako takový si snad zaslouží místo v historii.

Pro nezasvěcené, binární čísla jsou čísla, která obsahují pouze jedničky a nuly. Tak třeba číslo 2 by se vyjádřilo binárně jako 10, číslo 3 jako 11 a číslo 4 jako 100 atd. To by ještě šlo, protože na taková malá čísla by se mohla použít třeba tabulka, ale představte si, jak by asi muselo vypadat číslo 314159 v binárním kódu. A k tomu si představte, že konverzi z desítkové do binární (dvojkové) soustavy museli lidé dělat bez pomůcek, jen tak na papíře. No hrůza.

I byl vznesen požadavek, aby „naši Myšáci“ udělali takovou nějakou mašinku, která by čísla konvertovala, neboli převáděla do binárního kódu automaticky. „Proč by ne, maličkost, to zmáknem“, byla naše nerozvážná odpověď. To víte, byli jsme mladí a plní elánu a po úspěchu s tou Myší plní sebevědomí.

Hned první víkend jsme se do toho pustili a vyrobili prototyp základní jednotky pro tu novou mašinku. A ono to fungovalo, takže hurá s chutí do toho. Jenže my jsme se měli ještě hodně co učit o designu a o životě vůbec, a také o tom, že co funguje

ve velkém, nemusí fungovat v malém.

Náš první neuron

aneb

Pes, který slintá, nekouše

Asi jste, milí čtenáři, slyšeli v biologii o podmíněném reflexu, který objevil ruský vědec Ivan Petrovič Pavlov, a také o jeho pokusech se živým psem, na kterém tento reflex demonstroval. Pro osvěžení vaší paměti, to bylo tak. Psovi se voperovaly zkumavky na sbírání slin (chudák pes, ale tak to chodí), a pak se s ním dělaly hokus-pokusy a sledovalo se, kdy slintá a kdy ne.



Smyslem těch pokusu bylo dokázat, že je možné vytvořit nervové spojení mezi vnějším stimulem a reakcí organismu. Prostě psovi se dávalo jídlo po rozsvícení žárovky a časem se nacvičil tak, aby slíntal, kdykoliv uviděl svítit žárovku. Této reakci organismu se říkalo podmíněný reflex.

No a někdo si na katedře vzpomněl, že by se něco takového dalo simulovat s použitím elektrických obvodů, a že by to byl vhodný projekt pro náš vzkvávající kybernetický kroužek.

A tak jsme to *spíplali*, či jak se říkalo *sbastlovali* dohromady s použitím kondenzátoru jako paměťového elementu, nějakých těch relátek, žároveček a podobně. No a bylo to.

Jenže u toho jsme nezůstali, ono už tenkrát platilo heslo *Publish or perish*, česky *Publikuj, jinak zahyneš*. I bylo nám naznačeno, že by bylo dobré o tom něco napsat. Tak jsme „horko těžko“ spíplali článek do časopisu *Věda a technika mládeži* o tom, jak si postavit *Kybernetického psa*.

Když se na to dívám dnes s odstupem času, tak ten náš *pes* byl vlastně pokus o umělý neuron. Dnes je to samostatné odvětví informační technologie. Říká se tomu *Artificial Neuron Networks* (umělé neuronové sítě) a používá se to v mnoha odvětvích, hlavně však pro aplikace, kde se vyžaduje jistá flexibilita s možností trénování.

Ovšem z historického hlediska vzato, ten *pes* byl náš první umělý neuron na katedře matematiky a možná, že i první v celém Československu.

Poznámka: S myšlenkou umělých neuronových sítí jako první přišel průkopník počítačů Alan Turing v roce 1946 ve své korespondenci s W. R. Ashby. Publikoval ji v roce 1948 pod názvem „Unorganised Machine“.

Náš kroužek se stává slavným

aneb

Světská sláva — polní tráva

Aniž bychom to tušili, s tím článkem o kybernetickém psu jsme vypustili džina z láhve, jak se říká. Celá záležitost měla totiž ideologické pozadí. Bylo to demonstrování materialistické podstaty duševní činnosti, což bylo v souladu s tehdejšími oficiálními postoji. To se tehdejšímu režimu moc líbilo a tím pádem se nám najednou rozjely další akce, až se nám z toho zatočila hlava.

Napřed jsme byli pozváni do Zemědělské školy v Táboře, abychom jim tam takového psa udělali. Což bylo fajn, byl to pro nás hezký a zajímavý výlet.

Potom ale o nás napsalo pochvalný článek *Rudé právo*, což byl tehdejší oficiální orgán všemocné *strany a vlády*. Zde je úvod článku naskenovaný z Rudého práva:

Věk kybernetických zařízení — elektronkových mozků a počítačích strojů — se přiblížil jaksi znenadání. »Kybernetici« odvážně zasahují do procesů mechanizace a automatizace průmyslu. Zaslouží se však také o porážku dřiny fyzické i duševní. Pro budoucí techniky je to vlastně již otázka dne. Proto skupina nadšenců na Vysokém učení technickém v Brně založila při katedře matematiky na strojni fakultě kroužek kybernetiky. Má za sebou něco přes dva roky nevšední činnosti.

Následoval pak celý článek hýřící superlativy o tom, co všechno ten náš kroužek udělal a co ještě udělá. Dnes se tomuto stylu psaní říká po americku „spin“, ale tenkrát se to bralo vážně a článek vyvolal patřičnou odezvu. Přes noc se z nás stali hrdinové dne a také jsme se tak cítili a celá naše široká rodina byla z toho divoká. Musím však podotknout, že můj otec včas rozeznal nebezpečí pýchy, která, jak víme, předchází pád, a uzemnil mě větou, která se u nás tradovala po generace: *Jo chlapče, tohle kdyby viděl staré Padovec, tak dostaneš milion a rožák!* Totiž, dle ústního podání, ten Padovec byl kdysi ještě za Rakouska bohatý brněnský občan, který byl slepý a slíbil milion a rožák tomu, kdo mu navrátí zrak.

I když mě otec tak krásně usadil, moc to nepomohlo, protože k dovršení všeho se k nám na katedru přihnula z Prahy televize. A tak se filmovalo, což bylo pro nás něco nového a zajímavého. Soudruh režisér nás stavěl do různých možných i nemožných pozic a navíc nás nutil, abychom se tvářili přirozeně a inteligentně, což byl, ovšem, požadavek naprosto nesplnitelný pro někoho, kdo zrovna není *národní umělec*. Jak jsme asi vypadali, si asi dovedete představit.

Soudruh režisér si z toho ale vůbec nic nedělal, ba naopak nás povzbuzoval v této, jak se později ukázalo, trapné činnosti. Pak to vyšlo ve státní televizi (jiná stejně nebyla) s úvodem Jany Werichové jako program: *O strašidlech*. Byli jsme tím mírně šokováni, ale pak jsme museli uznat, že ony se ty naše přirozeně inteligentní ksichty na nic jiného stejně nehodily. A tak jsme konečně přišli k poznání, že skutečně *ta světská sláva je polní tráva*, jak praví staré české přísloví. Ovšem objektivně vzato, byla to všechno dobrá reklama pro katedru i VUT. A zde je jeden snímek jako památka na tu světskou slávu.



Mirek Fendrych spravuje náš computer kladivem a v pozadí vykukují členové kroužku. Zleva je to Pavel Břeň pak Tonda Aujeský, Jana Kodešová a Honza Brejl. Jak vidíte, všichni jsme se snažili tvářit přirozeně a inteligentně, ale nejlíp se to povedlo Mirkovi, který seděl zády ke kameře.

Náš seminář aneb Hory, lyže a počítače

Jedna z věcí, která byla za tehdejšího režimu dobrá, byla podpora masových akcí, zvláště akcí pro mládež. Nevím, odkud na to fakulty braly peníze, ale na našem kroužku kybernetiky rozhodně nešetřili. Jedna z těchto podporovaných akcí byl seminář na horách, který pro nás zorganizoval Mirek Fendrych pod záštitou Fakulty elektrotechniky. Seminář se konal v březnu 1961 někde v Jeseníkách.

Abyste milí čtenáři moc nezáviděli, nebyla to žádná ulejšťárna, byl to skutečně seminář, jak se patří a to lyžování byl jen takový přídavek. Museli jsme si každý předem připravit nějaký referát, který jsme tam přednesli a prodiskutovali. Dnes už si vzpomínám pouze matně, takže mohu uvést jen některé.

Václav Dvořák z našeho ročníku, dnes profesor na VUT, si vybral pro svůj referát operační systémy. S operačními systémy šly ruku v ruce systémy strojových instrukcí a s tím byly spojené některé zásadní otázky, jako například, které funkce se mají realizovat v hardwaru a které v softwaru.

Tenkrát byl hardware drahý a ne moc spolehlivý, takže byla snaha o minimální design. A v tom Václav překonal všechny rekordy, když „nakómal“ počítač, který měl všeho všudy pět strojových instrukcí. Vzpomněl jsem si na to po letech, kdy s velkou slávou Intel nebo kdo zaváděl takzvaný *Restricted Instructions Set* pro mikroprocesory, což ale díky Václavovi byla pro nás už „stará vesta“. Jak se zdá, my Češi jsme v hodně věcech napřed.

Jaroslav Zelený, také z našeho ročníku a později velký boss na VÚMS, nám přednesl principy feritových pamětí. Tato technologie byla tehdy relativně nová a velice slibná.

Jarmila Klímová z ročníku před námi přednesla referát o principech bubnových pamětí. Tyto paměti se už dnes až na malé výjimky nepoužívají, tehdy ale hrály důležitou roli zvláště pro menší počítače, jako byl LGP 30 později instalovaný na VUT.

Pavel Břeň měl referát pojednávající o použití počítačů pro automatickou regulaci, což byla tenkrát ještě „hudba budoucnosti“.

Já jsem povídal něco o systémech kódování čísel.

Referátů bylo tenkrát hodně, ale bohužel už se mně to vykouřilo z hlavy. Důležité byly ale debaty, které následovaly po každém referátu. V těch zvláště vynikal Pavel Břeň, který měl poznámky ke všemu a dokázal vše uvést na pravou míru. To na nás zanechalo hluboký dojem, takže jsme na něj složili písničku. To víte, takový „d'áblův advokát“ to nemá nikdy lehké, ale aby mu to nebylo líto, vymysleli jsme si sloku skoro na každého, včetně Mirka Fendrycha, který celý ten „cirkus“ měl na starosti. Tedy legrace bylo dost a dost, jak už to chodí na horách. Přijeli jsme domů osvěženi a plni energie dát se znovu do díla.

VUT dostává svůj vlastní počítač aneb Stěhujeme se

Nevím přesně, ve kterém roce to bylo, ale ten rok (snad 1961) by měl být zapsán zlatým písmem do kroniky města, protože VUT dostalo první skutečný počítač LGP 30.

A světe zboř se, byla to mašinka západní výroby. *Informační revoluce* tím dostala pořádný *boost*, neboli česky *odpich*.

Ten počítač měl být nainstalován na třídě Obránců míru, v zadní budově, kde byla studentská menza. Bylo rozhodnuto, že se tam přestěhuje také naše dílna. Tak jsme se stěhovali do nového prostředí a začali tím nový úsek života, který však už nebyl tak krásný jako ten, který jsme zažili v Gorkého ulici. S opravdovým počítačem totiž přišlo i kus opravdového života, a už to nebyly ty pravé pionýrské a bohatýrské časy. Bylo založeno výpočetní středisko s vedoucím a s organizačním řádem a všechno se bralo najednou nějak moc vážně. Náš elán přesto neuhasl a naše akce a hlavně legrácky pokračovaly dál. Dnes vidím, že jsme měli pravdu: vážné věci se mají dělat jen tehdy, když člověk začne ztrácet smysl pro humor a to je obvykle až se ožení či vdá.

Náš robot a další hračky

aneb

Tati, ty se nám ženíš?

Po Pavlovově psu bylo docela logické pustit se do dalších podobných projektů. A když už, tak proč si neudělat opravdového robota? Tenkrát jel v televizi pořad pro děti s robotem, který se jmenoval Emil. Tak jsme si Emila taky udělali, a to z papírových krabic na kovové kostře, namalovali obličej, no prostě udělali jsme si 2 metry vysokou hračku. Hloupost, dalo by se říct, jenže on ten robot taky mluvil a za tím byl skutečný výzkum. Totiž na jiné katedře, nevím, jak se přesně jmenovala, dělali výzkum syntetické řeči a spojili se s námi, abychom jim udělali takovou výstupní jednotku. A my jsme jim dodali Emila.

Pokud se pamatuji, syntetizátor dal dohromady Jiří Vlček z našeho studijního ročníku (také *pomvěd* jako my). Takže robot mluvil to, co mu přišlo ze syntetizátoru. Pravda, mluvení připomínalo trochu kuňkání žab na rybníce, ale přece jenom tomu bylo trochu rozumět a to byl na tehdejší dobu úspěch.

S robotem jsme si užili dost legrace na různých akcích, jako byla třeba Mikulášská zábava. Dokonce jsme ho vzali jako překvapení na svatbu Mirka Fendrycha, kde způsobil značnou senzací hraničící s veřejným pohoršením, když před Novou radnicí vykřikoval „Jeje tati, ty se nám ženíš“.

Další hračky potom přibýly postupem času, jako „Myš II“, která už byla více realistická. Měla skutečně i paměť a mechanismus, který tahal myš vyrobenou z plastelíny. Potom jsme postavili hru zvanou NIM, která pak přetrvala několik generací studentů a dokonce se dostala do laboratoří na medicíně.

Pro vysvětlení, hra NIM se hrála původně se sirkami. Udělala se řada sirek a hráči střídavě odebírali sirky, až žádná nezůstala. Na jeden tah mohl hráč odebrat jednu, dvě i více sirek až do určitého limitu. Kdo vzal poslední sirku, ten vyhrál. V našem provedení hrál jeden hráč proti stroji. Sirky byly nahrazeny žárovečkami a odebíraly se mačkáním příslušného tlačítka. Stroj komunikoval s lidským hráčem rozsvěcováním různých transparentů. Tak například, když někdo šidil a odebral více sirek, než byl dovolený limit, byl strojem napomenut a rozsvítil se mu transparent *Mě neobelstíš*. Byl to takový psychologický trik, kterým bylo vytvořeno zdání, že ta mašinka je „strašně chytrá“.

Konec hrám

A tak jsme si v hrátkách a radovánkách ani nevšimli, jak ten čas letěl, a přišla doba, kdy hraní muselo skončit. Začínali jsme poslední dva roky školy, tedy jako bychom dobíhali do cílové rovinky. Nastávala nám vážná práce se studiem, takže jsme se od toho hraní postupně odpoutávali a začali se věnovat intenzivněji moderní technologii, počítačům a programování. A tím se stalo, že náš kroužek kybernetiky více méně přerostl do regulérního studijního kroužku.

Legrace skončila a pro některé z nás to byl i *pláč a skřípění zubů*, vyjádřeno v biblické terminologii. Byli jsme ale dobrá parta a i tento problém jsme překonali: zavedli jsme doučovací kroužek pro ty slabší a vyšlo nám to. Všichni jsme v roce 1963 odpromovali - ne všichni na výtečnou, ale přece.

Pak přišly umístěnky na práci a my jsme se rozprchli po celé republice, protože inženýrů, i když novopečených, bylo potřeba všude. Já zůstal na Fakultě elektro jako asistent na *Katedře počítačů, řízení a regulace, ale to už patří do jiné kapitoly*.

A tak jsme se zapojili do procesu budování, který byl tenkrát chápán, jak ukazuje pohlednice z té krásné heroické doby.



Krásná to báseň, není-liž pravda, jenže mě čert pokoušel s jinou:

Na západ je cesta dlouhá, ...

A já nakonec podlehl tomu volání dále a v roce 1968 jsme s manželkou odjeli na vytoužený Západ. Akorát jsme se nějak špatně zorientovali a skončili na dálném východě v Austrálii.

Na závěr

Na závěr se mně jaksi podvědomě vnučuje tehdy populární píseň Waldemara Matušky „To všecko odnes čas“, ale ono to není jen tak jednoduché. Pravda je, že spoustu věcí skutečně odnes čas, technologie pokročila a mnoho věcí zastaralo, ale ta jiskra zájmu, který v nás probudil Kudláček, Fendrych a další, ta mnohým z nás zůstala.

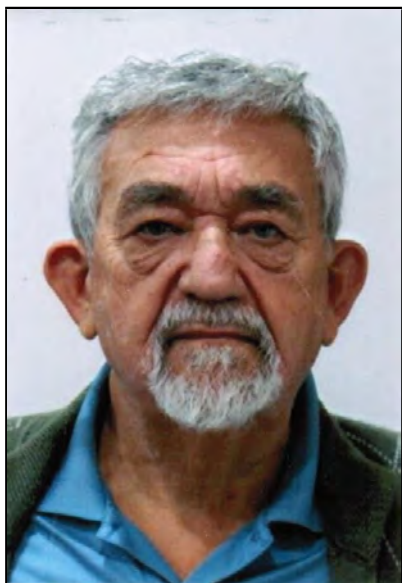
Já sám jsem se po letech vrátil zase k hračkám, ale nebyly to „myši“ ani nic podobného. Zalíbily se mně totiž hračky velké, jako chemické fabriky nebo biologické laboratoře, kde se vyrábělo na tuny a kde se jednalo o mnohamiliónové (v US dolarech) investiční celky. Byla to automatizace výrobních procesů za použití počítačů, což často znamenalo kritické podmínky jak z hlediska komerčního, tak i z hlediska bezpečnosti práce. A tehdy mně přišla vhod znalost všech těch věcí a konceptů, kterým jsme tehdy na VUT souhrnně říkali „kybernetika“.

Dokončil jsem mnoho takových projektů a některé publikoval na konferencích v USA, Austrálii, Singapuru a dalších. Mohu tedy zodpovědně říct, že hodně z toho, co jsme se tenkrát jako studenti učili nebo i společně objevovali, zůstalo a přežilo jako základní principy designu nezávislé na technologii dané doby. A v tom je snad největší hodnota toho, co se tenkrát na VUT dělo. To je v kostce všecko.

A když jsem svoje vypravování začal jako pohádku, tak bych to měl také tak skončit. Třeba tak, jak končila pohádky naše babička:

A pak zazvonil zvonec a pohádky je KONEC a vy děcka pomodlit, vyčurat a spát.

Psáno v Melbourne l. p. 2010.



V ZEMI KLOKANŮ

V potu tváře sepsal

Tonda Aujeský

Absolvent Fakulty elektrotechnické

Autor se narodil 4. ledna 1940 v Brně Holáskách. Vystudoval VUT obor elektro v roce 1963. V roce 1968 emigroval do Austrálie. Působil v oboru *research into satellite imaging* a později v oboru *process control engineering*. Byl řečníkem na mnoha konferencích po celém světě. Byl spoluautorem knihy "Batch Controls", která byla publikována v USA. Pro archiv VUT napsal tyto vzpomínky. Zemřel 26. prosince 2024 v Austrálii.

Úvodem

V předchozím článku jsem vylíčil, jaké to bylo na VUT, když jsme zaváděli počítačovou techniku, hlavně ty úplné začátky pod vedením Václava Kudláčka, Miroslava Fendrycha a dalších. Byl jsem ale požádán, abych pokračoval v psaní dál a vylíčil, jak jsem své vědomosti nabyté na VUT využil v praxi v daleké zemi Austrálii, kam jsem emigroval v roce 1968.

Nebojte se, drazí čtenáři, nebudu vás otravovat s tím, jak jsme to měli jako emigranti těžké, co jsme vytrpěli a co slz vyplakali. Na to jsou jinačí machři, kampak se já na ně hrabu. A vůbec, koho by bavilo takové věci číst, raději něco pro zasmání, že ano. Jenže to bych snad nikdy neskončil, protože mně to připadá všechno k smíchu, celá ta zem tady i tam a celé lidské snažení. Takže to taky nepůjde, a proto se zaměřím pouze na to, jak zněla „objednávka“, tj., jak jsem své znalosti z VUT upotřebil ve světě.

Tak se teď pohodlně posadíte a poslouchajte, vyprávění pokračuje. Vynasnažím se, aby nebylo nudné. Je psáno jako story, protože jinak by asi byla hrozná otrava to číst.

Můj první úspěch na Západě

aneb

Vám poděkování a lásku vám – vinohrady, vinohrady

Jak jsem poprvé v zahraničí použil svých znalostí nabytých na VUT?

Začnu tím, jak jsme se kdysi na obecné škole učili recitovat takovou krásnou báseň oslavující příchod Rudé armády v roce 1945:

*Vám poděkování a lásku vám,
kéž zněly by jak zvony. . .*

A byl to zase příchod této armády v roce 1968, kterému vděčím za rozvoj své profesionální kariéry. Takže vlastně mám důvod tuto báseň stále procítěně recitovat.

V roce 1968 jsme se s vřelými díky na rtech s manželkou sebrali a odjeli do Vídně, abych tam začal svoji závratnou kariéru na Západě. Mohu říci, že kariéra to opravdu závratná byla, jenže ne zrovna nahoru (malý technický detail, že ano). Musím přiznat, že v této fázi vývoje událostí

šla moje kariéra více dolů než nahoru. A také, že mně moje odborné vědomosti načerpané na VUT zrovna moc nepomáhaly, s malými výjimkami, jak se zde dočtete. Však posuďte sami. Hned první noc v té slavné Vídni se nám podařilo chytit vši či štěnice a spát v telefonní budce (lepší než pod mostem, tam už bylo plno). Tedy byl to problém, na který mně byla moje znalost kybernetiky, diferenciálních rovnic a logických obvodů houby platná. Pak se ale věci zlepšily. Když jsme se zbavili těch štěnic, tak se nám podařilo sehnat podnájem a zaregistrovat se na australské ambasádě jako utečenci.

Zaregistrování nebylo jen tak, byla tam fronta jak u řezníka v letech padesátých, ba i delší. Když na nás konečně došla řada, tak si mě podrobili vážnému výslechu, neboť, jak se ukázalo, inženýři patřili automaticky mezi podezřelé živly. Manželku Alenu ale nechali na chodbě čekat, ani je nezajímala. Když jsem byl po hodině a něco konečně prověřen a celý fascikl byl o mně sepsán, padla kritická otázka: „A kolik vás vlastně je?“ Když jsem řekl, že je se mnou ještě manželka, tak na ten fascikl napsali velikým písmem propisovačkou

+1

a tím to bylo vyřízeno, ani její jméno je nezajímalo. Byla to tedy Plus Jedna. Já si vlastně mohl vzít s sebou kteroukoliv slečnu z Prátru (tedy něco k zamyšlení, že ano).

Pak už jsme (já a moje Plus Jedna Alenka) jen čekali a užívali si Vídne. Jenže „bez peněz do Vídne nelez“ a naše penízky se nám začaly kutálet na všechny strany. Brzy jsme byli na mizině. Pak se ale na nás usmálo štěstí a chytli jsme zaměstnání na vinobraní jako pacholek a děvečka v obci Poysdorf. Ale i zde jaksi nebylo možno uplatnit moje odborné znalosti a ještě k tomu to byla hrozná „hokna“, tedy práce řečeno po brněnsku.

Ovšem z marxistického hlediska to byla úžasná příležitost sblížit se s dělnickou třídou, akorát přišla trochu pozdě na to, aby nám spravila naše kádrové materiály. Je ale nutno dodat, že právě znalost marxismu získaná na VUT mně pomohla rychle se zorientovat v dané situaci a včas se zase vymanit z moci vesnického boháče vykořisťovatele neboli kulaka, jinak bychom tam asi ztvrdli dodnes.

A tak na základě marxistického rozboru jsme zase vypadli zpátky do Vídne a brzy nato odletěli do Austrálie. Byla to vlastně moje první příležitost úspěšně aplikovat v zahraničí něco z toho, co jsem se naučil na VUT.

Pokus o další úspěchy

aneb

Kam nás to vezou?

Jak jsem dělal Kecalá

I zloděj aut se může zamilovat

Alenka nechce papat skopové

Po úspěchu ve Vídni s marxistickým rozbohem jsem doufal, že se brzy dostaví úspěchy další. A protože jsme díky Honzovi Blatnému (vedoucímu katedry) intenzívně studovali angličtinu, tak už jsem se v letadle do Austrálie těšil, jak budu tyto úžasné vědomosti aplikovat v praxi a oslním tím všechny své spolucestující. I stalo se bohužel však jen to první. Ano, měl jsem příležitost aplikovat své znalosti jazyka anglického, ale nikoho jsem tím neoslňl, ba naopak, spoustu lidí jsem zmátl a přivodil jim stav deprese.

Když jsme se po 24 hodinách letu konečně „docabrali“ (jako ten galán, co, než „sa k nám docabral, sežrala ho sviňa“) do Sydney a my vylezli z letadla, tak nás naložili do autobusu a kamsi vezli. Mysleli jsme, že do města, ale asi tak po hodině jízdy přes zoufale vyprahlou zemi, která vypadala jako černovická planýrka (známé brněnské smetiště) po atomovém výbuchu, nám to začalo být nějak moc divné.

I začala pracovat naše fantazie, a to na plné obrátky: aha, je to celé podraz, vezou nás jako otrocké pracovní síly zavlažovat poušť. A najednou nám bylo všechno jasné, proto ta anonymita, proto pouhé plus jedna, že my blázní jsme do toho letadla vůbec lezli. Padla na nás hrůza a hlavou mně hned prolétly písně jako „Černý muž pod bičem otrokáře žil“ a „Nelly Gray“. Bože, co teď dělat?

Dnes je nám to ovšem k smíchu, ale tenkrát se věřilo všemu, byla to taková pohnutá doba, kdy se panika šířila jako oheň. Už ve Vídni mezi lidem kolovaly úžasné fámy, jako třeba že milion čínských parašutistů je připraven, aby zabrali Prahu a tak podobně. Takže není se co divit.

A pak nás napadlo něco celkem úplně jednoduchého, totiž zeptat se řidiče, kam nás veze. A to byl můj okamžik, moje velká příležitost blýsknout se svou angličtinou. Suverénně jsem povstal a divadelním způsobem prošel celým autobusem až k řidiči a pronesl, aby všichni slyšeli:

„Excuse me, Sir ...“

A kupodivu řidič, i když to byl žalárník budoucích otroků, byl ke mně docela slušný a dal mi i slušnou odpověď. Jenže já mu nerozuměl ani slovo a měl jsem po slávě. Pak se do toho vložila nějaká paní, která měla údajně státní zkoušku z angličtiny, ale dopadla stejně jako já. A protože už tam nebyl z cestujících nikdo, kdo by s jazykem anglickým přišel kdy do styku, museli jsme se odevzdat do rukou osudu.

Na vysvětlenou, australská angličtina je hodně jinačí než naše školská. Například slovo den, které se píše day, jsme byli zvyklí vyslovovat jako „dej“, ale v Austrálii se vyslovuje „daj“. Navíc většina Australanů neotvírá pusy a proceduje slova jen tak mezi zuby. K tomu všemu hodně lidí v Austrálii mluví nosem, jako třeba Francouzi. Konečný efekt toho všeho byl, že jsme nerozuměli lautr nic.

A tak jsme v takovém mírně depresivním stavu jeli dál. Po hodinách jízdy jsme se za tmy dostali na nějaké místo, které skutečně vypadalo jako pracovní tábor. A to ve mně hrklo!

I čekal jsem, že uslyším hrubé hlasy dozorců a popřípadě praskání bičů jakož i sténání „muklů“ trestaných za pokus o útěk. Místo toho se ale ozvalo zvenku docela veselé volání:

„Hele Pepíku, pojd' sem, ty vole, ...“

A to se nám všem konečně ulevilo. Ne, to nebyl hlas utrápeného otroka, byli jsme u cíle: v imigrantském táboře Bonegilla, pod ochranou samotného Commonwealth of Australia (tedy Australské společnosti). Takže ono to vlastně dopadlo dobře, navzdory mému nezdařenému pokusu o uplatnění mých vědomostí z VUT.

A nakonec jsem mohl přece jen uplatnit svoji angličtinu. V Bonegille jsem se chtěl nechtěl stal takovým polooficiálním překladatelem, dohazovačem a organizátorem. Byl jsem něco jako ten Kecal v Prodané nevěstě a taky jsem tak dopadl. Při své nevinnosti a neotřískanosti jsem se začal zaplétat do soukromých záležitostí lidí, se kterými bych se normálně ani nestýkal. Z toho pak vznikaly problémy, na které mne VUT nepřipravilo. Tak například, byl jsem zatažen do organizování svatby mezi jednou zasloužilou kulturní pracovnící a zlodějem aut z Prahy, která se ale neuskutečnila, protože nevěsta utekla autostopem do Melbourne a ženich se z toho nervově zhroutil a hrozil nám ublížením na těle.

Takových případů jsem měl více a musím sebekriticky přiznat, že na takový džob byla moje inženýrská kvalifikace poněkud nevhodná. Kromě toho Bonegilla byla příliš daleko od velkých měst jako Sydney a Melbourne, takže šance sehnat práci byla minimální. A ještě k tomu, krmili nás tam skopovým masem, které moje manželka nesnášela.

Tedy problémů bylo dost, proto jsme to nakonec vyřešili stejně jako ta kulturní pracovnice a přesunuli se, ovšem zcela legálně, do Melbourne.

Musím dodat — všechna čest australským institucím, starali se o nás v té Bonegille jak nejlépe uměli a to, co se tam dělo, nebyla jejich vina (ani to, že Alenka nerada skopové).

A teď něco do fochu

aneb

Inženýrem v Austrálii Ve spárech Baby Jagy Analogový počítač – co je to?

Ano, milí čtenáři, už přijde to, na co vlastně čekáte. Konečně vám povím, jak to tam bylo s námi inženýry a co se dělo v informační technologii. Abych se k tomu dostal, musím hodně věcí vynechat, takže moje vyprávění bude trochu na přeskáčku.

Tak zaprvé, jak to bylo s námi inženýry? Dostat se zpátky do svého oboru počítačů a vůbec začít pracovat jako inženýr nebylo snadné. Na cestě bylo mnoho překážek, o kterých se mi ani nesnilo, až jsem si někdy připadal jako ten princ, co šel vysvobodit princeznu ze spárů Baby Jagy. Na australské ambasádě ve Vídni mně sice naslibovali, jaké úžasné džoby mě očekávají, ale skutek utek, jak říká české úsloví. Podmínkou pro získání práce jako inženýr bylo členství v klubu, který se jmenoval *Institution of Engineers Australia*. Oni si strašně potrpěli na takové věci jako kluby. To víte, jak se říká, poturčenec horší Turka, tady byli více britští než sami Britové. Ovšem dostat se do toho Institutu nebylo snadné, člověk musel splnit dvě podmínky:

- (1) dokázat, že má opravdu kvalifikaci jako inženýr z university, kterou Institut uznával.
- (2) být sponzorován aspoň dvěma členy klubu.

S podmínkou první jsem měl štěstí, protože VUT bylo uznáváno, horší to však bylo s podmínkou druhou. Kde má člověk v cizí zemi shánět dva sponzory? A zase jsem měl štěstí, jeden rodák z Brna a jeho kamarád mne sponzorovali. Jinak bych byl asi v . . . , jak říkával Josef Švejk. Bylo to sice členství na nejnižším stupínku, jako takzvaný Graduate, ale pro získání džobu to stačilo. Obrazně řečeno, Baba Jaga byla ošálena a princezna vysvobozena.

Pro úplnost bych ještě dodal, že ty stupně byly následující: Fellow (nejvyšší), Corporate Member, Member, Graduate (nejnižší).

Zůstal jsem pak tím Graduate po celou dobu až do roku 1997, kdy už jim to asi bylo hloupé a udělali mne hned Fellow. Já byl totiž svým věkem nejstarším Graduate, kterého kdy měli.

Abych se přiznal, nechtěl jsem si o povýšení žádat z takové určité hrdosti. Nešlo mně prostě pod nos, že my lidé z českých zemí, to jest z jedné z nejkulturnějších oblastí Evropy, s Univerzitou Karlovou z roku 1348 a v mém případě z města, kde se narodili nebo působili velikáni světového jména jako Mendel, Gödel, Mach, Janáček a jiní, se máme doprošovat nějakých koloniálních úředníků.

Podobně jako s inženýrským institutem se mně vedlo i s další institucí, což byla Australian Computer Society (Australská počítačová společnost), tedy další klub, který měl nos nahoru. Stát se členem bylo žádoucí, protože v určitých džobech se členství vyžadovalo. Tak jsem se

taky přihlásil a v dotazníku uvedl, jakou jsem měl praxi a s jakými počítači jsem pracoval. K mému podivu je vůbec nezarazila exotická jména jako například URAL, zato však jsem pohořel s tím, že jsem pracoval s analogovými počítači. V té době už jsem měl džob v jedné velmi prestižní organizaci, takže jsem členství už moc zoufale nepotřeboval. Ale nakonec mně ho přece jenom dali. Ono se totiž ukázalo, že ti slavní experti nevěděli, co vlastně analogový počítač je, ale nechtěli to přiznat. Ó boží prostoto!

Naštěstí pro mne se v komitétu objevil nějaký Američan, který jim to objasnil a pak mně osobně zatelefonoval a gratuloval k přijetí za člena. Jaké poznámky měl přitom o Austrálii, si raději nechám pro sebe. Takže i v tomto punktu to má pomyslná Baba Jaga prohrála. Ovšem Baba to nikdy úplně nevzdala a čas od času mně ukázala svůj líbezný úsměv.

Pro zajímavost musím uvést, že jsem nebyl sám, kdo musel bojovat se záludnou Babou Jagou. Lékaři, dentisté ale i kadeřníci to měli ještě horší. O tom se mezi rodáky tradují různé historky. Například na jednom sezení komitétu lékařů si vzali na paškál nějakého lékaře z východní Evropy. Deptali ho jak mohli a pak vznesli otázku, která ho měla úplně dorazit, to jest, zda četl jistou odbornou knihu. „Ne“ odpověděl ten lékař, „já ji napsal“.

Tak to je v kostce o inženýrech a teď se dostaneme k počítačům.

Konečně počítače aneb Doba učení Obrovské úspěchy úžasného milence

K počítači jsem se dostal až po roce v Austrálii a to na přímlovu dalšího místního Čecha.

Bylo to v Bureau of Meteorology, což znamenalo podle mé drahé Plus Jedna, že tahle organizace byla odpovědná za počasí, hlavně za to špatné. Programovali jsme na IBM 360 v jazyku PL/1. Ze začátku to bylo zajímavé, musel jsem se hodně učit, především programovací jazyk a operační systém a pak také společenský život v práci. To nebylo jen tak. Když chtěl člověk zapadnout mezi ostatní, tak musel dělat to co oni. Ráno se začalo o půl deváté, ne jak u nás doma v sedm, v deset hodin byl pak „cup of tea“, tedy čaj. Ono se říká, že Japonci mají čajové ceremonie, ale ta australská si s nimi v ničem nezádala. Nechalo se práce a všichni jsme se shromáždili ve zvláštní místnosti nebo aspoň někde v rohu sálu.

Tam se popíjel čaj a klábosilo se asi tak hodinu. Stejná ceremonie se opakovala ve tři odpoledne. Není třeba zdůrazňovat, že při takovém režimu dne se práce moc nenalouskalo.

Tenhle džob byl vlastně můj první úspěch, tedy aspoň mezi místními Čechy. Ovšem záleží na tom, čemu se tak říká. Například na jedné zábavě krajanů se ke mně rozběhl jeden starousedlík, jak my jim říkali, a povykoval na celý sál:

„Pane inženýře, slyšel jsem, jaké máte obrovskéééé úúúspěchy u těch kompjutorůůů“.

Já bych se byl snad na místě hanbou propadl. Lépe však to vyjádřila jedna sličná slečna, jinak kulturní pracovnice z Prahy, která docela veřejně prohlásila:

„Pane Aujeský, vy byste byl úžasný milenec, při vašem platu.“

To už mně bylo přece jenom milejší, protože ta děvenka to aspoň myslela upřímně.

V tom džobu jsem vydržel asi rok, ale pak mne to začalo nudit, byly to samé administrativní aplikace, nic moc pro inženýra. Další džob byl u Shella, ale zase to stejné: IBM 360, čaj ráno a odpoledne a celkem nuda. Tak jsem taky odešel.

Real time computing

aneb

Děláme aluminium

Pak přišlo něco zajímavého, řízení produkce aluminia počítačem, u americké firmy Alcoa. Tam jsem vydržel celé dva roky a hodně se naučil o real time computing v praxi. Pracovali jsme se systémem IBM 1800 ve Fortranu. Tady se všeobecně používal Fortran pro technické i vědecké aplikace. Fortran se mi zdál dost primitivní ve srovnání s Algolem, se kterým jsme v Česku běžně pracovali, ale tak to tady chodilo. Strašně zajímavá byla ovšem přímá kontrola procesu počítačem, tedy DDC (direct digital control).

Pak jsem odtamtud taky odešel, protože mne pořád lákal výzkum umělé inteligence. Pořád mne někde strašila ta naše „myš v bludišti“ a ten „Pavlovův pes“ a říkal jsem si, že bych to chtěl dotáhnout dál.

Ve výzkumáku

aneb

Umělá inteligence

Znovu ve spárech Baby Jagy

A tak jsem se konečně dostal na to správné místo Commonwealth Scientific and Research Organisation, Division of Computing Research. Šíleně dlouhé jméno, krátce řečeno, bylo to něco jako náš VÚMS (Výzkumný ústav matematických strojů) v Praze. Oni tam měli dokonce celou sekci právě na tu umělou inteligenci. Tak hurá do toho a rovnou do spárů státní byrokratické organizace, znovu do spárů Baby Jagy.

Co se stalo? Než jsem se tam zorientoval, tak celou sekci rozpustili a bylo po mých nadějích. Lidé, co v té sekci pracovali, se rozprchli po celém světě, někteří do USA, jiní do Skotska, kde se takový výzkum ještě dělal. Dokonce jeden z badatelů pověsil počítače na hřebíček a zmizel někde v Indii, kam odešel studovat věci nadpřirozené a tajemné. Tak jsem tam nějaký ten rok „ocmrndával“ (ono se to ani nijak jinak nedá říct) a pracoval na různých džobech, dokonce jsem byl na takzvané *Help Desk*, což nebyla zrovna služba pro slabé charaktery.

To bylo tak. Tehdy ještě nebyl internet, ale my měli svou vlastní síť, s centrálním počítačem Control Data Cyber. Měli jsme širokou klientelu, hlavně z vědeckých pracovišť. No a každou chvíli se něco polámalo, nebo si to naši uživatelé popletli a potřebovali pomoc.

Tak mně zavolali na tu Help Desk, abych jim pomohl. Jenže pomoc, kterou jsem jim měl dát, spočívala v tom, že jsem si musel napřed nechat od nich vynadat, a teprve když se uklidnili, vyslechnout si, co vlastně byl jejich problém. No hrůza, není snad na světě nic strašnějšího než rozhněvaný vědec, to je horší než slon v říji. Pamatuji se, že mně jeden takový vynikající vědec dokonce po telefonu půl hodiny vyhrožoval jako nějaký blázen. Ono se později ukázalo, že blázen byl, ale až když rozsekal svoji manželku na kusy, což mně ovšem nebylo nic platné. Ne, nic si nevymýšlím. Kdo by si mohl takovou pitomost vymyslet než jedině život sám.

Myslel jsem si ale, že věrnou službou aspoň za čas získám povýšení a dostanu se k nějaké lepší práci. To jsem ale zapomněl, že Baba Jaga si hlídá své služebníky a drží je dole.

Nakonec jsem na Babu přece jenom vyvrál a povýšení dostal, jenže mě to tam už stejně přestalo zajímat, protože jsem si našel konečně místo, kde mne to bavilo.

Práce u ICI aneb Doba sklizně Industrial Process Control

To nové místo bylo u firmy ICI Australia, která se zabývala výrobou různých chemikálií. Byla to pobočka (subsidiary) anglické firmy ICI, která byla roztažena po celém světě, tedy velký multinacionální kolos. No a tam jsem pak vydržel přes 20 let a dělal industrial process control. Co to vlastně bylo? Na to se mě ptalo už mnoho lidí. Abych to vysvětlil, budu muset trochu odbočit. Industriálních procesů je mnoho druhů, ale pro mne to znamenalo především chemické procesy, rafinerie, laboratoře a podobně. Tedy procesy, které by se daly popsat ve stylu Shakespearovském (čarodějnice ve hře Macbeth) asi takto:

*Tu se něco zahřívalo, tam se něco chladilo,
kvedlalo a pumpovalo, by se dílo zdařilo.
Napouštělo, vypouštělo, někdy i přepouštělo,
a to všechno přesně nachlup, nic se neodpouštělo.*

Jasně? Doufám, že ano. Ale jak se takový proces řídí? Odpověď zní: s velkými obtížemi.

A to je právě zajímavé. Byla to tak trochu alchymie řízená počítači. A jak víte, občas si takového alchymistu, jako byl třeba doktor Faust, sebere čert. Aby se něco takového nestalo, bylo nutno do systému zabudovat všelijaké ochrany proti čertu, který, jak víme, nikdy nespí. Ty materiály, se kterými se pracovalo, byly totiž někdy přímo pekelné, to jest:

*Smradlavé a hořlavé,
někdy taky lepkavé.
Jedovaté, výbušné,
Lucifera poslušné.*

Takže třeba i malá chybička v programu by mohla znamenat katastrofu. Celý vtip designu byl ale v tom, aby i přes možnost chyb v programech nebo v hardware či instrumentaci proces samotný zůstal bezpečný. Kolem tohoto aspektu se vyvinula celá řada design metod a víceméně i kultura. Proč se o tom vlastně šířím – právě v takovém prostředí mně přišla vhod moje dávná a trochu zapomenutá láska, abych tak řekl, a to byla Kudláčková Kybernetika.

Nebyla to ovšem kybernetika jako taková, ale spíše způsob myšlení, kdy se člověk učí design od přírody. Přirozené organismy mají úžasnou schopnost se přizpůsobit a přežít různé katastrofy a hlavně jim zabránit. Tento aspekt zkoumal už jeden ze zakladatelů kybernetiky Ashby a dokonce sestrojil model pro demonstraci: říkal tomu homeostat. Tento homeostat jsem měl často na mysli a řídil podle toho svůj design.

Ale jak to, že jsem se vůbec na takové místo dostal, nehlídala si ho zase nějaká ta Baba Jaga?

Hlídala i nehlídala, ono jim nic jiného nezbyvalo. Totiž v době, kdy jsem přišel na ICI (1977), řízení procesů počítačem se začínalo v Austrálii teprve rozvíjet, takže nebylo mnoho lidí, kteří by o tom něco věděli. A vzhledem k tomu, že jsem měl na tomto poli už zkušenost z Alcoa, tak po mně doslova hrábli.

Práce u ICI se mně líbila a také dařila a úspěchy, na které jsem pořád čekal, se konečně dostavily. Dokončil jsem celou řadu projektů, později také něco publikoval a jezdil přednášet na různé konference jak tady v Austrálii, tak i v Americe a Asii.

V rámci projektu jsem také projezdil kousek světa, například dva roky jsem pracoval v Německu s celou rodinou. Moc práce jsme tam sice nenalouskali, ale zato jsme si užili lyžování v Alpách a projeli si autem kus Evropy od Madridu po Istanbul. Co bylo pro mne také zajímavé – zjistil jsem, že Němci nejsou zase takoví velcí „machři“, za které jsme je my „malí čeští lidé“ pokládali. Spoustu věcí jsem je sám musel učit.

Hodně z toho, co jsem dělal, se týkalo takzvané batch control, což je odvětví zvláště obtížné a stále se vyvíjející. Je to řízení procesu, kde se dělá na dávky, čili jako v pivovaru na várky.

Vzhledem k mým zkušenostem v batch control jsem byl pozván stát se členem amerického komitétu, který se zabýval standardizací batch control softwaru, ISA panel SP88. A také, abych jako spoluautor napsal něco do knihy o Batch Control, kterou ISA dávala zrovna dohromady.

Poznámky: ISA je zkratka pro Instrument Society of America. Ta kniha se jmenuje Batch Control – Practical Guide for Measurement and Control, editor je A. E. Nisenfeld, vydána v roce 1996 ISA, IBSN 1-55617-563-9. Je to taková, řekl bych, „Bible of Batch Control“.

A co na to všechno Baba Jaga? Ta pukala vzteky, ale na mne už si netroufala. To víte, když se řekne Amerika, tak místní Baba Jaga zaleze do brlohu, nebo si vybere nějakou jinou oběť. A tak jsem měl klid a pokoj navěky. Ale ne tak docela, neboť, jak praví jedna naše lidová píseň „nic netrvá ve světě věčně, ani láska k jedné slečně“, proto i tato idylka skončila.

Jak jsem dostal vyhazov aneb Je libo Martini, pane Direktore

V letech devadesátých zavál nový vítr. Po pádu Sovětů neměli se už páni kapitalisté čeho bát a ukázali se ve své pravé podobě. Do té doby se totiž říkalo slovo *zisk* takovým trochu nesmělým způsobem, skoro jako sex. Ale teď se to slovo stalo oslavovaným. Honba za dolarem a zisky akcionářů byly to hlavní. V rámci tohoto nového způsobu myšlení se začaly dít věci nebývalé a hlavně se vyhazovalo a to ve velkém. A tak jsem v roce 1997 své krásné místo pozbyl. Bylo mi 57 let, a kdo zaměstná starého dědka? Nezbyvalo, než se udělat pro sebe.

I založil jsem si svou firmu, lépe řečeno firmičku s ručením omezeným. Dal jsem jí honosné a respekt vzbuzující jméno *Smart Control* a legrace začala nanovo. Lidi, já se stal najednou direktorem (ředitelem) firmy, sice pouze dvoudolarové, protože víc akcií jsme nevydali, která měla dva zaměstnance, což byla Alenka a já.

Legrace ovšem byla v tom, že jakožto pan direktor jsem dostával pozvání na různé večírky, dýchánky a koktail parties, kde se stýkali finanční magnáti, kapitáni průmyslu, významní politikové a hochštapleři na vyšší úrovni. A tak jsme se tedy vyšvihli do té oslavované a obdivované „high society“, a to za pouhé dva dolary. Podivné ale bylo, že se nám to naše dobrá známá Baba Jaga ani nesnažila nějak zhatit. Snad to bylo tím, že už z nás byla unavená, chudinka stará. Toto moje podnikání trvalo až do roku 2007, kdy jsem přestal pracovat a skončil aktivní business.

Naše přidružená výroba aneb

Alenka to rozjela Jak se drží pero Utekly nám krávy

Co se týče našeho života v Austrálii, myslím, že bych měl pro úplnost dodat něco o tom, co jsme podnikali mimo okruh počítačů, kybernetiky a podobných věcí.

V tomto směru vládla Alenka, která se velmi rychle adaptovala v novém prostředí a převzala iniciativu, takže velice brzy jsme si prohodili role a já se stal ta „Plus Jedna“ místo ní. Zlí jazykové ovšem tvrdili, že jsem se stal „Plus Nula“, což ovšem já popírám čistě v zájmu boje mužů za rovnoprávnost.

Z Alenky, která do té doby nebyla nijak technicky zaměřena, se stala velice úspěšná kreslička. Musel jsem ji ovšem napřed naučit, jak se drží péro, tedy rýsovací, ale rychle to pochopila a pak už jela sama. Dokonce si otevřela svůj vlastní business. Takže nám vznikla taková, jak se tomu říkalo na českém socialistickém venkově, přidružená výroba. Později ale celá její profese zmizela, protože to všechno převzaly počítače, se kterými Alenka nechtěla mít nic společného (v tom ukázala zdravý instinkt), takže business skončil.

Ale to nic, mezitím jsme totiž rozjeli menší farmičku, jako užitečné hobby. Kvůli tomu jsme ale museli prodat barák a postavit si nový na té farmě, což ovšem nebylo bez dramatu. To dole je fotka našeho „Dumku na Zarubku“ na té farmě.



Usadili jsme se v novém prostředí a tím pádem se z nás stali, jak se kdysi v Česku říkalo kovozezemědělci, a my se vrhli s vervou do sedlačení. Měli jsme napřed jenom slepice, pak se přidaly husy a kačeny, jeden čas dokonce i krávy a prase. Do toho všeho si naše drahé dítě Andrea vydupalo koně, tak se tady pletl ještě kůň a někdy i více koní.

No byl to cirkus, který nám někdy až přerůstal přes hlavu. Dostávali jsme se do situací těžko představitelných. Tak třeba, ráno se obléknu do svého nejlepšího obleku a sedám do auta, abych jel do práce, a vidím, krávy pryč. Potvory protrhly plot a pásly se u sousedů. Tak já v tom obleku musel honit krávy domů a spravit plot. Jindy zase kůň přeskočil plot a šel k sousedovi na jejich jablka, prostě zábava v jednom kuse. Teď na stará kolena už máme jen ty slepice a jednoho starého koně „na penzi“. A občas k nám zavítá i rodinka klokanů.

Kruh se uzavírá

aneb

Myšáci u Kudláčků

V roce 1995 jsme jeli s manželkou Alenou konečně do Česka, kde jsem se znovu setkal s Honzou Brejlem a jeli jsme společně navštívit Kudláčkovy v Ivančicích. A tak jsme byli po tolika letech zase „Myšáci“, jako kdysi zamlada na Katedře matematiky. Alenka se těšila, že konečně uvidí toho legendárního Kudláčka, o kterém jsem jí toho tolik napovídal, a nebyla zklamaná. Byli jsme velmi srdečně přijati Václavem i Marjánkou a všichni jsme se skvěle bavili. Bylo to skoro jako

návrat do rodiny. Povídalo se a vzpomínalo, popíjelo se výborné kounické vínečko a pojídaly se dobroty, které nám Marjánka připravila. Konečně jsem mohl Václavovi říct, jak mě ta jeho přednáška kdysi dávno na VUT zachytila a dala mně vlastně směr do života.

Pak jsme tam byli ještě jednou a zase to bylo fajn. Dokonce jsme viděli Václavovu „dajli-medaili“ z VUT a měli z toho upřímnou radost. Potřetí už nám to ale nevyšlo. Václav totiž odešel z tohoto světa asi v té době, kdy jsme seděli v letadle do Evropy. Ale navštívili jsme aspoň Marjánku, potěšili ji trochu a zazpívali si s ní při kytáře, jako kdysi dávno na katedře.

Po Kudláčkovi mi zůstalo jedno krásné úsloví, které jsme vlastně doma s Alenkou adoptovali za svoje, protože ho považujeme za jednu z největších moudrostí života:

Takovej vůl se ještě nenarodil, abych se od něho nemohl něco naučit.

Na závěr

Přemýšlím, jaký velkolepý závěr bych měl udělat, ale nic kloudného mne nenapadá. Ono by se dalo udělat závěrů několik, jeden horší než druhý. A tak si z toho vyberu aspoň ten, který pro mě má sentimentální kouzlo mládí prožitého v Brně. Je to píseň, kterou někteří čtenáři asi znají a která patří do zemitého brněnského folkloru. Není to sice nic uměleckého, ale jde od srdce, pardon, od hercny:

*Ta brněnská šalina,
to je senzace.*

*Porazila švígrfotra
na Velkém Place.*

*A že měla náladu,
tak ho vzala zezadu.*

To je senzace.

A včil konópci šmitec. A vy děcka, do betle a šlófec.

Psáno v Melbourne L.P. 2010.

Memorial Afternoon and Seminar Finite Element Method Today to the 100th Anniversary of Professor Miloš Zlámal

English part

Scientific Contributions

Contents

Introductory word	55
<i>Ladislav Janíček</i> : Rector's address	56
<i>Michal Krížek</i> : Professor Miloš Zlámal – his life and work	57
<i>Václav Kučera</i> : Geometrical conditions in the finite element method	69
<i>Tomáš Vejchodský</i> : Adaptive mesh refinement and <i>a posteriori</i> error estimates ..	78
<i>Vít Dolejší</i> : Finite element <i>hp</i> -methods for PDEs	89
<i>Tomáš Kozubek</i> : From HPC to Quantum at IT4Innovations	100
<i>Zdeněk Dostál</i> : From direct solvers to hybrid TFETI domain decomposition for solving huge 3D elastic problems	107
<i>Jakub Šístek</i> : Parallel implementation of immersed boundary adaptive FEM or how to avoid mesh generation in a mesh-based method	112
<i>Marek Brandner, Jiří Egermaier, Hana Kopincová</i> : Numerical techniques for conservation laws: continuous and discontinuous approximations	118
Complete list of Zlámal's publications	126

One hundred years ago, on December 28, 1924, Miloš Zlámál, professor at Brno University of Technology (BUT), founder of the Finite Element Method (FEM) mathematical theory was born. Twenty years ago, on January 12, 2005, a Commemorative Afternoon on the occasion of his eightieth birthday was held in the BUT Centre in Brno.

The event was opened by the Rector of BUT, prof. Jan Vrbka. Then, lectures were presented by Alexander Ženíšek (BUT), Michal Křížek (Czech Academy of Sciences (CAS), Prague), Jiří Kratochvíl (BUT), Libor Holuša (Masaryk University, Brno) and Ivo Marek (Czech Technical University, Prague) were presented.

The lectures in the ceremonial environment of the Baroque auditorium were interspersed with organ partitions presented by prof. Jiří Jan (BUT). In the foyer, it was possible to see an exhibition of documents and photographs of prof. Zlámál, including his article in which he founded FEM mathematical theory. The commemorative afternoon ended with a toast and refreshments in the hall of the BUT Centre. The contributions (in Czech) and materials from the exhibition can be found in the brochure *Miloš Zlámál founder of mathematical theory of finite element methods* published by VUTIUM in 2006. The extended booklet is available on <https://hdl.handle.net/11012/255643>.

Ten years ago, we commemorated Professor Zlámál's ninetieth birthday on January 14, 2015. The afternoon of remembrance was opened by the Rector of BUT, prof. Petr Štěpánek. Then, lectures by Michal Křížek (CAS, Prague), Miloslav Feistauer (Charles University, Prague), Jozef Kačur (Comenius University, Bratislava), Alexander Ženíšek, DrSc. (BUT, Brno), Libor Holuša, CSc. (BUT, Brno), Prof. Ivo Marek (Charles University and CTU, Prague) followed.

This tradition was continued by the Memorial Afternoon on January 15, 2025. Since the previous lecturers (except for M. Feistauer, J. Kačur and M. Křížek) are, unfortunately, no longer with us, the afternoon was focused on the finite element method today. The problems of the contemporary theory of FEM, its applications and computational systems were described by experts from Prague, Ostrava, Pilsen, Bratislava and Brno.

The seminar was closed with a joint celebratory toast by BUT 2023 Academic wine in the adjacent foyer, where it was possible to see on seven panels documents and photographs from the life of Zlámál, the beginnings of computers in Brno, the memories of BUT graduate Antonín Aujeský (1940-2024), who lived in Australia, and from the previous memorial afternoons.

The following part contains the professional lectures from the afternoon prepared by the authors. Unfortunately, prof. Mikula was unable to deliver his contribution due to family health reasons. The Library of the CAS Institute of Mathematics has supplied the complete list of Zlámál's publications.

Editor

Rector's address

LADISLAV JANÍČEK

Ladies and Gentlemen,

It is a great honor to be with you today as we commemorate the 100th anniversary of the birth of Professor Miloš Zlámál. Seeing so many distinguished colleagues from our university, from across the Czech Republic, Slovakia and abroad is a clear sign that the name of Professor Zlámál and his legacy remain alive and respected.

Professor Zlámál was the mathematician who laid the mathematical foundations of the Finite Element Method — a method that has become indispensable across engineering: in structural analysis, fluid mechanics, heat transfer, but also in electromagnetism, and even in biomechanics. His work has shaped not only mathematics, but also the way we design and understand modern technology.

As a graduate in aircraft design at Brno University of Technology, I first encountered this method in practice at LET Kunovice (today Aircraft Industries). There, under Professor Antonín Píštěk and Rudolf Böhm — two principal authors of the unique FEM system for structural calculations of aircraft, SOFEM, developed in Kunovice specifically for aerospace applications — I was drawn into the depth and beauty of this method.

When I later returned to my alma mater to teach structural mechanics and aircraft design, the Finite Element Method became for me an indispensable tool. Only then did I fully realize that our university significantly contributed to this method based on the theoretical work of Professor Zlámál, who managed to transform an originally intuitive method into one of the most important computational methods in engineering, and who, together with his colleagues Professors Jiří Kratochvíl and Alexander Ženíšek, brought it into practical application.

The fact that mathematical foundations of the Finite Element Method were laid at Brno University of Technology is truly unique. With deep respect and pride, I pay tribute to Professor Zlámál and his collaborators. Their names must continue to be remembered and celebrated — not only as part of our history, but as a lasting inspiration for future generations of academics and researchers.

Professor Miloš Zlámal – his life and work

MICHAL KŘÍŽEK

Abstract: A brief biography of Professor Miloš Zlámal is presented. Then we focus on the mathematical problems he dealt with. In the first period there were various properties of analytical solutions of ordinary and partial differential equations. His main results are in the theory of the finite element method as the minimum angle condition guaranteeing convergence, curved finite elements, superconvergence, the so-called mortar finite elements and semiconductor equations.

Keywords: minimum angle condition, curved elements, mortar elements, superconvergence, nonlinear equations.

AMS classification: 65N30, 01A60.

1 Brief biography of Professor Miloš Zlámal

Miloš Zlámal was born on 30 December 1924 in Zborovice, Kroměříž region. From 1936 to 1945 he studied at the 3rd real gymnasium in Brno. However, he had to interrupt his studies because he was totally deployed in Wrocław in 1944–1945. On 6 February 1946 he was enrolled at the Faculty of Science of Masaryk University and on 10 February 1949 he graduated there and received the academic degree RNDr., rerum naturalium doctor. In the period 1950–1951 he was a postgraduate at the Mathematical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences in Prague.

In 1951–1952 he completed his obligatory military service, during which he married Ludmila Vichrová on 19 January 1952. In 1955 he received the scientific degree of Candidate of Sciences (CSc.) by defending his thesis at the Institute of Mathematics of the Czechoslovak Academy of Sciences: *Study of oscillatory and asymptotic properties of solutions of differential equations*. His adviser was Prof. Otakar Borůvka.

Miloš Zlámal was appointed Associate Professor on 1 June 1956 at the Faculty of Science in Brno. In 1956 he became a founding member of the Editorial Board of the newly established journal *Aplikace matematiky* (later renamed *Applications of Mathematics*), which is still published by the Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences. He worked in this board until 1992.

On 1st September 1961 he transferred to the Faculty of Mechanical Engineering of the VUT (Brno University of Technology) and on 17 March 1963 he received the scientific degree of Doctor of Science (DrSc.) which was awarded to him by the Czechoslovak Academy of Sciences.

In 1967, Jiří Kratochvíl introduced him to a relatively new engineering method of finite elements, which was perfectly suited for solving problems of continuum mechanics. This method allowed one to numerically calculate e. g. mechanical stresses and displacements of frame structures, see [7, p. 12–18]. Zlámal liked this method so much that in 1968 he published the first article on the mathematical theory of the finite element method, see [25]. Here, he proved its convergence under the condition that all angles in the triangulation of the investigated region are bounded from below by one fixed positive constant. This paper is still widely cited today and has greatly influenced the development of numerical methods in this and the last century.

Another key work of Miloš Zlámal [28] was related to the approximation of the curvilinear boundary of the investigated domain by the so-called curved elements. According to the American MathSciNet database, it is one of Zlámal's most cited papers. In it, an ideal finite element is introduced which allows a perfect partition of the whole region into elements.

Prof. Zlámál was also one of the first numerical mathematicians to develop the so-called transition finite elements. They are used where one part of the region under investigation is covered by a different type of finite elements than another part. These are, for example, transitive finite elements that allow us the continuous connection of linear elements to cubic elements, see [27].

Prof. Zlámál achieved great successes in the field of superconvergence of the finite element method, see the series of his articles [13, 29, 30]. He also dealt with the finite element method for the numerical solution of the heat conduction equation, for the calculation of the magnetic field, for the approximate solution of semiconductor equations, etc., see [14, 31, 32, 33, 34, 35].

In the period 1963–1990 M. Zlámál was the director of the Laboratory of Computing Machines at the VUT. On 28 May 1965 he was appointed Professor of Mathematics and on 16 March 1981 he was elected Corresponding Member of the Czechoslovak Academy of Sciences. For ten years 1983–1992 he held the position of chairman of the Scientific College of Mathematics of the Czechoslovak Academy of Sciences. In 1990 he moved to the Department of Mathematics of the Faculty of Engineering of the VUT and was retired in 1995. Professor Zlámál passed away in Brno on 22 June 1997.

Let us still recall some of his important awards. In 1969 he was awarded the Bronze Commemorative Medal of the VUT and in 1974 the President of the Czechoslovak Socialist Republic awarded him the *State Prize for the development of the mathematical theory of the finite element method and its applications*. In 1979 the Presidium of the Czechoslovak Academy of Sciences awarded him the *Bernard Bolzano Silver Plaque for merit for the development of mathematical sciences* and in 1984 he was awarded the Bernard Bolzano Gold Plaque. Among his greatest scientific honors is undoubtedly the award of an honorary doctorate from the Technische Universität in Dresden in 1984. In the same year he was awarded the Gold Commemorative Medal of the VUT. In 1987 he was elected an honorary member of the Union of Czechoslovak Mathematicians and Physicists. In 1992, he received the *Memorial Medal of Charles University for his significant contribution to the development and application of the finite element method*. His other awards are listed in the book [7, p. 116].

Prof. Miloš Zlámál is clearly one of the world's top numerical mathematicians. He was one of the founders of the famous Brno school of the finite element method, see e.g. [4, 8, 9, 14, 15, 16]. Besides Zlámál, its core was formed by Libor Čermák, Jan Franců, Libor Holuša, Jiří Kratochvíl, Vladimír Kolář, Stanislav Koukal, František Leitner, František Melkes, Josef Nedoma, Alexander Ženíšek and others. Zlámál's extensive work contributed significantly to the effective numerical solution of problems in mathematical physics.

2 Early mathematical results of Miloš Zlámál

Miloš Zlámál during his doctoral studies focused on properties of analytical solutions of ordinary differential equations. In 1950, he published his first scientific paper [17] on this topic. Here, he investigates a self-adjoint differential equation

$$(r(x)y')' + p(x) = 0$$

with $r(x) > 0$, r and p are smooth such that

$$\int_0^\infty \frac{dx}{r(x)} = \infty.$$

He proves that if there exists a positive function $g \in C^1$ such that

$$\int_0^\infty r(x) \frac{g'^2(x)}{g(x)} dx < \infty \quad \text{and} \quad \int_0^\infty g(x)p(x)dx = \infty,$$

then there exist oscillatory solutions near $x = \infty$. Note that the choice $g \equiv 1$ leads to the well-known Leighton's theorem which first appeared in [12].

In another paper [18], Zlámál examines forced oscillations of analytical solutions of a non-linear ordinary differential equation of the second order

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = p(x),$$

where p is periodic and f, g are given functions. In [19], he considers the following differential equation of the n th order

$$y^{(n)} + \lambda A(x)y = 0,$$

where $n \geq 2$ is a fixed integer, $y(b)$ and $y^{(\alpha)}(a) = 0$ for $\alpha = 0, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n-1$ are given boundary conditions, and $A(x) > 0$ is continuous on $[a, b]$. For this case he proves the existence of infinitely many positive proper values $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$.

In the 1960s, Zlámál also began to study partial differential equations. For instance, in [21] he investigates the following singularly perturbed problem. Let $u(x, y, \varepsilon)$ be the solution of the Dirichlet problem for the second order partial differential equation

$$L_\varepsilon \equiv u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + A(x, y)u_x - B(y)u_y + C(x, y)u = F(x, y),$$

where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, and A, B, C and F are given functions. If $U(x, y)$ is the solution of the corresponding non-perturbed problem

$$L_0 \equiv U_{xx} + A(x, y)U_x - B(y)U_y + C(x, y)U = F(x, y),$$

then under certain appropriate conditions Zlámál proves that

$$u(x, y, \varepsilon) = U(x, y) + h(x, y, \varepsilon)e^{-\alpha(y)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{1/2})$$

for $\varepsilon \rightarrow 0$, where $h(x, y, \varepsilon) = O(1)$ and $\alpha(y) = \int_y^{y_0} B(s)ds$ for some suitable y_0 . He worked also on parabolic equations as a limiting case of hyperbolic and elliptic equations, see [20, 22].

In the middle of the 1960s, Zlámál started to concentrate on numerical methods. He investigates the error function

$$E(f) = \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^m w_k f(x_k)$$

which vanishes when f is a polynomial of degree n . Here, $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 1$ and $w_k \in \mathbb{R}$ are appropriate weights. In the paper [23], Zlámál derives a formula for estimating $E^r = \sup\{E(f) \mid f \in H^r, \|f\|_0 \leq 1\}$, where H^r stands for the standard Sobolev space and $\|\cdot\|_0$ is the Lebesgue L^2 -norm.

In another paper [24], Zlámál examines a finite difference approximation of the Dirichlet problem for variable coefficient elliptic operator of the 4th order

$$Lu \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Using a clever interpolation of the boundary values, difference equations with 2nd order accuracy for smooth solutions are derived and their approximation properties are studied.

3 Finite element solution of partial differential equations

Richard Courant (1888–1972) is generally considered to be the founder of the finite element method. On June 16, 1942, he submitted a paper [6] (see also [11]) to the Bulletin of the American Mathematical Society, which was a crucial contribution to the development of the finite element method. On page 21, he considers a triangulation of a two-dimensional multiply connected rectangular domain with four holes. He looks for an approximate solution of a certain variational problem in the form of a continuous piecewise linear function over this triangulation.

Zlámal achieved the greatest success in the investigation of the finite element method for solving partial differential equations of various types. This active area of research has become an essential part physics and engineering [9], for example in the study of problems involving heat conduction, electrical superconductivity, fluid flows, elasticity, plasticity, semiconductors, Maxwell's equations, magnetic and gravitational fields. These problems require the simulation of various phenomena and physical fields over complicated structures in two, three, and higher dimensions.

At present the finite element method seems to be the most efficient numerical method for solving problems of mathematical physics and engineering that are described by partial differential equations, algebro-differential equations, integro-differential equations, systems of these equations, and variational inequalities. The main advantage of the finite element method is that it enables one to simulate the above mentioned problems on a computer. It thus replaces the creation of expensive technical models (prototypes) or performing complicated measurements. The whole computational process based on the finite element method can be essentially automated, including the following steps:

1. preprocessing of input data,
2. generation of finite element triangulations (partitions),
3. assembling finite element matrices,
4. solving the corresponding discrete problems,
5. post-processing of output data,
6. a posteriori error estimation in some norm $\|u - u_h\|$,
7. graphical illustration of results.

The classical solution of elliptic boundary value problems may not exist if the domain in question has concave corners or if some coefficients have jumps or if mixed boundary conditions are prescribed, where one type of boundary condition changes into another type, etc. Thus, the following concept of a weak solution is usually employed.

Let V be a Hilbert space over real numbers $\mathbb{R}$. A mapping $a(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ is called a *bilinear form*, if for any fixed $v \in V$ the mappings $a(v, \cdot): V \rightarrow \mathbb{R}$ and $a(\cdot, v): V \rightarrow \mathbb{R}$ are linear. The following lemma plays a key role in the finite element method, see e.g. [3, 5].

Lax-Milgram lemma. *Let V be a Hilbert space equipped with the norm $\|\cdot\|_V$ and let $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous linear form. Let $a(\cdot, \cdot)$ be a continuous bilinear form, i.e., there exists a constant $C_1 > 0$ such that*

$$|a(v, w)| \leq C_1 \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V.$$

Further, assume that there exists a constant $C_2 > 0$ such that

$$a(v, v) \geq C_2 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Then the problem: Find $u \in V$ such that

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \quad (1)$$

has exactly one solution.

To explain the basic idea of the finite element method we present the following example.

Example. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3, \dots\}$, be a bounded polytopic domain with Lipschitz boundary $\partial\Omega$. Consider the Poisson equation with homogeneous Dirichlet boundary conditions

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (2)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (3)$$

where $f \in L^2(\Omega)$. We look for a weak solution u in the Sobolev space

$$V = H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \text{grad } v \in (L^2(\Omega))^2, v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$$

with the Sobolev norm $\|\cdot\|_1$, see [5]. Multiplying (2) by an arbitrary function $v \in V$, integrating by parts, and using the boundary conditions (3), one can transform the above problem into problem (1) with corresponding bilinear and linear forms

$$a(v, w) = \int_{\Omega} \text{grad } v \cdot \text{grad } w \, dx, \quad F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Note that any classical solution in $C^2(\overline{\Omega})$ of problem (2)–(3) is the weak solution of (1) and that the assumptions of the Lax-Milgram lemma are satisfied.

Let $V_h \subset V$ be a non-empty finite dimensional subspace and let us look for $u_h \in V_h$ so that

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

By the Lax-Milgram lemma there exists one solution $u_h \in V_h$. It is called the *Galerkin solution* and can be considered as a discrete approximation of u . Here V_h usually consists of continuous piecewise polynomial functions over some partition of $\overline{\Omega}$ into simplices, e.g.,

$$V_h = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v|_K \in P_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

where $P_k(K)$ is the space of polynomials of the k th order over K , $\mathcal{T}_h$ is a triangulation, and V_h is called a *finite element space*, see Fig. 1 for $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, the discretization parameter $h = 0.1$, and $k = 1$. It can be proved that V_h contains only continuous functions, see [5, p. 44], [10, p. 27].

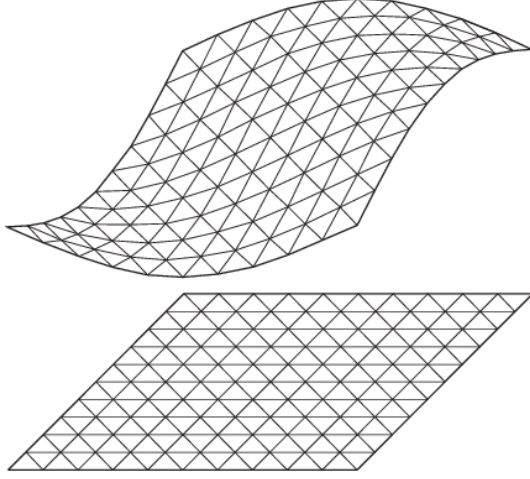


Fig. 1 A continuous piecewise linear finite element function over a triangulation

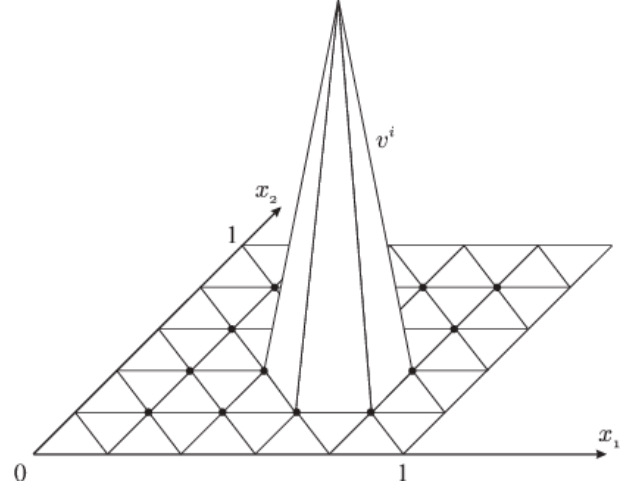


Fig. 2 A typical shape of a piecewise linear finite element basis function with $h = 0.2$.

The *finite element* is a triple (K, P_K, Σ_K) , where $K \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, \dots\}$, is a nonempty convex polygon called an *element*, P_K is a space of polynomials over K , and Σ_K is a finite set of degrees of freedom that enable us to define uniquely a polynomial $p \in P_K$ for prescribed values of all functionals from Σ_K (see e.g. [5] for details). Finite elements are used to construct finite element spaces V_h , see [3, 9, 7].

Looking for $u_h \in V_h$ as a linear combination of basis functions $v^1, \dots, v^N$ of the space V_h ($N = \dim V_h$),

$$u_h = \sum_{j=1}^N c_j v^j,$$

we obtain the following system of linear algebraic equations for the unknowns $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=1}^N a(v^j, v^i) c_j = F(v^i), \quad i = 1, \dots, N,$$

whose (stiffness) matrix

$$A = (a(v^i, v^j))_{i,j=1}^N$$

is positive definite.

The discrete solution u_h is, of course, independent of the choice of basis functions. The main idea of the finite element method is that we may choose the basis functions v^i having small supports, see Figure 2. Then the matrix A is sparse, which means that only $O(N)$ entries are nonzero, in general. This enables us to solve the above system efficiently and to store A with much less computer memory than in the case of a full matrix with N^2 nonzero entries, in general.

By a *partition* (or *triangulation*) of a closed polytopic domain $\bar{\Omega}$ we mean a set of elements whose union is $\bar{\Omega}$, any two elements have disjoint interiors, and each facet of an element is a facet of another element from the partition, or belongs to the boundary $\partial\bar{\Omega}$, see Fig. 3 and 4.

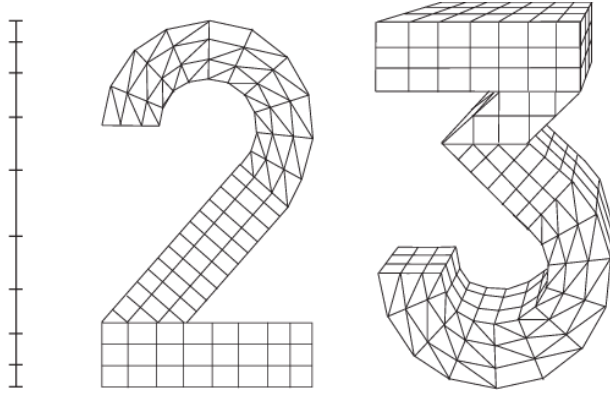


Fig. 3 Partitions of given domains into elements in case of dimension $d = 1, 2, 3$



Fig. 4 Triangulation of a wrench

A *simplex* K is the convex hull of points $A_0, A_1, \dots, A_d \in \mathbb{R}^d$ not lying in one hyperplane. We can easily find that

$$\text{grad } v^i \cdot \text{grad } v^j = -\frac{\cos \alpha_{ij}}{h_i h_j}, \quad i, j = 0, \dots, d, \quad i \neq j,$$

where α_{ij} is the dihedral angle between facets F_i and F_j of the simplex K , $v^i(A_j) = \delta_{ij}$ is Kronecker's symbol, and h_i is the height in K above F_i .

In Figure 5, we see that the above scalar product can be positive when $\alpha_{ij} > 90^\circ$ and $i \neq j$. In this case, the finite element method may yield numerical results that violate basic physical principles, see [3] and the following definitions.

A square matrix A is an *M-matrix* if all its off-diagonal entries are nonpositive and if it is nonsingular and $A^{-1} \geq 0$. In particular, A is a *Stieltjes matrix* if all its off-diagonal entries are nonpositive and if it is symmetric and positive definite.

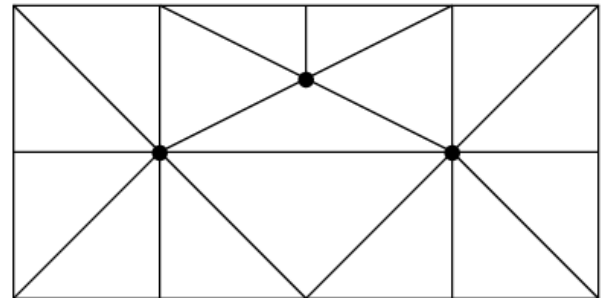


Fig. 5 A triangulation with one obtuse angle

4 The most important Zlámal's results on finite elements

In 1968, Zlámal developed the first mathematical theory of the convergence of the finite element method. It was published in his pioneering paper [25] in the prestigious journal *Numerische Mathematik*. Zlámal introduced the so-called *minimum angle condition* (see (4) below) that ensures the convergence of the finite element approximations in natural Sobolev norms when solving linear elliptic boundary value problems of the second and fourth order on planar triangulations. This condition requires the existence of a constant $\alpha_0 > 0$ such that the minimal angle α_T of each triangle T in all triangulations involved satisfies the lower bound

$$\alpha_T \geq \alpha_0. \tag{4}$$

To be more precise, Zlámal used the condition

$$\sin \alpha_T \geq \sin \alpha_0$$

which is equivalent to (4), since the minimum angle in each triangle is always nongreater than 60° and $\sin$ is an increasing function over the interval $[0^\circ, 60^\circ]$. The same condition (4) was also introduced simultaneously by Alexander Ženíšek [15] for the finite element method applied to a system of linear elasticity equations of second order. For a generalization of Zlámal's minimum angle condition (4) to simplicial finite elements in $\mathbb{R}^d$ see [2].

Céa's lemma. *Let the assumptions of the Lax-Milgram lemma be satisfied. Then there exists a constant $C > 0$ such that for any subspace $V_h \subset V$, $V_h \neq 0$, we have*

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (5)$$

If $u \in H^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ is the weak solution of a second order elliptic problem, then the convergence of the corresponding finite element approximations u_h follows directly from Céa's lemma and the interpolation theorem [5], since we can take $v_h = \pi_h u$, where $\pi_h u$ is the V_h -interpolant of u over a given triangulation. This is a continuous piecewise polynomial function. Assume that the minimum angle condition (4) is satisfied. The infimum on the right-hand side of (5) can be then estimated by the interpolation error for $h \rightarrow 0$:

$$\|u - u_h\|_1 \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1 \leq C \|u - \pi_h u\|_1 \leq C' h |u|_2.$$

Hence, for smooth solution we have at least a linear rate of convergence of the finite element method. The same convergence rate holds (see [3, p. 27]) for the *maximum angle condition*, i.e., there exists a constant $\gamma_0 < \pi$ such that the maximal angle γ_T of each triangle T in all triangulations involved satisfies the upper bound

$$\gamma_T \leq \gamma_0.$$

In [15, p. 365] Alexander Ženíšek proves that if the maximum angle condition does not hold then the linear triangular finite elements may lose their optimal interpolation order, see also [3, p. 42].

Let us emphasize that the finite element method converges without any regularity assumptions on the true solution of the problem (2)–(3) when the maximum (i.e. also minimum) angle condition is satisfied. To show this, let $\varepsilon > 0$ be given. If $u \in H_0^1(\Omega)$, then there exists an infinitely differentiable function from the same space such that $\|u - w\|_1 \leq \varepsilon/2$. Then by Céa's lemma, the triangle inequality and interpolation theorem we have

$$\|u - u_h\|_1 \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1 \leq C \|u - \pi_h w\|_1 \leq C \|u - w\|_1 + C \|w - \pi_h w\|_1 \leq C\varepsilon/2 + C\varepsilon/2 = C\varepsilon$$

for $h \rightarrow 0$. Hence, we have the convergence also of the gradient in the L^2 -norm. Note that the classical finite difference method requires a higher regularity of the true solution to guarantee at least some pointwise convergence.

Zlámal was one of the first mathematicians who invented the so-called *mortar elements*, see [27]. They are employed when one part of the domain in question is covered by different finite elements than in another part. For example, suppose that Ω_1 and Ω_2 are nonempty polygonal subdomains of a bounded planar domain Ω and let $\overline{\Omega}_1$ and $\overline{\Omega}_2$ be separated by a tiny strip. Let

Ω_1 by covered by the standard linear Lagrange triangular elements with 3 degrees of freedom. Let Ω_2 be covered by the cubic Hermite triangular elements with 10 degrees of freedom. Zlámal invented two special mortar elements

$$T - 6 \quad \text{and} \quad T - 8$$

with incomplete cubic unsatz functions with 6 and 8 degrees of freedom. They are used to cover the tiny strip between Ω_1 and Ω_2 . These mortar elements thus enable us to define a continuous finite element fields over the whole domain $\bar{\Omega}$.

The solution of elliptic boundary value problems is usually transformed to the minimization of a convex coercive functional for solving the associated variational problem. This is their *variational formulation*. However, in practical implementation of the finite element method in order to solve elliptic boundary value problems numerically, the so-called *variational crimes* are usually committed, see e.g. [3]. They include the following situations:

- 1) A given domain with a piecewise curved boundary is approximated by polygonal (in $2d$) or polyhedral (in $3d$) domains.
- 2) Integrals are evaluated numerically with the use of quadrature formulae.
- 3) Boundary conditions are approximated (interpolated) by finite element functions.

To avoid approximation of a curved boundary by a polygonal one, Zlámal introduced an *ideal curved finite element* in [28]. This is one of his most cited papers, see also [1]. The space of the corresponding ansatz functions consists of nonpolynomial functions, in general. Therefore, Zlámal was also intensively working on appropriate numerical quadrature formulae to evaluate numerically integrals over particular elements, see e.g. [23, 30]. Note that special penalty methods were used to handle nonhomogeneous Dirichlet boundary conditions.

During the development of the finite element method it has also been found that the rate of convergence of finite element approximations at some exceptional points of a domain exceeds the optimal global rate if finite element partitions have some regular geometric structure. This phenomenon has come to be known as *superconvergence*. Zlámal in [29, 30] proved superconvergence of the gradient of finite element solutions of some elliptic boundary value problems, see also his paper with Pierre Lesaint [13]. For instance, there is superconvergence of the gradient of order $O(h^2)$ at centroids of bilinear rectangular elements under some regularity conditions. Also in [26], Zlámal presents a special box finite element method giving solution gradients with a high order accuracy.

In the 1980s, Zlámal started to investigate finite element solutions of various nonlinear problems. For example, in [31] he considers the nonlinear heat conduction problem

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (k(u) \nabla u) + q(u, x, t)$$

with some given boundary and initial conditions for $d \in \{2, 3\}$, where $c, k \in L^\infty(\Omega)$ are bounded from below by a positive constant and the function q is integrable. Defining new variables

$$H(u) = \int_0^u c(s) ds, \quad G(u) = \int_0^u k(s) ds,$$

the above problem can be transformed to a variational minimization problem with a quadratic functional.

A series of papers [14, 32, 33] (the first one is with František Melkes) concerns finite element approximations of magnetic fields. This is again a nonlinear problem which can be described for stationary case by elliptic equations

$$\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu(x, \|\nabla u(x)\|^2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f$$

with some boundary conditions. Here, the magnetic reluctance ν nonlinearly depends on the magnetic potential u .

In [34, 35], Zlámál investigates the nonlinear equations of semiconductor device theory consisting of a Poisson equation for the electric potential Ψ and two highly nonlinear continuity equations for the electron and hole densities n and p in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$,

$$\begin{aligned} -\Delta \Psi &= \frac{q}{\varepsilon} (p - n + N(x)), \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= \nabla_0 [D_n(x, \|\nabla \Psi\|) \nabla n - \mu_n(x, \|\nabla \Psi\|) n \nabla \Psi] - R_n(n, p), \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \nabla_0 [D_p(x, \|\nabla \Psi\|) \nabla p + \mu_p(x, \|\nabla \Psi\|) p \nabla \Psi] - R_p(n, p). \end{aligned}$$

Here, $D_s(x, \xi)$ and $s \in \{n, p\}$ are related to mobilities $\mu_s(n, \xi)$ by the Einstein relation $D_s(x, \xi) = U_T \mu_s(x, \xi)$, where U_T is the thermal voltage, N is a given function of $x \in \Omega$, and R_s is a recombination term. The mesh is assumed to have acute simplices, see [3].

5 Concluding remarks

Professor Miloš Zlámál usually worked alone on various mathematical problems, see the list of references. He wrote only a few papers with coauthors, e.g., [1, 4, 9, 13, 14, 16]. Under his condition (4) he derived the optimal convergence order when solving the 2nd and 4th order elliptic boundary value problems by the finite element method provided the true solution is smooth enough, see [25].

However, the main advantage of the finite element method satisfying Zlámál's minimum angle condition (4) is that it converges in suitable Sobolev norms without any regularity assumption of the true solution as shown in Section 5 and also in [5, p. 134].

Finally, we have to emphasize that (4) is only a sufficient condition for the convergence of the finite element method. It is not necessary. In [3, pp. 42–44], we present a family of triangulations which does not satisfy the minimum (and also maximum) angle condition and the finite element method preserves the optimal convergence order in the Sobolev H^1 -norm. To find a necessary and sufficient condition on families of triangulations for the convergence of the finite element method is still an open problem.

Acknowledgments. The author is indebted to Jan Brandts and Lawrence Somer for useful suggestions and to Hana Bílková for drawing figures. Supported by the Czech Academy of Sciences (RVO 67985840) and the Czech Science Foundation (Grant no. 24-10586S).

References

- [1] *I. Babuška, M. Zlámál*: Nonconforming elements in the finite element method with penalty, SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), 863–875.

- [2] *J. Brandts, S. Korotov, M. Křížek*: Generalization of the Zlámal condition for simplicial finite elements in $\mathbb{R}^d$, *Appl. Math.* **56** (2011), 417–424.
- [3] *J. Brandts, S. Korotov, M. Křížek*: *Simplicial partitions with applications to the finite element method*, Springer International Publishing, Cham, 2020.
- [4] *L. Čermák, M. Zlámal*: Finite element solution of a nonlinear diffusion problem with a moving boundary, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **20** (1971), 403–426.
- [5] *P. G. Ciarlet*: *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [6] *R. Courant*: Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bull. Amer. Math. Soc.* **49** (1943), 1–23.
- [7] *J. Franců (ed.)*: *Miloš Zlámal, zakladatel matematické teorie metody konečných prvků*, VUTIUM, Brno, 2006.
- [8] *V. Kolář, J. Kratochvíl, F. Leitner, A. Ženíšek*: *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků*, STNL, Praha, 1972.
- [9] *V. Kolář, J. Kratochvíl, M. Zlámal, A. Ženíšek*: *Technical, physical and mathematical principles of the finite element method*, Rozpravy ČSAV, Praha, 1971.
- [10] *M. Křížek, P. Neittaanmäki*: *Finite element approximation of variational problems and applications*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics vol. 50, Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [11] *M. Křížek, P. Neittaanmäki, R. Stenberg (eds.)*: *Finite element methods: Fifty years of the Courant element*, Proc. Conf., Univ. of Jyväskylä, 1993, LN in Pure and Appl. Math. vol. 164, Marcel Dekker, New York, 1994.
- [12] *W. Leighton*: Principal quadratic functionals and self-adjoint second-order differential equations, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **35** (1949), 192–193.
- [13] *P. Lesaint, M. Zlámal*: Superconvergence of the gradient of finite element solutions, *RAIRO Anal. Numér.* **13** (1979), 139–166.
- [14] *F. Melkes, M. Zlámal*: Numerical solution of nonlinear quasi-stationary magnetic fields, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **19** (1983), 1053–1062.
- [15] *A. Ženíšek*: The convergence of the finite element method for boundary value problems of a system of elliptic equations (Czech), *Apl. Mat.* **14** (1969), 355–377.
- [16] *A. Ženíšek, M. Zlámal*: Convergence of a finite element procedure for solving boundary value problems of the fourth order, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **2** (1970), 307–310.
- [17] *M. Zlámal*: Oscillation criteria, *Čas. Pěst. Mat. Fys.* **75** (1950), 213–218.
- [18] *M. Zlámal*: Nonlinear forced oscillation, *Čas. Pěst. Mat.* **77** (1952), 53–64.
- [19] *M. Zlámal*: On an eigenvalue problem for the differential equation $y^{(n)} + \lambda A(x)y = 0$ (German), *Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk* (1953), 91–99.

- [20] *M. Zlámal*: The mixed problem for hyperbolic equation with a small parameter (Russian), Czechoslovak Math. J. **10** (1960), 83–122.
- [21] *M. Zlámal*: The parabolic equation as limiting case of a certain elliptic equation, Ann. Mat. Pura Appl. **57** (1962), 143–150.
- [22] *M. Zlámal*: The parabolic equations as a limiting case of hyperbolic and elliptic equations, Differential equations and their applications, Czechoslovak Acad. Sci., Praha, 1963, 243–247.
- [23] *M. Zlámal*: On the estimate of the error of quadrature formulae, Apl. Mat. **11** (1966), 423–426.
- [24] *M. Zlámal*: Discretization and error estimates for elliptic boundary value problems of the fourth order, SIAM J. Numer. Anal. **4** (1967), 626–639.
- [25] *M. Zlámal*: On the finite element method, Numer. Math. **12** (1968), 394–409.
- [26] *M. Zlámal*: A box finite element method giving solution gradients with a high order accuracy, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **164** (1994), 501–504.
- [27] *M. Zlámal*: The finite element method in domains with curved boundaries, Int. J. Numer. Methods Eng. **5** (1973), 367–373.
- [28] *M. Zlámal*: Curved elements in the finite element method, SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), 229–240.
- [29] *M. Zlámal*: Some superconvergence results in the finite element method, Lecture Notes in Math. **606**, Springer, 1977, 353–362.
- [30] *M. Zlámal*: Superconvergence and reduced integration in the finite element method, Math. Comp. **32** (1978), 663–685.
- [31] *M. Zlámal*: A finite element solution of the nonlinear heat equation, RAIRO Anal. Numér. **14** (1980), 203–216.
- [32] *M. Zlámal*: Finite element solution of quasistationary nonlinear magnetic fields, RAIRO Anal. Numér. **16** (1982), 161–191.
- [33] *M. Zlámal*: A linear scheme for the numerical solution of nonlinear quasi-stationary magnetic fields, Math. Comp. **41** (1983), 425–440.
- [34] *M. Zlámal*: Finite element solution of the fundamental equations of semiconductor devices, Part I, Math. Comp. **49** (1986), 27–43.
- [35] *M. Zlámal*: Finite element solution of the fundamental equations of semiconductor devices, Part II, Appl. Math. **46** (2001), 251–294.

Michal Křížek is a professor of Mathematics at Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences, Žitná 25, 115 67 Prague 1, Czech Republic, e-mail: krizek@math.cas.cz.

Acknowledgement: The author was supported by the grant GAČR 24-10586S and the project RVO 67985840.

Geometrical conditions in the finite element method

VÁCLAV KUČERA

Abstract: We give a brief overview of some key moments in the history of geometrical conditions ensuring finite element convergence. Starting from the pioneering work of Zlámal and Ženíšek and their minimal angle condition, continuing with the maximal angle condition and the realization of its non-necessity for finite element convergence, we present the newest development in this area, when these geometric conditions can be circumvented in certain situations.

Keywords: Finite element method; maximum angle condition; mesh geometry.

AMS classification: 65N30, 65N15, 65N50.

1 Introduction

The finite element method (FEM) is one of the most important methods in numerical mathematics. Nowadays it is the standard method of choice when solving problems described by partial differential equations. In 2D the method works by constructing a mesh consisting of triangles which partitions the computational domain. On this mesh a continuous piecewise linear (in the basic version) approximation is chosen along with a standard weak formulation. Originally, the method was a purely engineering approximation. However through the pioneering works of Zlámal and Ženíšek, it has been reformulated in the context of pure mathematics, which allowed the method to be rigorously analyzed for the first time, deriving estimates for the error between the exact and approximate solutions. A key assumption of the theory is that the element of the mesh cannot be too ‘flat’ to ensure convergence. This is the so-called minimum angle condition or Zlámal’s condition, as named in [2]. Since these groundbreaking results, much progress has been made, however the basic question of what is a necessary and sufficient condition on the mesh geometry in order to ensure convergence of the FEM still remains open. In this brief contribution we will sum up the basic facts and indicate what the future might possibly bring us.

We note that we only deal with the simplest situation – linear finite elements in 2D. Even here there are many open questions. If we move to 3D, the situation is much harder, when even an equivalent condition on tetrahedra to ensure convergence of *interpolation* is unknown, let alone an optimal condition ensuring FEM convergence. The same holds for bilinear elements (i.e. quadrilateral elements), or higher order elements. Each of these generalizations bring a new layer of added difficulty. We therefore restrict ourselves to the basic situation. Even that is hard enough.

2 Finite element method

The finite element method is suitable for a wide range of differential equations, both partial and ordinary, evolutionary and stationary, linear and nonlinear. The surprising fact is that the basic questions of FEM convergence have not been resolved even for the most basic textbook problem – Poisson’s equation – for which essentially everything is known from the viewpoint

of theory of partial differential equations. We will therefore focus on this equation as a model problem – for more complex problems the situation can only be more complicated with more unanswered questions.

Consider Poisson's problem in $\mathbb{R}^2$. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a polygonal domain with Lipschitz boundary $\partial\Omega$, we solve the problem

$$-\Delta u = f \text{ on } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1)$$

with the weak form: Find $u \in H_0^1(\Omega)$ such that

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (2)$$

where $H_0^1(\Omega)$ is the standard Sobolev space of functions with square integrable derivatives and a zero trace on $\partial\Omega$, while $(f, v) = \int_{\Omega} f v \, dx$ is the L^2 scalar product.

In the finite element method, we consider a conforming triangulation $\mathcal{T}_h$ of Ω , i.e. a partition into triangles (elements) with mutually disjoint interiors such that the intersection of two neighboring elements is either a single vertex or a whole edge. Here h denotes the length of the longest edge in the triangulation. This partition defines the continuous piecewise linear finite element space

$$V_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}); v_h|_K \in P^1(K) \text{ for all } K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3)$$

where $P^1(K)$ is the space of linear functions on the triangular element $K \in \mathcal{T}_h$.

The finite element method is then defined as follows: Find $u_h \in V_h$ such that

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (4)$$

It is desirable to obtain estimates of the error $u - u_h$ in terms of the “fineness” of the mesh measured in terms of the mesh parameter h . To this end, Céa's lemma, cf. [2], gives us an estimate in the $H^1(\Omega)$ -seminorm:

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} = \inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{H^1(\Omega)}, \quad (5)$$

where $|u|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx}$. We note that for other problems, one can expect an inequality in (5) and a problem-dependent constant in the upper bound.

Standard finite element estimates are typically derived by taking the piecewise linear Lagrange interpolation $\Pi_h u$ as v_h in (5). This is defined element-wise: on each element $K \in \mathcal{T}_h$ the function $\Pi_h u|_K = \Pi_K u \in P^1(K)$ coincides with u at the vertices of K . Such a locally defined function naturally gives a globally continuous piecewise linear function in V_h .

For triangles, there is an *optimal* estimate for the interpolation error $u - \Pi_K u$ in the H^1 -seminorm which interests us. Consider an arbitrary triangle $K \subset \mathbb{R}^2$. Denote the length of its longest edge as h_K and its height perpendicular to this edge as $\bar{h}_K$. Finally, define R_K as the circumradius of K , i.e. the radius of the circumscribed circle to K . We have the following optimal estimate, cf. [4].

LEMMA 1 (CIRCUMRADIUS ESTIMATE) *Let $K \subset \mathbb{R}^2$ be an arbitrary triangle. Let $u \in H^2(K)$ and let $\Pi_K u$ be the linear Lagrange interpolation of u on K . Then there exists a constant C_c independent of u and K such that*

$$|u - \Pi_K u|_{H^1(K)} \leq C_c R_K |u|_{H^2(K)} \leq C_c \frac{h_K^2}{h_K} |u|_{H^2(K)}. \quad (6)$$

One is especially interested in optimal convergence results of the order $O(h)$ in the $H^1(\Omega)$ -seminorm, via (5). A sufficient (but not necessary!) condition for this to happen is when $R_K \leq \tilde{C}h$ for all $K \in \mathcal{T}_h$ with some constant $\tilde{C}$ independent of h . Geometrically, this is equivalent to keeping the ratio $h_K/\bar{h}_K$ uniformly bounded for all elements K , which in turn is equivalent to satisfying the *maximum angle condition*. This condition requires that all maximal angles α_K of all triangles $K \in \mathcal{T}_h$ are smaller than some $\alpha_0 < \pi$. Then we have the following element-wise estimate, which can then be applied in (5).

LEMMA 2 (MAXIMUM-ANGLE CONDITION) *Let $K \subset \mathbb{R}^2$ be a triangle satisfying the maximum angle condition: $\alpha_K \leq \alpha_0 < \pi$ for some fixed α_0 . Let $u \in H^2(K)$ and let $\Pi_K u$ be the linear Lagrange interpolation of u on K . Then there exists a constant C_I depending only on α_0 such that*

$$|u - \Pi_K u|_{H^1(K)} \leq C_I h_K |u|_{H^2(K)}. \quad (7)$$

By taking the piecewise linear element-wise Lagrange interpolation in Céa's lemma (5) one immediately obtains the following error estimate from Lemma (2).

THEOREM 1 (BASIC ERROR ESTIMATE) *Let $u \in H^2(\Omega)$ be the solution of (2) and $u_h \in V_h$ the finite element solution of (4). If $\alpha_K \leq \alpha_0 < \pi$ for all $K \in \mathcal{T}_h$, we have*

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq C_I h |u|_{H^2(\Omega)}, \quad (8)$$

where C_I is the constant from Lemma 2.

3 Historical intermezzo

The maximum angle condition has a long and complicated history. Actually, the first condition on triangular meshes for the FEM to converge, was derived independently by Zlámal and Ženíšek (taken here in alphabetical order) in the papers [10], [11]. In these papers the so-called *minimum angle condition* is considered, written here as an estimate for the interpolation error:

LEMMA 3 (MINIMUM-ANGLE CONDITION) *Let $K \subset \mathbb{R}^2$ be a triangle satisfying the minimum angle condition: $\gamma_K \geq \gamma_0 > 0$ for some fixed γ_0 , where γ_K is the smallest angle of K . Then there exists a constant C_I depending only on γ_0 such that*

$$|u - \Pi_K u|_{H^1(K)} \leq C_I h_K |u|_{H^2(K)}. \quad (9)$$

The three estimates and conditions mentioned so far – (6), (7), (9) – can be summed up as follows:

$$|u - \Pi_K u|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{C}(K) h_K |u|_{H^2(K)}, \quad (10)$$

where the factor $\mathcal{C}(K)$ can be taken as

$$\mathcal{C}(K) = \begin{cases} \frac{1}{\sin \gamma_K}, & \text{minimal angle estimate,} \\ \frac{1}{\sin \alpha_K}, & \text{maximal angle estimate,} \\ \frac{h_K}{R_K}, & \text{circumradius estimate,} \end{cases} \quad (11)$$

where γ_K, α_K, R_K are the minimal angle, maximal angle, and circumradius of the triangle K , respectively.

In order to bound the factor $\mathcal{C}(K)$ uniformly from above, thus obtaining $O(h)$ -error estimates in (10), one gets the corresponding minimal and maximal angle conditions, while bounding the last line of (11) is equivalent to maximal angle condition. **Simple geometry tells us that the minimal angle condition is the weakest (K cannot contain one small angle), followed by the maximum angle condition (K can contain one small angle, but not two).** We note that the added value of the last line of (11) can be appreciated when deriving error estimates with slower convergence rates than $O(h)$.

The fact that the minimal angle condition can be improved to the maximal angle condition was discovered independently by several groups, e.g. [1]. Its proof relies on a finer analysis of the interpolation error terms and is rather technical due to the fact that integral-based norms are used. If we consider the Sobolev norm $W^{1,\infty}$ (i.e. the ‘maximum of the magnitude of gradients’) instead of H^1 , the proof turns out to be quite simple, based essentially on the remainder of Taylor’s expansions, [5].

It can be shown that the maximal angle condition is optimal for error estimates of Lagrange interpolation, and it cannot be improved. This is done by considering a special quadratic function u and explicitly calculating the error of its Lagrange interpolation.

However, the situation is much more complicated for the finite element method. Taking $v_h := \Pi_K u$ in Céa’s lemma gives only an upper bound, which, as it turns out can be a huge overestimate of the true error. In such situations the maximal angle condition is too restrictive and the FEM can have optimal $O(h)$ convergence without it. This was first noticed in [3], where it was proven by a simple geometric construction that the maximum angle condition is not necessary for $O(h)$ convergence. In fact $\mathcal{T}_h$ can contain many ‘bad’ triangles violating the maximum angle condition while still exhibiting optimal $O(h)$ convergence. In other words, **the finite element method can converge optimally even when the Lagrange interpolation error goes to infinity.** This is especially important when we have a sequence of meshes obtained e.g. by refinement and let $h \rightarrow 0$. In this situation one usually considers a set of triangulations $\mathcal{T}_h$, $h \in (0, h_0)$ for some $h_0 > 0$. A more general approach to the problem is taken in [6], where a more sophisticated interpolation is considered instead of Lagrange interpolation. This interpolation is non-local (i.e. not based on data from a single element), which allows to transcend the locality of the maximum angle condition.

4 Optimality results

The question arises if there are situations, when we can optimally estimate the FEM error, since the maximal angle (or circumradius) estimate is unable to do so in general. It turns out there are two situations when this is possible.

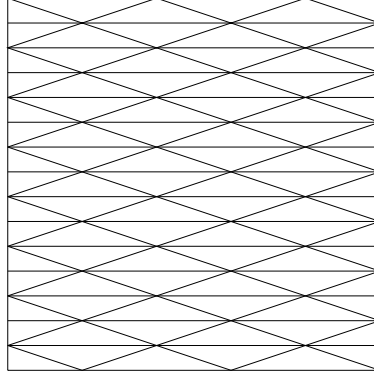


Fig. 1: Babuška-Aziz mesh with elements of width h and height $\bar{h}$.

4.1 Babuška-Aziz meshes

The first optimally analyzed mesh type is the Babuška-Aziz counterexample, [1], where meshes reminiscent of the famous ‘Schwarz lantern’ counterexample from measure theory are considered, cf. Figure 1. In these meshes *all* interior elements violate the maximum angle condition, i.e. their height $\bar{h}$ goes to zero faster than their width h . The original analysis in [1] is however suboptimal, the optimal estimate was obtained in [8], where it is proven that on these meshes

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \approx \min\{1, h^2/\bar{h}\}, \quad (12)$$

where ‘ $\approx$ ’ means that the left-hand side can be bounded from above and below by constant multiples of the right-hand side. The two-sided estimate (12) leads to the condition that $h/\bar{h}$ must stay bounded if we want $O(h)$ convergence. We note that the lower bound in (12) means that the **Babuška-Aziz meshes provide an explicit construction of meshes on which the FEM fails to have $O(h)$ convergence, or fails to converge at all, depending on the ratio $h^2/\bar{h}$.**

4.2 Band of caps

The second optimally analyzed case of FEM convergence was given in [6]. Here the triangulations $\mathcal{T}_h$ are assumed to each contain a so-called *band of caps*, cf. Figure 2. The band of caps consists of triangles in a zigzag pattern, cf. Figure 2, where all of the elements violate the maximum angle condition with the given α_0 . Specifically, we shall consider such a band of length L and height $\bar{h}$ consisting of identical isosceles triangles with diameters h , cf. Figure 2. We assume that every considered $\mathcal{T}_h$ contains one such band, while all other elements satisfy the maximum angle condition with a fixed maximal angle α_0 . It is important to note that the length L of the band can also depend on h (e.g. $L \sim \sqrt{\bar{h}}$, etc.), although the most important case in our situation is that $L \sim 1$ is independent of h .

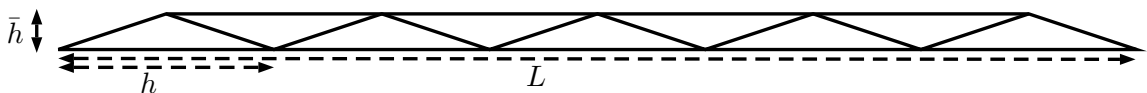


Fig. 2: Band of caps of length L and height $\bar{h}$.

The band of caps is important as a model for an approximated interface within the mesh $\mathcal{T}_h$. This is because it is an essentially 1D object (as an interface in 2D would be) with some

nonzero thickness $\bar{h}$. It is then desirable to have the thickness of the approximate interface as small as possible without affecting the convergence rate of the finite element method. Due to the regular structure of the band, the finite element error can be analyzed on meshes containing these bands of caps. Specifically, what we seek are conditions on the geometry parameters L and $\bar{h}$ in order to preserve $O(h)$ convergence, or more generally $O(h^\alpha)$ convergence for some $\alpha \in [0, 1]$. In [6], [7] the following result is proved as a special case of the main theorem of the paper dealing with a band of general elements.

THEOREM 2 *Let $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$. Let $\mathcal{T}_h$ contain a band of caps $\mathcal{B}$ of length L and height $\bar{h}$, while all other elements in $\mathcal{T}_h$ satisfy the maximum angle condition with some $\alpha_0 < \pi$. Then there exists a constant $C(u)$ depending only on u such that*

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq C(u)h \quad (13)$$

if and only if there exists $\tilde{C} > 0$ independent of h such that

$$\bar{h} \geq \tilde{C}h^2L. \quad (14)$$

In the special case of $L \sim 1$ independent of h , Theorem 2 states that the FEM can have $O(h)$ convergence on meshes containing bands of caps if and only if these bands have height not smaller than on the order of h^2 . This means that if $\bar{h} \rightarrow 0$ faster than h^2 , the FEM cannot have $O(h)$ convergence (actually it is proven also that if $\bar{h} \rightarrow 0$ faster than h^4 , then the FEM does not converge at all). In the context of the maximal angle condition this means that the band can violate this condition, but not too much ($\bar{h}_K \sim h_K^2$). We note that the validity of Theorem 2 has been verified by numerical experiments.

5 Circumventing the maximum angle condition

As stated, the band of caps can be viewed as an approximated interface within the mesh $\mathcal{T}_h$. Problems with interfaces are ubiquitous in applications and such meshes are actually desirable. Moreover, in these situations we want to make the interface as sharp as possible (i.e. $\bar{h}$ as small as possible). However this runs into the limitations posed by Theorem 2 which states that the best we can do in general is $\bar{h} \sim h^2$. This restriction is not purely theoretical or academic. In practice, if this condition is violated, the numerical solution undergoes a **locking phenomenon** which forces the numerical solution to be a single linear function on the whole band of caps, which completely destroys the ability of the method to approximate any reasonable solution.

We note that if the mesh is tailored to one particular solution u (e.g. u containing a sharp gradient at the interface), then the maximum angle condition need not apply since it is a statement about approximating all functions from a given class. However when u has several components (e.g. temperature and the level set function defining the position of the interface), the interface band of caps is not tailored to the shape of all these functions (e.g. to capture sharp gradients), but given by the physics. So while the mesh may capture one of the components of u very well, this might not be the case for other components of u . Hence the maximum angle condition would again come into play in these situations. Finally, we note that the 3D analogue of a interface is a thin slab of somehow degenerating elements that approximates a 2D surface within the 3D domain.

Now we briefly present a new idea that enables computation on meshes containing degenerating bands of caps. The method is called the **Tempered Finite Element Method**

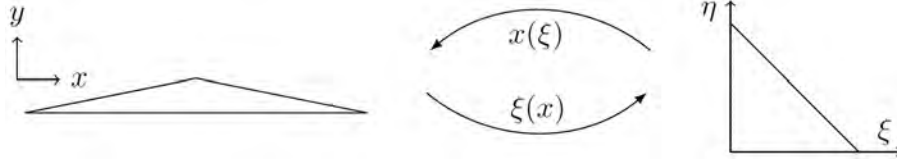


Fig. 3: Mapping of cap K element onto a reference element $\hat{K}$.

(**TFEM**), [9], and is based on a very simple idea. The standard FEM formulation of Poisson's problem leads to a system of linear equations, whose entries are computed from the elementwise contributions

$$K_{ij} = \int_K \nabla \phi_i \nabla \phi_j dx, \quad (15)$$

where ϕ_i, ϕ_j are standard ‘tent’ basis functions corresponding to individual vertices of the mesh. The standard way how to compute these entries is by mapping the element K onto a fixed reference element $\hat{K}$ as in Figure 3. The gradient of a basis function ϕ in the element K can then be obtained via the chain-rule $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\xi}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}}$. The calculation of the Jacobi matrix of the transform $\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}}$ is given by:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (16)$$

where $J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$ is the mapping determinant. For a triangular element, J is constant and equals to two times the area of the element. When evaluating (15), each of the two gradients results in a factor of $1/J$ via (16). Furthermore, a factor of J appears due to the transformation of the integral via $dx = J d\hat{x}$. Altogether, when evaluating (15) on the reference element, we get a total factor of $1/J$ in the expression. In more detail, we get

$$K_{ij} = \int_{\hat{K}} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\hat{x}. \quad (17)$$

If we have an extremely flat cap element K , the corresponding Jacobian J which causes numerical issues in the denominator in (17). **The basic idea of TFEM is to replace the value $J \approx 0$ by a certain minimal value $J_{\min}$ that we are willing to divide by.** The question then arises how to choose this “magical” constant. As numerical experiments show, the optimal choice in $\mathbb{R}^d$ is $J_{\min} \sim h^{d+1}$. This choice leads to numerical solutions that have optimal convergence rates in H^1 and L^2 even when the width of the band of caps is extremely small. Actually, one can even compute on meshes where the band of caps has zero width, i.e. $\bar{h} = 0$, in all its elements. In this case the TFEM approach avoids division by zero in (17) and gives a good numerical solution. In Figure 4, we can see such a mesh on the unit square, where the band of caps has zero thickness and effectively looks like a vertical line in the middle of the square domain, on which the mesh seems so be nonconforming. While it would be impossible to compute using standard FEM on such a mesh (multiple divisions by zero), TFEM gives a very good solution. We note that the mesh is chosen so coarse only for illustration purposes, so as the elements are clearly visible. Numerical experiments on much finer (and 3D) meshes are performed in [9], including convergence tests.

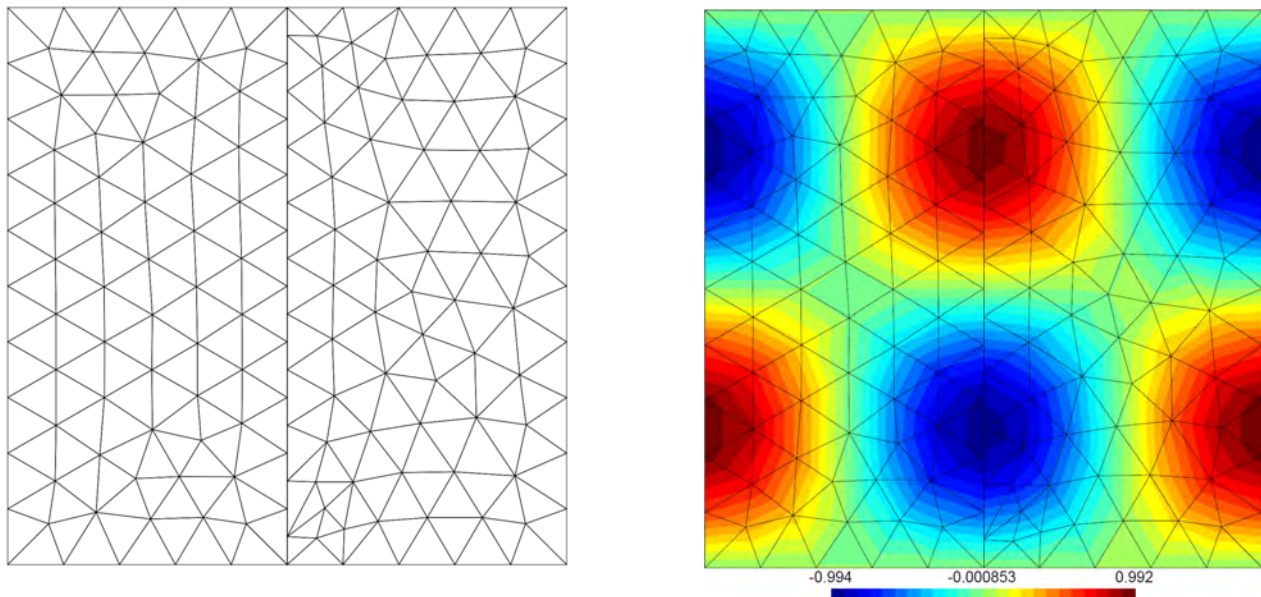


Fig. 4: Mesh with a vertical band of caps with zero width (left), numerical solution corresponding to exact solution $u(x, y) = \sin(2\pi x) \cos(2\pi y)$ (right).

We note that the TFEM approach can be rigorously analyzed, obtaining optimal error estimates for the heuristic choice $J_{\min} \sim h^{d+1}$. Furthermore, one can show that in the case of exactly zero-measure elements such as in Figure 4, the TFEM approach is equivalent to a mortaring scheme. In fact, one can use this approach to easily implement mesh mortaring and even the discontinuous Galerkin method within an off-the-shelf FEM code. All of this is possible by simply limiting the value of J away from zero by a pre-chosen value $J_{\min}$ in the code and is therefore very simple to implement. In [9] the method is tested also on more sophisticated problems, such as linear elasticity.

The TFEM technique possibly opens the door to very robust FEM implementations that are able to compute on very distorted meshes. This is not so much of a problem in 2D, however producing high-quality meshes on some geometries in 3D is near impossible and very time consuming. A mesh-robust FEM method would certainly be of much value to the community.

6 Conclusions

We have presented key points from the history of geometrical conditions in the finite element method. The history started with the pioneering work of Zlámal and Ženíšek and their minimal angle condition, and continued with the maximal angle condition. In a surprising turn of events, it was realized that the latter condition (which cannot be improved for Lagrange interpolation) is not necessary for FEM convergence. What condition is necessary and sufficient remains a mystery. Finally, we presented a new technique, which allows to bypass the restriction of the maximum angle condition in certain situation when this is desirable. The question arises, whether there exists a FEM-like scheme that would be able to compute on arbitrary meshes. Such a *universally convergent scheme* would be of much value.

References

- [1] *I. Babuška, A. K. Aziz*: On the angle condition in the finite element method, SIAM J. Numer. Anal. **13** (1976), 2, 214–226.
- [2] *P. G. Ciarlet*: The finite element method for elliptic problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [3] *A. Hannukainen, S. Korotov, M. Křížek*: The maximum angle condition is not necessary for convergence of the finite element method, Numer. Math. **120** (2012), 1, 79–88.
- [4] *K. Kobayashi, I. Tsuchiya*: On the circumradius condition for piecewise linear triangular elements, Japan J. Ind. Appl. Math. **32** (2015), 65–76.
- [5] *V. Kučera*: Several notes on the circumradius condition, Appl. Math. **61** (2016), 3, 287–298.
- [6] *V. Kučera*: On necessary and sufficient conditions for finite element convergence, <http://arxiv.org/abs/1601.02942> (preprint), Numer. Math. (submitted).
- [7] *V. Kučera*: Optimal convergence results for finite elements on extremely deformed meshes, proc. of Algoritmy 2024 (to appear).
- [8] *P. Oswald*: Divergence of the FEM: Babuška-Aziz triangulations revisited, Appl. Math. **60** (2015), 5, 473–484.
- [9] *A. Quiriny, V. Kučera, J. Lambrechts, N. Moës, J.-F. Remacle*: The tempered finite element method, J. Comput. Phys. (submitted).
- [10] *M. Zlámal*: On the finite element method, Numer. Math. **12** (1968), 394–409.
- [11] *A. Ženíšek*: The convergence of the finite element method for boundary value problems of a system of elliptic equations, Apl. Mat. **14** (1969), 355–377.

Václav Kučera is an associate professor at Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, Department of numerical mathematics, Sokolovská 86, 180 Praha 8, Czech Republic, e-mail: kucera@karlin.mff.cuni.cz.

Acknowledgement: This research has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union’s Horizon research and innovation program (Grant agreement No. 101 071 255).

Adaptive mesh refinement and *a posteriori* error estimates

TOMÁŠ VEJCHODSKÝ

Abstract: This short contribution is intended mainly for mathematicians who are not specialists in numerical analysis but would like to understand better the fundamental features of the finite element method. First, we review the finite element method for linear elliptic partial differential equations of second order. Then we concentrate on the main ideas of *a priori* and *a posteriori* error estimates, convergence and adaptive mesh refinement. We especially emphasize the pioneering convergence result of Professor Miloš Zlámal and present some modern results from the theory of the finite element method. We use several numerical examples to illustrate the presented results.

Keywords: finite element method, convergence, *a priori* error bounds, *a posteriori* error estimates, adaptivity.

AMS classification: 65N30, 65N15.

1 Introduction

The finite element method developed gradually and independently in different parts of the world. It does not have a single inventor and it is hard to say when it was discovered. Its beginnings can be traced back to the work of Alexander Hrennikoff and Richard Courant in the 1940s. Its popularity and importance gained momentum worldwide in the 1950s with the development of computers. Several pioneering works also appeared in the former Czechoslovakia and a prominent place among them was the seminal paper [18] of Professor Miloš Zlámal published in 1968. In this paper, he proved one of the first convergence results for finite elements under a novel minimal angle condition.

Later on, the convergence theory of the finite element method developed into an elegant and versatile theory. One of the first, recommendable and still influential monographs on the finite element theory are [8] and [15].

In this short contribution, we first review Zlámal's *a priori* error bound as an example of the convergence result. We will comment on its aspects to motivate interest in *a posteriori* error bounds. A pioneer in *a posteriori* error analysis is Professor Ivo Babuška, another prominent Czech mathematician. His papers [2] and [3] belong among the very first ones on *a posteriori* error estimates in the finite element method. *A posteriori* error estimates are crucial in adaptive algorithms for automatic mesh refinement. This procedure enables us to construct nearly optimal finite element meshes during the computation and, thus, achieve nearly optimal computational performance in numerical solution of partial differential equations. The adaptive algorithm is the final concept we present in this short contribution.

To ease the understanding, we illustrate all these prominent features of the finite element method on simple numerical examples with numerous illustrations. For clarity, we do not comment on some technical mathematical assumptions and subtle theoretical details.

The rest of this contribution is organized as follows. Section 2 introduces an elliptic linear problem of second order and briefly explains how to solve it by the finite element method.

Section 3 reviews the *a priori* error estimates on an example of Zlámal's result and explains its relevance for the convergence of the finite element method. Section 4 is devoted to *a posteriori* error estimates and Section 5 provides a brief introduction to the mesh adaptive algorithms. Finally, Section 6 draws the conclusions.

2 Linear elliptic problem of second-order and the finite element method

As a model problem, let us consider a simple diffusion-reaction linear elliptic partial differential equation of second order in a two-dimensional domain with homogeneous Dirichlet boundary conditions. If $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is a domain with sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$ and if $f = f(x_1, x_2)$ is a suitable right-hand side function defined in Ω then we seek the solution function $u = u(x_1, x_2)$ such that it satisfies

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f & \text{in } \Omega, \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Here, Δ stands for the Laplace differential operator defined as

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

As an example, let us consider a square $\Omega = (-1/2, 1/2)^2$, right-hand side function and the corresponding exact solution

$$f(x_1, x_2) = \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \quad \text{and} \quad u(x_1, x_2) = \frac{\cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)}{2\pi^2 + 1}.$$

Note that it is easy to verify by differentiation that this u satisfies the differential equation and the boundary condition in (1). Further, note that we have chosen the solution u as the first eigenfunction of the Laplace operator with homogeneous Dirichlet boundary conditions and, therefore, functions u and f differ by a constant multiple only. For illustration, Figure 1 (left) shows a three-dimensional graph of the function $u(x_1, x_2)$ over the square Ω .

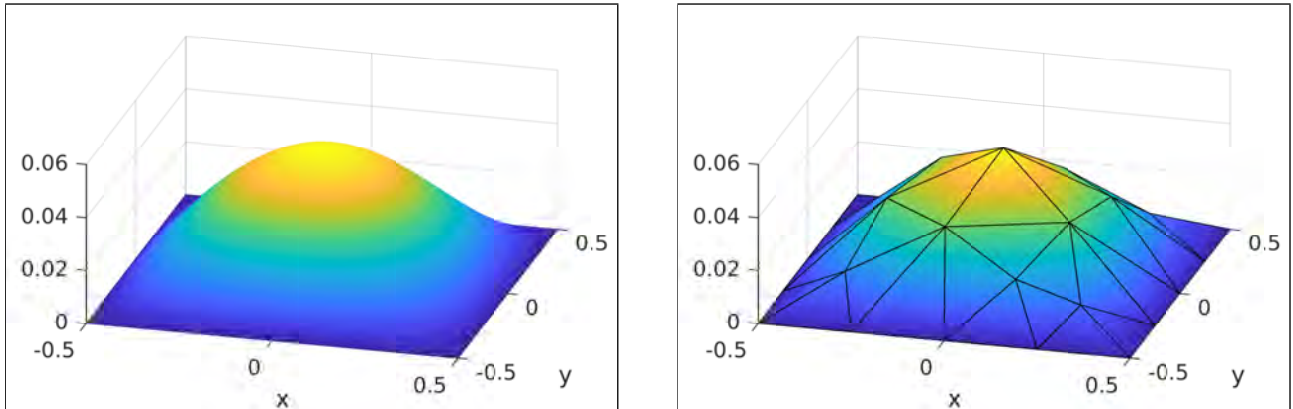


Fig. 1: Exact (left) and finite element (right) solutions of problem (1).

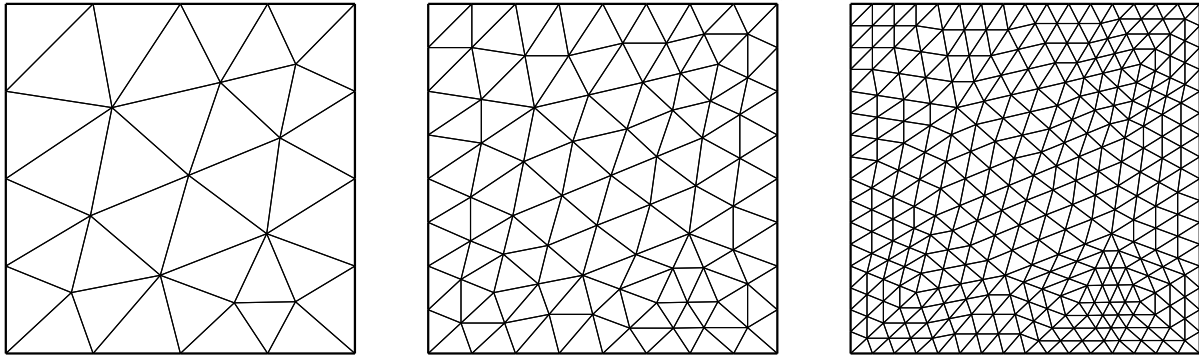


Fig. 2: Sequence of three uniformly refined finite element mesh.

Most often, for a given right-hand side function f , the exact solution cannot be expressed analytically in a closed form, especially, in the case of domains Ω with more complex geometries. Therefore, we have to employ numerical methods and solve problems like (1) numerically.

A very popular approach for numerical solution of partial differential equations is the finite element method. It is flexible and can handle complicated geometries of Ω . On top of that it has an elegant convergence theory and various error estimates. To apply the finite element method, we first construct a triangulation (or mesh) of the domain Ω . Triangulation is simply a splitting of the domain into triangles or other geometrically simple objects called elements. The finite element solution is then sought as a continuous and piecewise linear function over this triangulation.

Mathematically, the finite element method is a special case of the Galerkin method built on the weak formulation of problem (1). After the discretization one obtains a system of linear algebraic equations for unknown values of the approximate solution at the nodal points of the triangulation. This system can be large, but the distinctive feature of the finite element method is the sparsity of the system matrix. Hence, iterative methods together with suitable preconditioning enable us to solve resulting linear systems with millions of equations on usual personal computers. Figure 1 (right) shows an example of the approximate finite element solution. Note that this solution was computed on the mesh depicted in the left panel of Figure 2.

Let us remark that a method with a faster convergence rate can be obtained by approximating the solution u by a continuous and piecewise quadratic function over the finite element triangulation. In such a case, we speak about the finite element method of second order. The resulting system of linear algebraic equations is naturally larger, but the obtained approximate solution is more accurate. For problems with smooth solutions (without singularities), the higher order methods pay off, because the gain in the accuracy outweighs higher computational costs.

3 Convergence and *a priori* error estimates

As we mentioned above, there is an elegant convergence theory for the finite element method. One of the first convergent results for the finite element method was proved by Professor Miloš Zlámal in the 1960s. His result applies well to problem (1) discretized by finite elements of second order. Figure 3 literally quotes his famous result published in [18]. The first two lines of this quote formulate the assumption that the exact solution u must have all derivatives of order three bounded in Ω . Simply speaking, the exact solution must be sufficiently smooth for the validity of this convergence result.

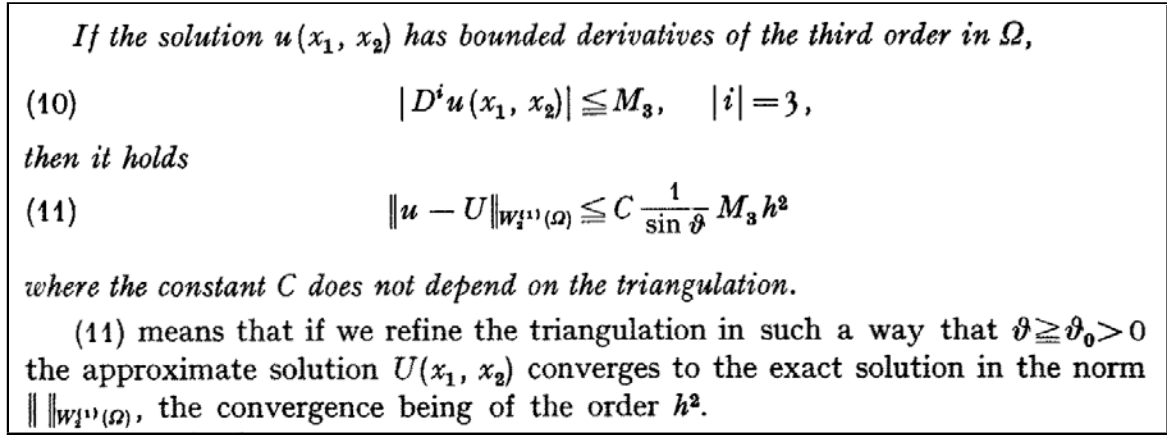


Fig. 3: A quote of the famous Zlámal's convergence result from [18].

Inequality (11) in this quote is the main statement. On the left-hand side, we see the error, i.e., the difference between the exact solution u and the finite element solution U in the $W_2^{(1)}(\Omega)$ norm. This norm measures the size of involved functions in terms of both their values and derivatives. It is the most natural norm for the linear elliptic problems of the second order and it is defined as

$$\|v\|_{W_2^{(1)}(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (v^2 + |\nabla v|^2) \, dx_1 \, dx_2, \quad \text{where} \quad \nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^T.$$

The $W_2^{(1)}$ -norm of the error $u - U$ is bounded by the term on the right-hand side of (11). Important is the last factor h^2 . Symbol h stands for the mesh parameter and it indicates the size of finite elements in the triangulation. In particular, h is the largest diameter out of all (triangular) elements. The first factor $C \frac{1}{\sin \vartheta} M_3$ on the right-hand side of (11) is a positive constant independent of h and we will comment on it later.

Zlámal's *a priori* error estimate (11) tells us that the finite element method converges and in addition that it converges quadratically fast. To understand the concept of convergence of finite element solutions, we have to consider a sequence of successively refined triangulation. For example, Figure 2 presents a sequence of three uniformly refined meshes. The coarsest mesh is depicted on the left-hand side. The refined mesh, depicted in the middle, is obtained from the coarsest one by splitting each triangle into four similar sub-triangles by connecting the centres of its edges. The finest mesh (on the right) is constructed by the same procedure applied to the already refined mesh. This refinement process can be repeated as many times as we wish and produces a sequence of uniformly refined meshes.

Note that if the first triangulation has the mesh parameter $h = h_0$ (the largest diameter out of all triangles) then the refined mesh has the mesh parameter $h_0/2$, the twice refined mesh $h_0/4$, etc. Looking back at Zlámal's *a priori* error estimate (11) in Figure 3, we see that if we uniformly refine the triangulation then the error bound in (11) drops by the factor 4. Indeed, if the bound on the right-hand side of (11) is $C \frac{1}{\sin \vartheta} M_3 h_0^2$ for the first mesh then it will be $C \frac{1}{\sin \vartheta} M_3 h_0^2/4$ on the refined mesh. This bound is optimal and, therefore, the error on the left-hand side behaves in the same manner during the process of uniform mesh refinement.

To sum up, Zlámal's *a priori* error estimate tells us, roughly speaking, that the error of the finite element approximation measured in the suitable norm will drop by a factor of 4 every time we uniformly refine the mesh. In other words, the error behaves like h^2 and we speak about the second-order convergence speed.

This second-order convergence does not appear unconditionally. Besides the assumption of the smoothness of u , the angle ϑ plays a crucial role here. Zlámal comments on it immediately below his celebrated result, see Figure 3. To explain, ϑ is the smallest angle within the given triangulation and it is important to guarantee that it stays bounded away from zero during the refinement process. In other words, the smallest angle ϑ in the triangulation cannot degenerate to zero. The point is that the mesh refinement needs not to be uniform. There are countless ways how triangular meshes can be refined and it is not difficult to imagine a refinement process that splits the angles. If such angle splitting happens infinitely many times then the smallest angle converges to zero and the factor $1/\sin \vartheta$ on the right-hand side of Zlámal's bound (11) blows up towards infinity. Therefore, we have to refine the meshes such that the smallest angle in all triangulations stays bounded away from zero.

Let us note here that this well-known Zlámal's minimum angle condition was generalized to arbitrary dimension in [7]. However, it is not an optimal condition for convergence. The finite element method can converge (even optimally fast) on a sequence of meshes where the smallest angle degenerates towards zero. The right-hand side of Zlámal's estimate will blow up to infinity but the error on the left-hand side will converge to zero.

More recent results showed that the finite element method converges under the assumption that the largest angles in triangulations are bounded away from π , see e.g. [6, 11, 12]. Notice that an obtuse triangle with one large angle has necessarily two small angles. On the other hand, if a triangle has one small angle then the other two angles can be close to $\pi/2$ and, hence, bounded well away from π . Therefore, Zlámal's minimal angle condition is indeed less general than the largest angle condition. On top of that, it turns out that the finite element method can converge even on certain sequences of meshes, where the largest angle converges to infinity. This brings us to a still unresolved question, what is the sufficient and necessary condition for the convergence of the finite element method. See [13, 14] for more details.

Zlámal's error bound (11) is a typical example of an *a priori* error estimate. We can hypothetically evaluate it even before any computation (hence *a priori*). However, and it is a characteristic feature of *a priori* error estimates, they contain unknown constants typically denoted by C . The right-hand side of Zlámal's bound contains two such constants. Besides C , it is M_3 that can be theoretically derived from the third derivatives of the exact solution u , but this solution is not known in practical applications and the value of constant M_3 is, thus, unreachable.

4 *A posteriori* error estimates

In contrast to *a priori* error estimates the *a posteriori* bounds can be evaluated from the knowledge of the approximate solution after it has been computed. Hence, the name *a posteriori*. There are various types of *a posteriori* error estimates with various properties. Here, we present one that currently seems most suitable for problem (1).

If $u = u(x_1, x_2)$ and $U = U(x_1, x_2)$ stand for the exact and finite element solutions of (1), respectively, then *a posteriori* error estimator η satisfying

$$\|u - U\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leq \eta \tag{2}$$

can be computed as

$$\eta^2 = \|\sigma - \nabla U\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f - U + \operatorname{div} \sigma\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \text{where} \quad \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v^2 \, dx_1 \, dx_2, \tag{3}$$

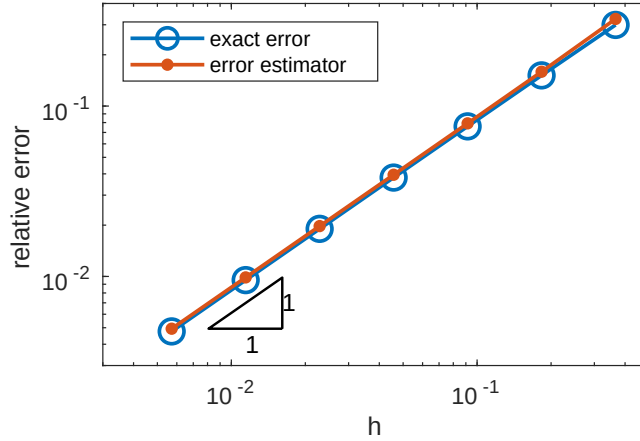


Fig. 4: Convergence of the exact error and the error estimator for uniformly refined meshes.

see e.g. [1]. Here, the flux reconstruction $\sigma = (\sigma_1(x_1, x_2), \sigma_2(x_1, x_2))^T$ is a two-dimensional vector field defined in Ω and $\operatorname{div} \sigma = \partial \sigma_1 / \partial x_1 + \partial \sigma_2 / \partial x_2$ stands for its divergence. Recall that gradient ∇ was already introduced above.

Interestingly, the error $u - U$ on the left-hand side of (2) is measured in the same $W_2^{(1)}(\Omega)$ -norm as in Zlámal's *a priori* bound (11). The square of the *a posteriori* error estimator η is given by (3) as a sum of squares of two $L^2(\Omega)$ -norms that can be evaluated from the knowledge of the finite element solution U , right-hand side f and the flux reconstruction σ .

The flux reconstruction σ plays a crucial role in the definition of estimator η . Technically, $\operatorname{div} \sigma$ is required to be square integrable over Ω , but otherwise σ can be arbitrary. However, to obtain a useful and accurate bound on the error, the flux reconstruction σ should approximate the gradient of the exact solution u . There are various possibilities, how the flux reconstruction σ can be computed. It can be a postprocessing of ∇U or it can be computed by minimizing the quadratic functional on the right-hand side of (3) for σ being in a suitable finite dimensional subspace. Although these approaches can be technically involved, fast and accurate algorithms for the flux reconstruction σ are known, see e.g. [4, 5, 10, 16, 17].

A posteriori error estimator (2) is especially useful in practical computations. It does not contain any unknown constant, can be fully computed and the resulting number η is proven to bound the (unknown) error from above. With this error estimator, we can guarantee that the error of our finite element solution is below the required tolerance.

Let us illustrate the convergence of the finite element method and the accuracy of *a posteriori* error estimator (3) on an example. As above, we will solve problem (1) on the square $\Omega = (-1/2, 1/2)$ with the right-hand side $f(x_1, x_2) = \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)$. For simplicity, we use finite elements of the first order. In this case, the expected order of convergence is one. This means that every time we uniformly refine the triangulation, the error should drop by a factor of two. To verify this fact, we solve the problem on a sequence of uniformly refined meshes, as illustrated in Figure 2. For every mesh, we compute the $W_2^{(1)}(\Omega)$ -norm of the error $u - U$ and plot it versus the mesh size h . Figure 4 shows these values in the log-log plot as the blue line with circular markers. We may observe that the error drops almost exactly as the theory predicts.

Note that we can compute this error and plot this convergence curve thanks to the knowledge of the exact solution u only. However, in practical computations the exact solution is unknown and, therefore, *a posteriori* error estimates such as (2) are needed. The red solid line with dot markers in Figure 4 plots the corresponding values of the error estimator η defined by (2). First,

we see that the estimator η is larger than the true error $\|u - U\|_{W_2^{(1)}(\Omega)}$, because of the result (2). Second, the estimator η is a very accurate approximation of the true error.

5 Adaptive mesh refinement

Zlámal's *a priori* error bound (11) assumes sufficient smoothness of the exact solution u , namely, the boundedness of its third derivatives. This is a typical and important assumption in *a priori* error analysis of the finite element method. If the exact solution is not smooth, the finite element method still converges but the convergence need not have the optimal speed. The optimal speed of convergence, even for non-smooth (singular) solutions, can be restored by applying the adaptive mesh refinement.

The main idea of the automatic mesh adaptation is to detect the size of the error on all elements in the mesh and refine those elements, where a large error is indicated while keeping the elements with small errors unchanged. The *a posteriori* error estimator described above is especially suitable for detecting the error on individual elements because it can be localized.

Let us assume that the flux reconstruction σ is already known. If we denote by K an element (triangle) from the finite element triangulation $\mathcal{T}_h$ then the local error indicator η_K is given by identity

$$\eta_K^2 = \|\sigma - \nabla U\|_{L^2(K)}^2 + \|f - U + \operatorname{div} \sigma\|_{L^2(K)}^2. \quad (4)$$

Note that the definition of indicators η_K is the same as the definition of the estimator η but restricted from the global space $L^2(\Omega)$ on the entire domain Ω to the local space $L^2(K)$ on the single element K only. It can be easily shown that

$$\eta^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2, \quad (5)$$

i.e., the square of the global error estimator η^2 can be computed by the sum of squares of all local error indicators η_K^2 .

Local error indicators η_K given by (4) are essential for the following adaptive algorithm.

1. Construct the initial mesh $\mathcal{T}_h^{(0)}$. Set $k = 0$.
2. Find the finite element solution $U^{(k)}$ on $\mathcal{T}_h^{(k)}$.
3. By (4), compute error indicators η_K for all elements $K \in \mathcal{T}_h^{(k)}$.
4. Compute η by (5). If $\eta < TOL$, stop.
5. Mark elements with largest values of η_K .
6. Refine marked elements and construct new mesh $\mathcal{T}_h^{(k+1)}$.
7. Set $k = k + 1$ and go to 2.

This adaptive algorithm enables us to find an approximate solution U with the error below the user-prescribed tolerance TOL (see Step 4). On top of that, this algorithm is nearly optimally efficient in terms of the computational costs. These favourable properties are connected to sophisticated theoretical results, such as the upper bound property (2). Most of these results are beyond the scope of this paper. We just mention that the efficiency of this algorithm is connected with the efficiency estimates of the error indicators (4). We do not comment on geometric issues connected with the construction of the mesh in Step 1 and its local refinement

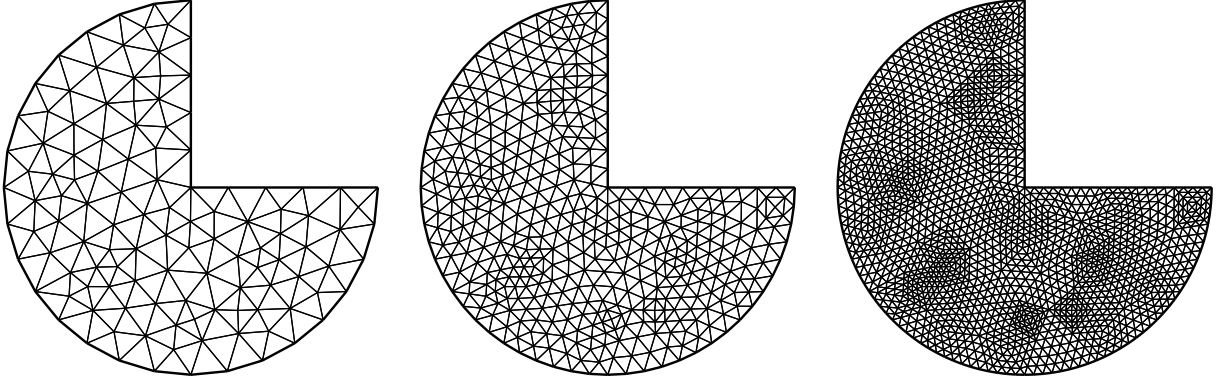


Fig. 5: Sequence of three uniformly refined finite element mesh.

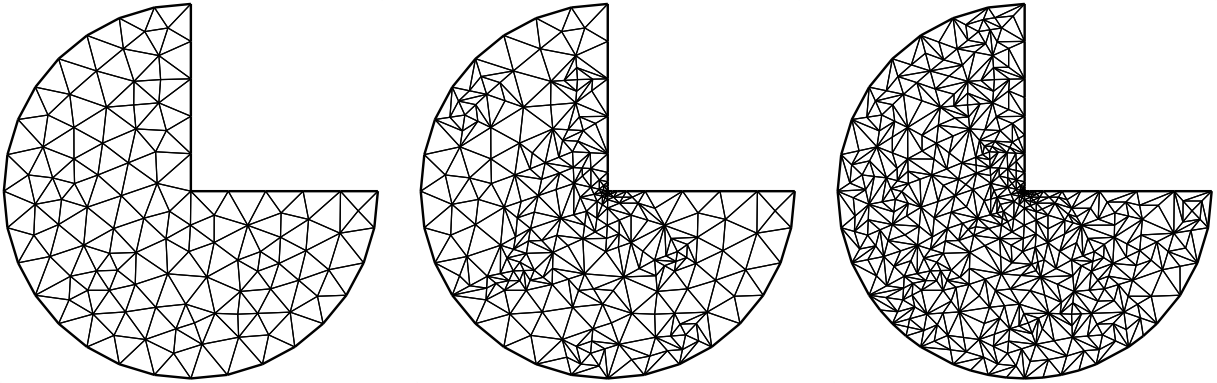


Fig. 6: Sequence of adaptively refined meshes. Initial mesh (left), 7th adaptive step (middle), and 10th adaptive step (right).

in Step 6. Finally, we note that the choice of suitable marking strategy in Step 5 is important for the convergence of this algorithm [9].

At this point, we present a numerical example illustrating the performance of the mesh adaptive algorithm. Let us consider a domain consisting of three-quarters of the unite disc, i.e. the domain $\Omega = \{(r, \theta) : r < 1 \text{ and } \pi/2 < \theta < 2\pi\}$, where (r, θ) are the usual polar coordinates. In this domain, we define the right-hand side as $f = (32/9 + r^{2/3} - r^2) \sin(2\theta - \pi)/3$. It can be verified that the corresponding exact solution of (1) is $u = (r^{2/3} - r^2) \sin(2\theta - \pi)/3$. Notice that the derivative of u with respect to r tends to infinity at zero, i.e. in the re-entrant corner. We say that u has a singularity at this point.

First, we solve this problem on a sequence of uniformly refined meshes as we did above. The first three meshes in this sequence are presented in Figure 5. For every mesh in this sequence, we compute the error bound η by (2) and plot it versus the mesh size h in the log-log axis, see the blue solid line in Figure 7. Note that after every uniform refinement step, the error drops to about 70 % of its original value, while the optimal drop would be 50 %.

This suboptimal convergence rate is caused by the singularity of the exact solution and can be improved by employing adaptive mesh refinement. The above-described algorithm leads to a sequence of locally refined meshes illustrated in Figure 6. The corresponding convergence curve is shown in Figure 7 as the red line with dot markers. Observe that it approaches a straight line with a slope of 1, which corresponds to the optimal rate of convergence. In addition, using roughly the same computational resources, the adaptive algorithm reached considerably more

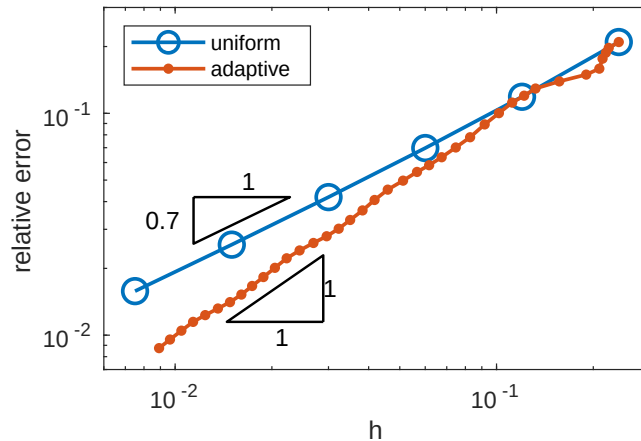


Fig. 7: Uniform and adaptive convergence curves.

accurate results. Note that the mesh size h does not have a good sense for locally refined meshes produced by adaptive algorithms. Therefore, to plot the adaptive convergence curve, we use $h \approx \sqrt{N}$, where N is the number of degrees of freedom, which is equal to the number of interior nodes in the triangulation in this case.

6 Conclusions

In this short contribution, we reviewed the convergence theory of the finite element method for a second-order linear elliptic problem for mathematicians without an expertise in the numerical analysis and finite element method. We emphasized the early *a priori* error bound of Professor Miloš Zlámal and used it as an illustrative example. Subsequently, we present more recent developments in the finite element method and described the concept of *a posteriori* error estimates and automatic mesh adaptation. These essential features of the finite element method are illustrated in several numerical examples by many graphs.

Especially, we explained the concept of convergence on a sequence of uniform meshes. We presented a problem with singularity in the re-entrant corner of the domain causing slower convergence than optimal. Therefore, we introduced the basic ideas of the adaptive algorithm and showed that it enables solving such problems efficiently even in the presence of singularities. We would like to emphasize the essential role of the *a posteriori* error estimates in this approach. First, their localized version indicates, where there are areas of large error within the computational domain and where we need to refine the finite element mesh. Second, they provide a guaranteed upper bound on the size of the error (measured in a suitable norm) and, thus, enable us to stop the adaptive algorithm at the moment, we reach the desired accuracy. As a result, we can confirm what is the error of the computed approximation and we also know that we stopped the calculations as soon as we reached it, so we did not use unnecessary computational resources.

In this contribution, we also touched on the still open problem of finding the sufficient and necessary conditions for the convergence of the finite element method and connected the pioneering result of Professor Miloš Zlámal with the current frontier research in the finite element theory.

References

- [1] *M. Ainsworth, T. Vejchodský*: Robust error bounds for finite element approximation of reaction-diffusion problems with non-constant reaction coefficient in arbitrary space dimension, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **281** (2014), 184–199; corrigendum *ibid.* **299** (2016), 143.
- [2] *I. Babuška, W. C. Rheinboldt*: Error estimates for adaptive finite element computations, *SIAM J. Numer. Anal.* **15** (1978), 4, 736–754.
- [3] *I. Babuška, W. C. Rheinboldt*: A-posteriori error estimates for the finite element method, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **12** (1978), 1597–1615.
- [4] *D. Braess*: *Finite Elemente, Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*, Springer, Berlin, 2013.
- [5] *D. Braess, J. Schöberl*: Equilibrated residual error estimator for edge elements, *Math. Comp.* **77** (2008), 262, 651–672.
- [6] *J. Brandts, A. Hannukainen, S. Korotov, M. Křížek*: On angle conditions in the finite element method, *SĚMA J.* **56** (2011), 81–95.
- [7] *J. Brandts, S. Korotov, M. Křížek*: Generalization of the Zlámal condition for simplicial finite elements in $\mathbb{R}^d$, *Appl. Math.* **56** (2011), 4, 417–424.
- [8] *P. G. Ciarlet*: *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1978.
- [9] *W. Dörfler*: A convergent adaptive algorithm for Poisson’s equation, *SIAM J. Numer. Anal.* **33** (1996), 3, 1106–1124.
- [10] *A. Ern, M. Vohralík*: Polynomial-degree-robust *a posteriori* estimates in a unified setting for conforming, nonconforming, discontinuous Galerkin, and mixed discretizations, *SIAM J. Numer. Anal.* **53** (2015), 2, 1058–1081.
- [11] *A. Hannukainen, S. Korotov, M. Křížek*: Maximum angle condition for n -dimensional simplicial elements, in Florin Adrian Radu, et al. (ed.), *Numerical mathematics and advanced applications*, ENUMATH 2017, Bergen, Norway, Cham: Springer, 2018, 769–775.
- [12] *A. Hannukainen, S. Korotov, M. Křížek*: The maximum angle condition is not necessary for convergence of the finite element method, *Numer. Math.* **120** (2012), 1, 79–88.
- [13] *S. Korotov, M. Křížek, V. Kučera*: On degenerating finite element tetrahedral partitions, *Numer. Math.* **152** (2022), 2, 307–329.
- [14] *V. Kučera*: A note on necessary and sufficient conditions for convergence of the finite element method, in: Jan Brandts et al. (ed.), *Proceedings of the international conference Applications of mathematics*, Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences, Prague, 2015, 132–139.
- [15] *G. Strang and G. J. Fix*: *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, 1973.

- [16] *T. Vejchodský*: Complementarity based *a posteriori* error estimates and their properties, Math. Comput. Simul. **82** (2012), 10, 2033–2046.
- [17] *M. Vohralík*: *a posteriori* error estimates for lowest-order mixed finite element discretizations of convection-diffusion-reaction equations, SIAM J. Numer. Anal. **45** (2007), 4, 1570–1599.
- [18] *M. Zlámal*: On the finite element method., Numer. Math. **12** (1968), 394–409.

Associate professor **Tomáš Vejchodský** is a researcher at the Institute of Mathematics and this time the director of the Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences, Žitná 25, 115 67 Prague 1, Czech Republic, e-mail: `vejchod@math.cas.cz`

Acknowledgement: The author acknowledges the support of the Czech Science Foundation, grant no. GA23-06159S, and the institutional funding of the Czech Academy of Sciences, RVO 67985840.

Finite element hp -methods for partial differential equations

VÍT DOLEJŠÍ

Abstract: We deal with the numerical solution of partial differential equations using finite element method whose mathematical background was built in 60's by prof. Zlámal. We focus on the hp -mesh adaptive methods that combine the refinement of mesh elements and the variation of the degree of polynomial approximation. The hp -method can give the exponential rate of convergence of the error with respect to the number of degrees of freedom. We present several theoretical results, which are supported by numerical experiments.

Keywords: hp -mesh adaptation, finite element methods, minimization of degrees of freedom.

AMS classification: 65M60, 65M15, 65M50.

1 Introduction

Starting from the seminal paper [23] of Prof. Zlámal, the finite element method (FEM) has become a hot topic in the area of numerical solution of partial differential equations (PDE). FEM exhibits a very efficient and powerful tool for the simulations of a wide range of physical and/or engineering problems of human interest. The idea of FEM is to divide the computational domain into a finite set of mutually disjoint elements that form a mesh $\mathcal{T}_h$. The unknown solution of the given PDE is approximated by a function from a finite-dimensional space V_h , which usually consists of piecewise polynomial functions over $\mathcal{T}_h$. The dimension of V_h is called the number of *degrees of freedom* (DoF). This approximation leads to an algebraic system of size DoF that must be solved numerically.

In general, a finer mesh (larger DoF) results in a better approximation (smaller computational error) but leads to an increased computational cost. It is necessary to balance these aspects, which is a challenging task. The goal of the numerical solution of PDEs is to achieve a given error tolerance using the shortest computational time. One way to reduce computational cost is to have a suitable (adaptive) setting of the space V_h , usually by controlling its dimension DoF. We note that the demand for the “*shortest possible computational time*” and the “*minimal number of DoF*” are not equivalent since algebraic systems arising from strongly adapted finite element space are usually more difficult to solve. However, the reduction of DoF tends to give a large benefit in terms of computational cost, cf. [14].

The core idea of the adaptive solution of PDEs is to perform the computation on an initial mesh $\mathcal{T}_h$ and the corresponding space V_h , estimate the error of interest, adapt (refine) the mesh $\mathcal{T}_h$ and space V_h using available information, and repeat the computation until the prescribed error tolerance is achieved. There exist several basic mesh adaptation strategies which can be employed:

- h -adaptation, which allows the local refinement (or coarsening) of the mesh elements,
- p -adaptation, which allows the local increase (or decrease) of the polynomial approximation degrees on mesh elements,

- *r-adaptation*, which only adapts the position of the mesh nodes, keeping the number of DoF.

Obviously, it is possible to combine some of these strategies. For example, *hp-adaptive methods* are very efficient techniques that combine *h*- and *p*-adaptation, thus allowing adaptation of element size *h*, as well as the polynomial degree of approximation *p*. Theoretical results, as well as numerical studies, show that the computational error of an *hp*-method may converge at an exponential rate with respect to DoF [5, 11, 17, 19, 21].

In this paper, we discuss several aspects of *hp*-adaptive methods by recalling some theoretical results that are further accompanied by numerical experiments. In Section 2, we present an abstract concept of solving partial differential equations by finite element method. Its concrete realization, with an emphasis on the *hp*-methods, is given in Section 3. An application of the *hp*-adaptation method to a real example is presented in Section 4. Finally, Section 5 contains several concluding remarks.

2 Abstract concept of finite element discretization

2.1 Variational formulations

For a linear PDE of interest, we consider the following abstract variational (weak) formulation: find $u \in V$ such that

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V, \quad (1)$$

where V is a Hilbert space equipped with norm $\|\cdot\|_V$, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous bilinear form, and $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous linear functional. It is possible to consider a more general case outside of Hilbert spaces, e.g. [15].

The existence and uniqueness of the solution of problem (1) is guaranteed by the Lax-Milgram theorem.

Theorem 1. Let V be a Hilbert space. Let $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ be a bilinear form and $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous linear functional. If the form a is *coercive*

$$\exists m > 0 : \quad a(v, v) \geq m\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V, \quad (2)$$

and *bounded*

$$\exists M > 0 : \quad |a(u, v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \quad (3)$$

then problem (1) possesses a unique solution $u \in V$.

2.2 Finite element approximations

The main idea of the finite element solution of (1) is to replace space V by a finite-dimensional space V_h . The subscript h formally represents the discretization parameters. For simplicity, we assume that $V_h \subset V$, although the numerical examples presented in this paper are carried out for the case $V_h \not\subset V$, we refer to [6, 13].

Definition 2. A function $u_h \in V_h$ is called the *approximate solution* of (1) if

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (4)$$

Using the Lax-Milgram lemma, we can simply prove the existence and uniqueness of the approximate solution since the assumptions (2) and (3) are valid for the form $a_h : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ given by $a_h(v_h, w_h) := a(v_h, w_h)$, $v_h, w_h \in V_h$.

2.3 Abstract error estimates

Finally, we present the abstract a priori error estimate which bounds the difference between the exact and approximate solutions in the V -norm. To prove the convergence of the approximate solution u_h with the exact one u for $h \rightarrow 0$, the fundamental result is the Céa lemma.

Lemma 3. Let $u \in V$ and $u_h \in V_h$ be the exact and approximate solutions given by (1) and (4), respectively. Then there exists a constant $C > 0$ independent of the space V_h such that

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (5)$$

Proof. Subtracting (4) from (1) with $v := v_h$, we obtain the Galerkin orthogonality of the error

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \quad (6)$$

Using the assumptions (2) and (3), we obtain

$$m\|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M\|u - u_h\|_V\|u - v_h\|_V,$$

for any $v_h \in V_h$ which implies (5) with $C := M/m$. $\square$

Corollary 4. Lemma 3 implies that a sufficient condition for the convergence of u_h to u as $h \rightarrow 0$ is given by the following approximation property:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V = 0 \quad \forall v \in W. \quad (7)$$

The condition (7) guarantees the convergence of the Galerkin approximations and appears in many monographs as the *approximation* property. However, there are many ways to satisfy (7), including the global refinement of the grids on which the spaces $\{V_h, h > 0\}$ are defined. Therefore, the approximability condition does not give any guidelines on the efficient construction of trial spaces in practice. Nevertheless, for a given problem, in virtue of (5), it is sufficient to construct spaces $\{V_h, h > 0\}$ such that

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V = 0 \quad (8)$$

for each particular (unknown) solution u . Moreover, we are interested not only in satisfying (8) but also in the rate of convergence [14].

Estimate (5) is the core of many mesh adaptation methods. The idea is to define the finite element space V_h (cf. 3) such that

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \leq \omega, \quad (9)$$

where $u \in V$ is the (unknown) exact solution, and $\omega > 0$ is a given tolerance. The condition (9) is clearly a *necessary condition* for the common requirement that the error of the numerical scheme satisfies

$$\|u - u_h\|_V \leq \omega. \quad (10)$$

Therefore, if condition (9) (or its approximation) is valid, then the numerical method seeking the approximate solution in v_h has the chance of satisfying (10).

3 Finite element spaces

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ be a bounded polygonal (for $d = 2$) or polyhedral (for $d = 3$) domain. We use a standard notation for Lebesgue and Sobolev space $L^q(\Omega)$ and $H^s(\Omega)$, respectively, including the Sobolev-Slobodetskii spaces $H^s(\Omega)$ with non-integer derivatives s , cf. [1, 9].

We consider problem (1) whose solution is an unknown function $u \in V$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. In order to produce a finite dimensional approximation of u , we introduce a partition of the computational domain Ω by simplexes K (triangles for $d = 2$ and tetrahedra for $d = 3$) and denote it by $\mathcal{T}_h$. By h_K , we denote the diameter of $K \in \mathcal{T}_h$ and set $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$.

Although the considerations in Section 2 have been carried out for the case $V_h \subset V$, we consider here more general case when V_h consists of piecewise polynomial but discontinuous functions, hence $V_h \not\subset V$. This approach is represented by *discontinuous Galerkin method* (DGM), see [13], where the analysis from the previous section is generalized. DGM is more suitable for the hp -method treated in this paper.

We introduce the space of discontinuous piecewise polynomial functions with a locally varying degree of polynomials. Let $P = \{p_K, K \in \mathcal{T}_h\}$ be a set of integers where $p_K \geq 0$ is the polynomial approximation degree assigned to the simplex $K \in \mathcal{T}_h$. Then we set

$$V_h := \{v_h \in L^2(\Omega); v_h|_K \in P^{p_K}(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (11)$$

where $P^{p_K}(K)$ denotes the space of polynomials of degree at most p_K on $K \in \mathcal{T}_h$.

3.1 Approximation properties of finite element spaces

Let Π_h be an interpolation from $L^2(\Omega)$ to V_h . There exist many results concerning estimates of the interpolation error, that is, the difference between a given function u and its projection $\Pi_h u$, for example, [10, Theorem 3.1.4] or [8].

Lemma 5 Let $K \in \mathcal{T}_h$ be a regular shape, $v \in H^s(K)$, $s \geq 1$, and $\Pi v|_K \in P^p(K)$ be the interpolation. Then there exists a constant $c > 0$, independent of v , s and p , such that

$$|v - \Pi_h v|_{H^q(K)} \leq ch_K^{\mu-q} |u|_{H^\mu(K)}, \quad (12)$$

where $\mu = \min\{p + 1, s\}$, $q = 0, 1, \dots, \mu$, and h_K is the diameter of $K \in \mathcal{T}_h$.

Using (12) and the element-wise global projection Π_h of functions defined on Ω in V_h , we obtain the global interpolation estimate in a straightforward way. Consequently, the combination of this result with Céa lemma yields the convergence rate of the numerical solution with respect to the exact solution.

The theoretical convergence rate (12) is supported by the numerical experiments presented in Figure 1. We solve the Poisson problem in unit squares by DGM where the exact solution belongs to $C^\infty(\Omega)$ (left), $H^{3.5}(\Omega)$ (center), and $H^{1.5}(\Omega)$ (right) using fixed polynomial approximation degrees $p_K = p$ for all $K \in \mathcal{T}_h$ with $p = 1, \dots, 6$. These figures show the dependence of $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ on h . The rate of convergence $O(h^\mu)$ is easily observed.

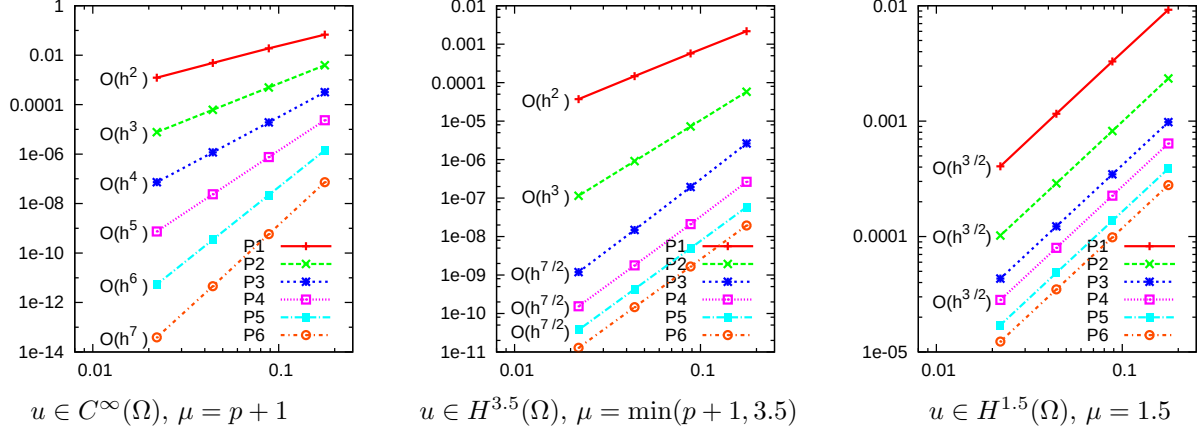


Fig. 1: Convergence rates of DGM in the $L^2(\Omega)$ -norm with respect to the mesh size h for different regularity of exact solution u .

3.2 hp -adaptive methods

As mentioned in the introduction, the goal of the calculation is to obtain an approximate solution such that the error $u - u_h$, measured in a suitable norm, is within the given tolerance $\omega > 0$ using a small number of degrees of freedom (DoF). It can be achieved by the following abstract algorithm.

Mesh adaptive algorithm

- (S1) let $\|\cdot\|_X$ be the norm of our interest and $\omega > 0$ be the prescribed tolerance,
- (S2) let $\mathcal{T}_h^0$ be an initial mesh, V_h^0 the corresponding finite element space, cf. (11), set $k := 0$,
- (S3) compute approximate solution $u_h^k \in V_h^k$ using a finite element method (4),
- (S4) estimate the error $e_h := \|u - u_h\|_X$ by $e_h \approx \eta = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^k} \eta_K$,
- (S5) if $\eta \leq \omega$ then stop the computation,
- (S6) else construct a new mesh $\mathcal{T}_h^{k+1}$ and space V_h^{k+1} based on the local estimators η_K , $K \in \mathcal{T}_h^k$,
- (S7) set $k := k + 1$ and go to step (S3).

Step (S4) is based on a posteriori error analysis, cf. [22, 7, 2] for example, where various techniques are described. Here, we discuss step (S6) of the algorithm. Using the variants of h -adaptation, the fixed ratio elements, having the highest local estimator η_K , are split into several smaller elements (typically a triangle is split into 4 smaller triangles). On the other hand, the p -adaptation variant keeps the mesh and increases the polynomial approximation degrees. The p -adaptation is more efficient than the h -adaptation provided that the exact solution is sufficiently regular, cf. (12) and Figure 1, left. If the solution has a singularity, the rate of convergence corresponds to the solution regularity, cf. Figure 1, center and right.

Therefore, a natural way is to combine both approaches, which gives rise to hp -adaptation, [3, 4]. The idea is to estimate not only the error but also the local regularity of the solution. Based on the regularity estimate, we decided if the h - or p -adaptation is carried out. There exist many techniques for hp -adaptation; see survey [18]. Most of these techniques are based on estimate (12). In particular, let s_K be the (approximate) regularity of the exact solution on K ,

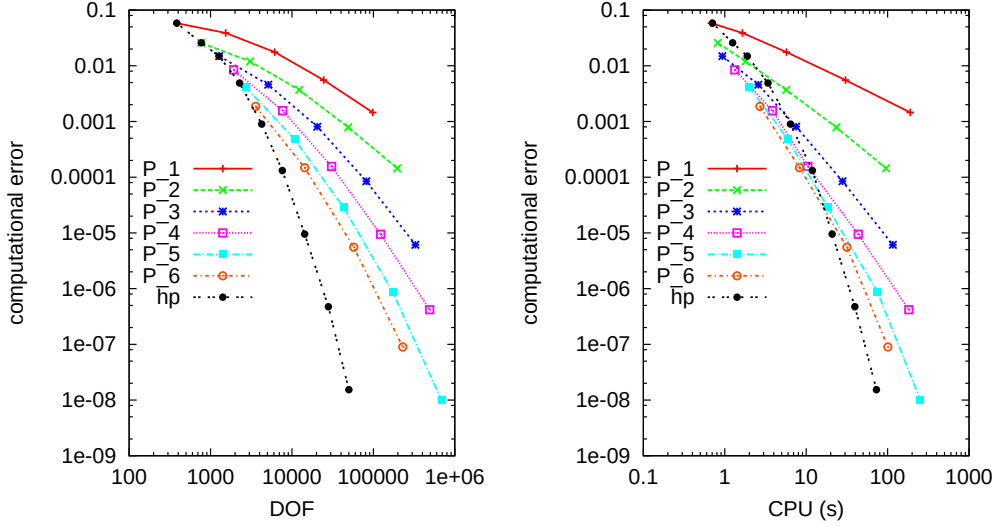


Fig. 2: Dependence of computational error with respect to number of degrees of freedom (left) and the computational time (right) for $p = 1, \dots, 6$ polynomial approximation and the hp -method.

that is, $u|_K \in H^{s_K}(K)$ then if $p_K \leq s_K$, the p -adaptation is applied, otherwise h -adaptation is carried out.

Theoretical and numerical results (e.g., [3, 4, 17, 19, 20]) show that hp -adaptivity can lead to an *exponential rate of the convergence* with respect to the *number of degrees of freedom* (DoF) in the sense that, in two dimensions,

$$\|\nabla(u - u_h)\| \approx C \exp\left(-b \text{DoF}^{1/3}\right), \quad (13)$$

where $C > 0$ and $b > 0$ are constants independent of DoF.

The efficiency of the hp -adaptive technique is demonstrated in Figure 2 showing the solution of a convection-diffusion equation in unit square with a singularity in the left bottom corner. We compare the calculations using h -adaptation having fixed polynomial degree $p = 1, \dots, 6$ with the calculations using hp -adaptation. Namely, we present the convergence of the error with respect to the number of degrees of freedom and the computational time. The dominance of hp -method is obvious. Moreover, Figure 3 shows the hp -mesh and the comparison of the approximate and exact solutions after 3 and 11 mesh adaptation loops. We observe a strong h -refinement close to the singularity corner, whereas p -adaptation is carried out in the rest of the computational domain.

3.3 Anisotropic hp -mesh adaptation

Although the techniques combining h and p refinement (cf. Section 3.2) are efficient for many cases, they are not optimal for problems containing line singularities, e.g., interior and boundary layers, material interfaces, etc. Furthermore, the hp -decision criterion based on (12) need not be optimal since the formula concerns the asymptotic limit. In particular, there exist other techniques that achieve the same accuracy using a smaller number of degrees of freedom. We call this approach the *anisotropic hp -mesh adaptation* (hp -AMA) since generate meshes consisting of anisotropic elements (i.e., long and thin). For a survey, we refer to [14].

The idea of hp -AMA is to modify the size, shape, and orientation of triangular elements such that the interpolation error is under the tolerance ω and the number of degrees of freedom

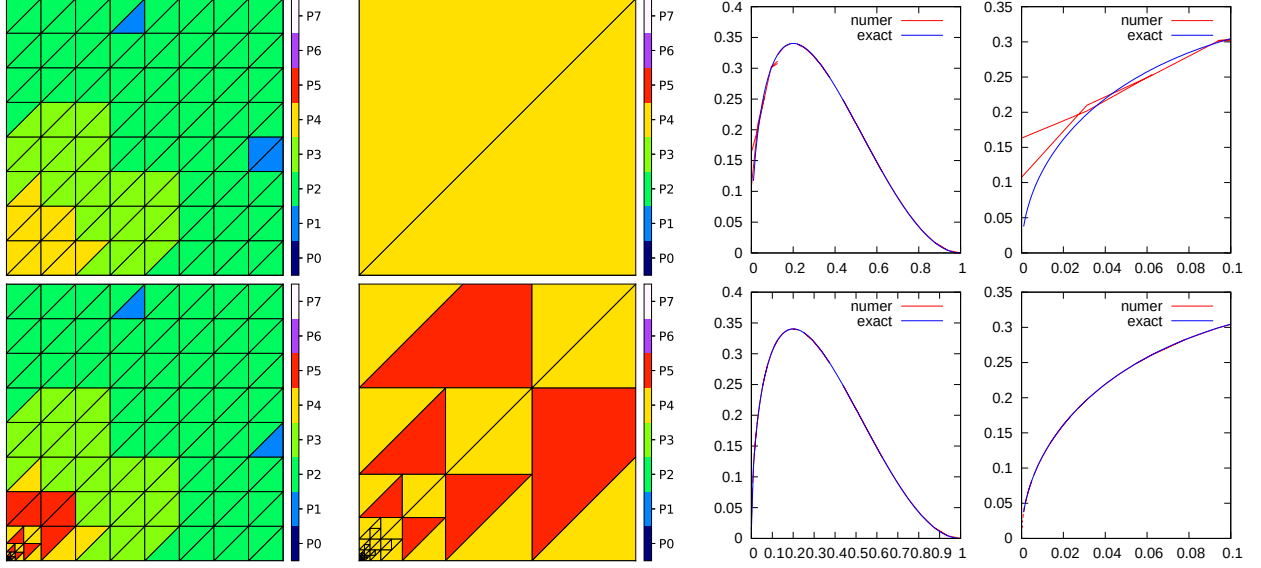


Fig. 3: The performance of hp -adaptation, the hp -mesh (left), its detail near the singularity (second column), the approximate solution along the diagonal cut (third column) and its detail (right); results after 3 (top) and 11 (bottom) loops of mesh adaptation.

is minimal. Additionally, in each adaptive loop, we admit an increase or decrease in the degree of the polynomial p_K by 1 for each element $K \in \mathcal{T}_h$ so that the interpolation error is kept and the number of degrees of freedom is smaller.

Let $K \in \mathcal{T}_h^k$ and p_K be the corresponding polynomial approximation degree. In step (S4) of the Mesh adaptive algorithm, we construct a higher-order approximation $u_K^+ \in P_{p_K+2}(K)$ and put $\tilde{e}_K^j := u_K^+ - \Pi_{p_K+j} u_h|_K$, $j = -1, 0, 1$, $K \in \mathcal{T}_h^k$, where Π_{p_K+j} is the L^2 projection in the space of polynomials of degree $P_{p_K+j}(K)$. Since $\tilde{e}_K^j$ are polynomial functions, they can be extended outside of K . Then the following substeps of step (S6) are performed for each $K \in \mathcal{T}_h^k$ separately.

hp -AMA algorithm

- (S6a) set a new element K' having the same shape and barycenter as K such that $\|\tilde{e}_K^0\|_{X(K)} = \omega/N_k$, where N_k is the number of elements of $\mathcal{T}_h^k$, i.e., the so-called equi-distribution of the error estimate,
- (S6b) fix the area $|K'|$ of the element K' from previous step, define elements K'_j , $j = -1, 0, 1$, having the size

$$|K'_j| = |K'| \frac{(p_K + 1 + j)(p_K + 2 + j)}{(p_K + 1)(p_K + 2)}, \quad j = -1, 0, 1, \quad (14)$$

which guarantees that density of the degrees of freedom is the same for all polynomial degrees candidates $p_K + j$, $j = -1, 0, 1$, elements K'_j , $j = -1, 0, 1$ have the same barycenter as K' ,

- (S6c) modify the shape and orientation of elements K'_j by minimizing the value of $\|\tilde{e}_K^j\|_{X(K)}$, $j = -1, 0, 1$,
- (S6d) select $\bar{j} \in \{-1, 0, 1\}$ such that $\tilde{e}_K^{\bar{j}}$ is the smallest one and set the new polynomial degree $p_K + \bar{j}$ and element size, shape and orientation as $K'_{\bar{j}}$.

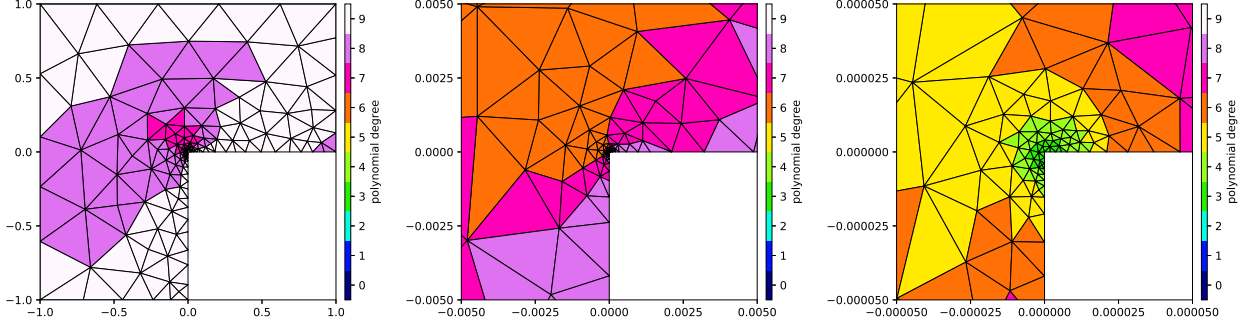


Fig. 4: The meshes together with polynomial approximation degrees generated by *hp*-AMA algorithm; total view (left) and zooms 200 (center) and 20 000 (right).

This algorithm optimizes each element separately; the final mesh is then constructed iteratively by an optimization process; see [14].

Figure 4 shows the possible output of *hp*-AMA algorithm, where we present a numerical solution of a quasi-linear elliptic problem in the L-shape domain. This problem possesses a singularity in the interior corner. We present the final *hp*-mesh together with its zooms near the singularity corner. We observe large elements with high degrees outside the corner and a very strong *h*-refinement with low degrees in the vicinity of the interior corner. We note that weak solution satisfies $u \in H^1(\Omega)$ but $u \notin H^2(\Omega)$, hence (12) implies the optimal polynomial degrees $p = 1$. However, we observe $p = 3$ in our case which is in agreement with [11].

4 Numerical experiments

Finally, we present a numerical example that represents a more complicated, practically motivated problem. It comes from [16], see also [12] where the magnetic state in the cross section of an alternator was solved numerically. Due to symmetry, only one quarter of the alternator is taken as the computational domain $\Omega := \Omega_s \cup \Omega_r \cup \Omega_a$; see Figure 5, left, where the geometry of the domain is shown. The alternator consists of the stator (Ω_s) and the rotor (Ω_r) with a gap filled with air (Ω_a).

We consider the Maxwell equations for the stationary magnetic field in the form

$$\operatorname{rot} H = f \quad \text{in } \Omega, \quad (15a)$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (15b)$$

where $H = (H_1, H_2)$ is the magnetic intensity field, $B = (B_1, B_2)$ is the magnetic induction field and f is the current density (its component perpendicular to the plane of the computational domain). The differential operators appearing in (15) are given by $\operatorname{rot} H = (\partial H_2 / \partial x_1, \partial H_1 / \partial x_2)$ and $\operatorname{div} B = \nabla \cdot B = \partial B_1 / \partial x_1 + \partial B_2 / \partial x_2$ in two space dimensions.

Moreover, we consider the constitutive relation

$$H(x) = \nu(x, |B(x)|^2)B(x), \quad x \in \Omega, \quad (16)$$

where

$$\nu(x, r) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_0} & \text{for } x \in \Omega_a, \\ \frac{1}{\mu_0} \left(\alpha + (1 - \alpha) \frac{r^4}{\beta + r^4} \right) & \text{for } x \in \Omega_s \cup \Omega_r. \end{cases} \quad (17)$$

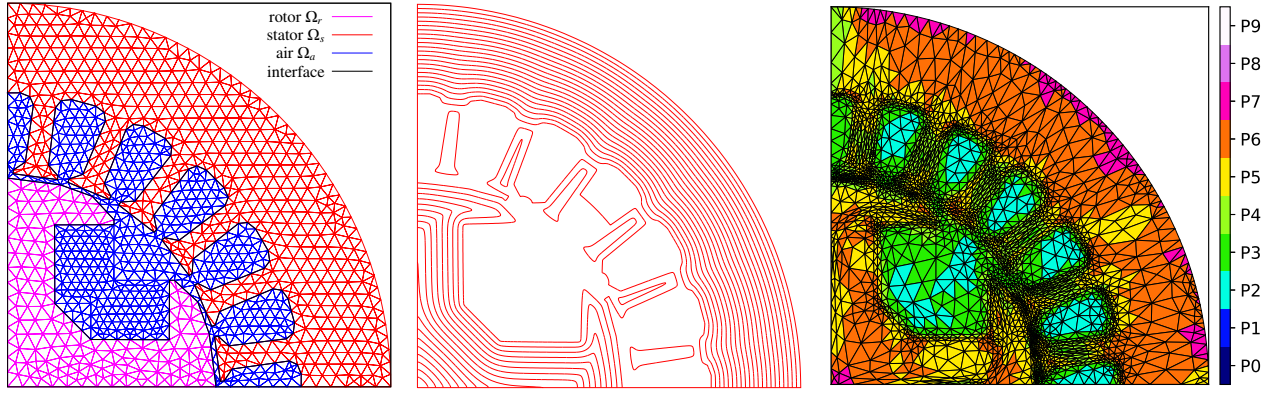


Fig. 5: Alternator, the computational domain with its components together with the initial mesh (left), the isolines of the magnetic potential (center), and the final hp -mesh after adaptive refinement (right).

The symbol $\mu_0 = 1.256 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$ denotes the permeability of the vacuum and the material coefficients are $\alpha = 0.0003$, $\beta = 16000$ according to [16]. We consider the constant current density $f = 5 \times 10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$.

Assuming that there exists a potential $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$B = \text{curl } u = (\partial u / \partial x_2, -\partial u / \partial x_1), \quad (18)$$

equation (15b) is satisfied directly. Obviously, $|B| = |\nabla u|$ and, therefore, (15a) together with (16) gives

$$\begin{aligned} f &= \text{rot } H = \text{rot} \left(\nu(x, |B(x)|^2) B(x) \right) = \text{rot} \left(\nu(x, |\nabla u(x)|^2) \text{curl } u(x) \right) \\ &= -\nabla \cdot \left(\nu(x, |\nabla u(x)|^2) \nabla u \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Consequently, we have the following problem. Find $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$-\nabla \cdot \left(\nu(x, |\nabla u(x)|^2) \nabla u \right) = f \quad \text{in } \Omega. \quad (20)$$

The homogeneous Dirichlet boundary condition is prescribed on the curved part of the boundary, where the iso-parametric approximation coming from [24] is employed. On the rest of boundary, we consider the homogeneous Neumann boundary condition. Figure 5, center, shows the corresponding isolines of magnetic potential u . Finally, Figure 5, right, shows the hp -mesh obtained by hp -AMA algorithm. Obviously, a high resolution along the material interfaces is observed.

5 Conclusion

We presented the role of the adaptive mesh algorithms for the numerical solution of partial differential equations using finite element methods. In particular, the anisotropic hp -mesh adaptation approach offers enough flexibility in minimizing the number of degrees of freedom necessary to achieve the given error tolerance.

References

- [1] *R. A. Adams, J. J. F. Fournier*: Sobolev Spaces, Academic Press, 2003.
- [2] *M. Ainsworth, J. T. Oden*: Posteriori error estimation in finite element analysis, Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000.
- [3] *I. Babuška, M. Suri*: The hp -version of the finite element method with quasiuniform meshes, *M²AN Math. Model. Numer. Anal.* **21** (1987), 199–238.
- [4] *I. Babuška, M. Suri*: The p - and hp - versions of the finite element method. An overview, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **80** (1990), 5–26.
- [5] *I. Babuška, M. Suri*: The p - and hp -FEM a survey, *SIAM Review*, **36** (1994), 578–632.
- [6] *I. Babuška, M. Zlámal*: Nonconforming elements in the finite element method with penalty, *SIAM J. Numer. Anal.* **10** (1973), 863–875.
- [7] *W. Bangerth, R. Rannacher*: Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, 2003.
- [8] *J. H. Bramble, M. Zlámal*: Triangular elements in the finite element method, *Mathematics of Computation* **24** (112) (1970), 809–820.
- [9] *S. C. Brenner and R. L. Scott*: The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Springer, New York, 1994.
- [10] *P. G. Ciarlet*: The Finite Elements Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1979.
- [11] *L. Demkowicz, W. Rachowicz, Ph. Devloo*: A fully automatic hp -adaptivity, *J. Sci. Comput.* **17** (1–4) (2002), 117–142.
- [12] *V. Dolejší, S. Congreve*: Goal-oriented error analysis of iterative Galerkin discretizations for nonlinear problems including linearization and algebraic errors, *J. Comput. Appl. Math.* **427** (2023), 115–134.
- [13] *V. Dolejší, M. Feistauer*: Discontinuous Galerkin Method – Analysis and Applications to Compressible Flow, Springer Series in Computational Mathematics 48. Springer, Cham, 2015.
- [14] *V. Dolejší, G. May*: Anisotropic hp -Mesh Adaptation Methods, Birkhäuser, 2022.
- [15] *A. Ern, J.-L. Guermond*: Theory and Practice of Finite Elements, Springer, 2004.
- [16] *R. Glowinski, A. Marrocco*: Analyse numérique du champ magnetique d’un alternateur par elements finis et sur-relaxation ponctuelle non lineaire, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **3** (1974), 55–85.
- [17] *J. M. Melenk*: hp -finite element methods for singular perturbations, volume 1796 of *Lecture Notes in Mathematics* Springer-Verlag, Berlin, 2002.

- [18] *W. F. Mitchell, M. A. McClain*: A comparison of *hp*-adaptive strategies for elliptic partial differential equations, *ACM Trans. Math. Software* **41** (2014), 1, 2–39.
- [19] *C. Schwab*: *p*- and *hp*-Finite Element Methods, Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [20] *P. Šolín*: *Partial Differential Equations and the Finite Element Method*, Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, New York, 2004.
- [21] *P. Šolín, L. Demkowicz*: Goal-oriented *hp*-adaptivity for elliptic problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **193** (2004), 449–468.
- [22] *R. Verfürth*: *Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, 2013.
- [23] *M. Zlámal*: On the finite element method, *Numerische Mathematik*, **12** (1968), 5, 394–409.
- [24] *M. Zlámal*: The finite element method in domains with curved boundaries, *Internat. J. Numer. Methods in Eng.* **5** (1973), 3, 367–373.

Vít Dolejší is a professor at Department of Numerical Mathematics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague, Sokolovská, 180 Praha-8, Czech Republic, e-mail: `vit.dolejsi@matfyz.cuni.cz`.

Acknowledgement: The author acknowledges the membership in the Nečas Center for Mathematical Modeling, `ncmm.karlin.mff.cuni.cz`.

From HPC to Quantum at IT4Innovations

TOMÁŠ KOZUBEK

Abstract: This paper surveys the computing continuum at IT4Innovations (IT4I) from petascale supercomputers (Karolina, Barbora/Barbora NG) and pilot platforms to visualisation VR/labs and the VLQ quantum computer together with user access schemes, training programmes, and applied research outputs. It outlines the centre’s role in the Czech e-infrastructure (e-INFRA CZ), its participation in the EuroHPC ecosystem (including LUMI and forthcoming AI-capable services), and the integration path for hybrid HPC–QC workflows. We summarise representative user impacts across academia, industry, and public administration; describe service routes (Open Access, institutional/community, fast-track, industrial cooperation); and highlight recent project results (LEXIS platform, HEAppE, HyperQueue, MERIC, ESPRESO, Floreon+), illustrating how platform engineering and methodology transfer accelerate uptake and readiness for next-generation systems. Finally, we position Europe’s HPC landscape relative to the United States and outline near-term directions: commissioning Barbora NG, scaling AI-ready services thanks to LUMI AI Factory, and operationalising VLQ within EuroHPC federated workflows.

Keywords: High-performance computing, supercomputing, hybrid HPC–QC, quantum computing, scientific workflows, EuroHPC.

AMS classification: 65Y05, 65Y10, 68Q12.

1 Introduction to IT4Innovations

IT4Innovations is the Czech Republic’s national centre for high-performance computing (HPC), high-performance data analytics (HPDA), artificial intelligence (AI), and quantum computing (QC). Based at VSB – Technical University of Ostrava, our mission is to deliver cutting-edge computing capabilities and expert support to academia, industry, and the public sector. We operate the most powerful supercomputers in the country and actively contribute to the European HPC ecosystem through the EuroHPC Joint Undertaking (EuroHPC JU), Centres of Excellence, and pan-European collaborations. Alongside operations, we conduct our own research in algorithms, software, workflows, energy-efficient infrastructure, and hybrid HPC–QC methods, and we run a comprehensive training programme serving thousands of users. For more details, see [1].

2 IT4Innovations supercomputing infrastructure

In its second role as a member of e-INFRA CZ, IT4Innovations co-delivers the Czech Republic’s integrated e-infrastructure linking national supercomputing, quantum computing, and AI technologies with shared data services, identity and access management, and high-speed networking (with CESNET and CERIT-SC) to provide end-to-end digital support for research and innovation.

Karolina

Karolina is a petascale¹ system acquired under the EuroHPC Joint Undertaking and put into operation in the summer of 2021. It delivers a theoretical peak performance of 15.7 PF and

¹Prefix peta, abbr. P, means $(1024)^5 = 2^{50} \doteq 10^{15}$ and prefix exa, abbr. E, means $(1024)^6 = 2^{60} \doteq 10^{18}$.

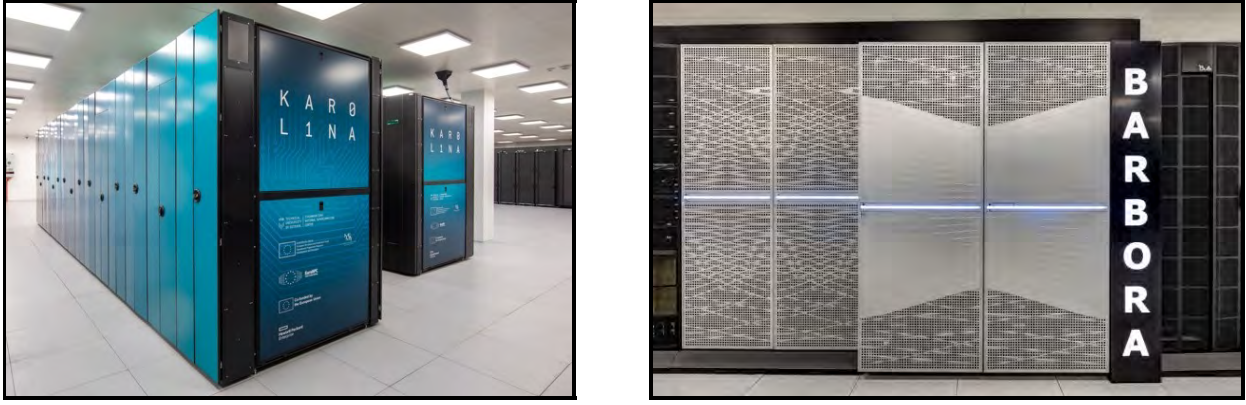


Fig. 1: Karolina and Barbora supercomputers at IT4Innovations

comprises CPU and GPU partitions connected by 200 Gb/s InfiniBand. The universal CPU part consists of approximately 720 dual-socket AMD nodes, while the accelerated part has 72 servers each equipped with 8 NVIDIA A100 GPUs (576 GPUs in total) for AI and HPC workloads. The platform also includes a large-memory node with up to 24 TB of shared memory, cloud/virtualisation nodes, and a high-throughput storage with ~ 1.4 PB of user space and 1 TB/s speed. Karolina is tightly integrated with our software environment, documentation, and user support services.

Barbora and Barbora NG

Barbora is a Bull Sequana XH2000-based cluster installed in autumn 2019 with a theoretical peak performance of 849 TFlop/s. Its core configuration includes 192 CPU only Intel nodes for general purpose HPC and 8 GPU nodes, each with $4 \times$ NVIDIA Tesla V100-SXM2 accelerators; it is complemented by a 6 TB large memory (“fat”) node and two visualisation nodes. The system uses a 100 Gb/s InfiniBand interconnect and is fully integrated with the centre’s shared storage and services. Barbora NG is currently being installed and scheduled to enter production by the end of 2025.

LUMI

The LUMI supercomputer (HPE Cray EX) in Kajaani, Finland, is one of Europe’s most powerful systems, with a theoretical peak of 531.5 PF and currently ranked 9th on the TOP500 list. Its GPU partition (LUMI-G) comprises 2978 nodes with four AMD Instinct MI250X GPUs per node; the CPU partition (LUMI-C) provides 2048 dual-socket AMD EPYC nodes for general-purpose simulation. The platform is tied together by the HPE Slingshot 200 Gbit/s network and a tiered storage system (8 PB all-flash, 80 PB disk Lustre, and ~ 30 PB Ceph for project data). Through IT4Innovations’ membership in the LUMI consortium, Czech academic users can apply for LUMI resources via IT4I Open Access calls; IT4I contributes to operation and user support (LUST) and develops tooling such as HyperQueue to help users exploit the system effectively. Together with Karolina and Barbora, these systems provide balanced capacity for throughput-oriented and tightly coupled parallel jobs, as well as GPU-accelerated AI pipelines.

Complementary systems

Besides Karolina and Barbora, we run a small set of pilot platforms that let users try out new or less common architectures and programming models. They help test and port applications for

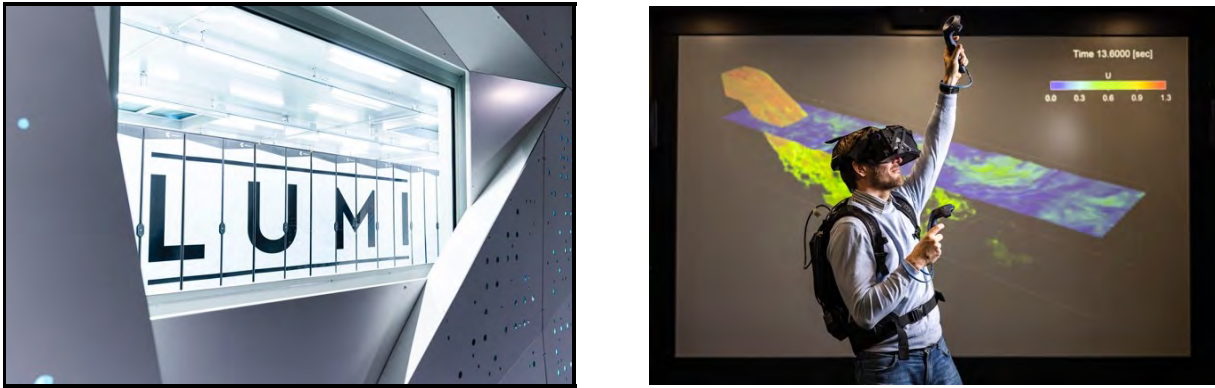


Fig. 2: LUMI and visualisation and virtual reality labs at IT4Innovations.

future EuroHPC systems. Current examples include Arm A64FX nodes, FPGA-based servers, and an NVIDIA Grace CPU Superchip server. These platforms complement the production clusters and are used mainly for method development, training, and early industrial prototyping.

Visualisation and Virtual Reality Labs

Our labs enable large scale 3D projection and immersive VR to turn complex simulations into clear, interactive experiences. Technical equipment includes a rear projection 3D wall with a professional 4K laser BARCO projector, active stereo viewing and a 5.1 surround audio system, linked to the data room via a 100 Gbit line for remote rendering. The VR Lab features different headsets with a wearable backpack PC with Lighthouse tracking in a collaborative area (up to four users). Both labs are powered by professional visualisation servers connected to our supercomputers to render large simulation datasets at high quality.

Networking and storage

All major clusters are connected via high-speed InfiniBand fabrics (200 Gb/s class) and supported by high-throughput parallel storage with multi-tier scratch and project spaces, ensuring predictable I/O performance for both compute- and data-intensive workloads. The central, supercomputer-independent PROJECT Data Storage has been in operation since March 2021 to store and back up data produced on IT4I systems. It currently provides 15 PB of capacity with high throughput and a default project space quota of 20 TB.

3 Who our users are and what they do

Academic research

From 2013, more than 2 500 projects of users from research organisations used IT4Innovations resources across astrophysics, engineering, informatics, earth sciences, life sciences and materials science. Most access is provided through our Open Access Grant Competitions, with many teams now combining large-scale simulation and modern AI methods.

Industry and public sector

Companies and public institutions use our supercomputers for digital prototyping and design, advanced data analytics and AI, rendering and visualisation, cybersecurity, and decision support in areas such as environment and crisis management. Engagements range from open calls to collaborative R&D and contract services.



Fig. 3: Example application domains across academia, industry, and the public sector.

Representative outcomes

Recent Open Access projects illustrate the breadth of work: atomistic simulations of ribosomal tunnels relevant to antibiotic discovery, AI-assisted virtual screening for new drugs, advanced speaker recognition in challenging acoustic conditions, laser-driven particle acceleration models, and video-language models that understand long videos. These examples sit alongside long-standing strengths in engineering, astrophysics simulations, and environmental modelling.

4 How to obtain computing resources

IT4Innovations allocates computing resources through several routes. The *Open Access Grant Competition* runs three times a year (February, June, October) for employees of Czech research organisations, with allocations for 12, 24 or 36 months and decisions within 55 days of the cut-off. For specific needs, there is *Institutional & Community Access* (12–36 months) and a *Fast Track* scheme for short tasks and preparation, with decisions within seven working days.

Czech users can also reach LUMI via IT4I Open Access and apply directly to EuroHPC JU calls (Benchmark, Development, Regular, Extreme Scale, and AI-oriented modes).

Industry partners may use *Rental of computational resources* or *Contract Research*, while *Teaching/Education* and *Important Societal Challenges* are supported under thematic access.

5 Training and education activities

IT4Innovations delivers a year-round programme of courses, hands-on workshops, and bespoke onboarding for academia, public institutions, and industry. The curriculum spans HPC fundamentals, parallel programming and performance engineering, GPU acceleration, data analytics and AI workflows, remote visualisation, and introductory quantum computing helping teams progress rapidly from first contact to production readiness. Each year, we deliver around 30 training events; in 2024, we organised 38 events attended by 886 participants (in person and online).

IT4I also contributes to European education initiatives in HPC/QC/AI, notably EUMaster4HPC – led by the University of Luxembourg and delivered by a consortium of

universities, supercomputing centres, industry and other partners. The programme has launched Master’s tracks at eight awarding universities such as the University of Luxembourg, Universitat Politècnica de Catalunya, Politecnico di Milano, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Sorbonne Université Paris, and KTH Royal Institute of Technology Stockholm with more participants, including VSB-TUO, expected.

In parallel, *EVITA* defines a competency framework (profiles and a skills tree), turns it into modules and courses, funds high-quality training via open calls with cascading funding, and provides an online platform with certifications, learner materials and trainer tools. Together, these efforts build a connected community of students, educators and industry experts with top-tier HPC/AI/QC skills and accelerate the uptake of advanced computing across Europe.

6 IT4Innovations’ own research

IT4Innovations’ standout recent results span software, middleware, applied AI and domain demonstrators: the *LEXIS platform* that enables seamless federated HPC-cloud workflows and will be used to federate EuroHPC supercomputers, quantum computers, and AI Factories; *HyperQueue*, a metascheduler that raises cluster utilisation for heterogeneous jobs; and *HEAppE*, an HPC-as-a-Service gateway that broadens access for SMEs and non-specialists.

Complementing these are methodological advances — *MERIC* for runtime energy optimisation, the *CyclesPhi* multi-GPU renderer and the Highly Parallel Framework for Engineering Applications *ESPRESSO* that enable very large engineering and rendering workloads—and applied platforms such as HPC-backed crisis-management platform *Floreon+* and an *AI voicebot for emergency calls*, which demonstrate clear societal impact.

Earth-observation AI platforms developed with European Space Agency, and a set of performance and I/O libraries and tools used across EU projects and pre-/exascale testbeds, together improve portability, efficiency and readiness for next-generation systems.

IT4Innovations’ recent project portfolio concentrates on extreme-scale data and AI platforms, national e-infrastructure, skills development, and domain demonstrators. Highlights include coordination of the Horizon project *EXA4MIND* (2023–2025) for automated data management and staging across EU supercomputers; *CLARA* (2024–2030), a Horizon Europe Centre of Excellence for Artificial Intelligence and Quantum Computing in System Brain Research; *EuroCC 2* (2023–2025) as the Czech National Competence Centre for HPC; EOSC-CZ (2023–2028) to build the national node of the European Open Science Cloud; membership in the *MaX* Centre of Excellence in Materials Design at the Exascale; and the *e-INFRA CZ* large research infrastructure of the Czech Republic (2023–2026).

The newest Horizon projects span the *LUMI AI Factory Service Center* (2025–2028), *EVITA* — EuroHPC Virtual Training Academy (2025–2029), *DARE SGA1* for RISC-V chiplets (2025–2028), *SEANERGYS* for developing a nextgeneration software solution for the energy-efficient operation of EuroHPC supercomputers and *TerraDT* (2025–2028) for Earth-system digital twins, alongside applied industrial R&D (aerospace optimisation, pumps prototyping and pharma production monitoring). These activities complement our applied research in scalable algorithms, workflow and platform engineering, hybrid HPC–AI methods and early quantum applications with outcomes routinely transferred into user support and training.

7 IT4Innovations in the European context

While the United States currently operates the largest exascale-class systems, Europe fields a diversified portfolio of pre- and exascale machines—such as LUMI (FI), Leonardo (IT), MareNostrum 5 (ES) and the modular JUPITER system (DE) — that together provide continent-wide



Fig. 4: European projects and partnerships.

capacity for simulation, data analytics and AI training/inference. A hallmark of the European approach is efficiency: many EuroHPC systems run on renewable power with heat reuse and regularly rank among the most energy-efficient globally. Europe is also investing in AI-capable HPC through initiatives like AI Factories, AI-optimised supercomputers with large-memory nodes to support foundation-model workloads and hybrid workflows.

Strategically, EuroHPC couples infrastructure with software, skills and open-access schemes (Benchmark, Development, Regular and Extreme Scale), narrowing the capability gap even if the very top of the TOP500 remains US-dominated. For Czech users, this translates into practical routes to world-class capacity via IT4Innovations: national Open Access allocations, coordinated access to EuroHPC systems and expert onboarding, optimisation and workflow support—enabling competitive participation in large-scale science and industry and portability across Karolina, LUMI, Leonardo and other partner systems.

IT4Innovations participates in or is a member of major European infrastructures, initiatives, and organisations related to HPC, QC, DATA and AI: the *EuroHPC JU* — European High-Performance Computing Joint Undertaking, *PRACE* — Partnership for Advanced Computing in Europe, *BDVA* — Big Data Value Association, *ETP4HPC* — European Technology Platform for HPC, *EUDAT CDI* — EUDAT Collaborative Data Infrastructure, *EOSC* — European Open Science Cloud, *I4MS* — Innovation for Manufacturing SMEs, *VI-HPS* — Virtual Institute-High Productivity Supercomputing, *iRODS* — Integrated Rule-Oriented Data System, and *WHPC* — Women in HPC.

IT4Innovations also succeeded as a member of the consortium led by the Finnish centre CSC-IT with the tender to build the Federation Platform for the *EuroHPC JU*. Components of IT4Innovations' *LEXIS* Platform and HEAppE Middleware are key tools for the delivery and operation of this platform aimed at the seamless federation of the EuroHPC supercomputing and quantum systems, AI factories and the interconnected data infrastructure.



Fig. 5: VLQ quantum computer, its cryostat and quantum chip.

8 The VLQ quantum computer and its near term uses

VLQ is the LUMI-Q consortium’s quantum computer hosted at IT4Innovations in Ostrava. It is a superconducting system with 24 physical qubits arranged in a star-shaped topology with a central resonator, which reduces SWAP operations and enables deeper circuits. Installed and commissioned in 2025, supplied by IQM (total cost EUR 5 million), VLQ is being integrated with EuroHPC supercomputers—Karolina, LUMI and the Polish EuroHPC system—to support hybrid HPC–QC workflows. It will be available to European researchers, industry and the public sector for application pilots in optimisation, quantum chemistry and quantum-enhanced machine learning.

9 Concluding remarks

IT4Innovations offers an integrated continuum of advanced computing—petascale HPC, GPU-accelerated AI, complementary pilot platforms, visualisation/VR labs, and the VLQ quantum computer—backed by expert support, structured training, and active R&D. Through Open Access, thematic and fast-track schemes, coordinated EuroHPC pathways, Czech researchers and companies can reliably access continental capacity with onboarding and performance engineering that turn allocations into results. Looking ahead, we will expand hybrid HPC–QC workflows, scale AI-ready services and commission Barbora NG, Karolina NG, and CLARA testbed, strengthening Europe-wide collaboration and helping users deliver faster science, resilient engineering, and data-driven innovation.

References

- [1] IT4Innovations National Supercomputing Center, <https://www.it4i.cz/en>.

Tomáš Kozubek is the director of IT4Innovations National Supercomputing Center, VŠB—Technical University of Ostrava, 17. listopadu 2172/15 708 00 Ostrava-Poruba, Czech Republic, e-mail: tomas.kozubek@vsb.cz.

From direct solvers to hybrid TFETI domain decomposition for solving huge 3D elastic problems

ZDENĚK DOSTÁL

Abstract: We first recall solving systems of equations discretized by FEM in Prof. Zlámal's times and the two most powerful modern iterative methods – multigrid and FETI domain decomposition. The core of this paper is the presentation of the massively parallel hybrid TFETI method and experiments showing the power and a large scope of scalability of hybrid TFETI.

Keywords: Schur complement; bounds on spectrum; hybrid FETI.

AMS classification: Primary 15A42; Secondary 65N55.

1 Solving FEM equations in Zlámal's time

When Prof. Zlámal submitted his seminal paper [18] on the approximation theory of the solution of boundary value problems by the finite element method (FEM), the finite element method was a well-established tool for the practical discretization of PDE arising from engineering problems [17]. The method was also well known in Brno, where Prof. J. Kratochvíl from the Faculty of Civil Engineering of VUT Brno used it to assess the stability of dams. Just Prof. Kratochvíl drew Zlámal's interest in the finite element method, which was not supported by any convergence theory at that time.

Zlámal limited his research in PDE to the study of approximation properties of FEM discretization. In the '60s, the solution of the discretized systems was possible only for small systems that standard direct solvers could solve, optionally exploiting the sparsity pattern of their matrices. The limited memory and processor's speed enabled the solution of systems with just a few hundreds or thousands of variables by direct methods. I heard about the statement attributed to Zlámal that he did not believe in the solution of a system with more than two thousand unknowns. A colleague later confirmed that he had heard the statement with the updated limit of seven thousand unknowns, which enables solving realistic 2D elastic problems.

Understanding approximation errors was necessary for the reliable approximation of realistic problems by coarse grids. The approximation theory was essential to answer the question often asked by Prof. Babuška: Would you sign under your results?

2 Multigrid

Computer performance improved in the early 70s with faster computers equipped with larger internal and faster external memory. Technological progress opened the way to implementing iterative methods. Still I was shocked when I learned from Doc. P. Janas about the code he developed with Prof. Z. Weiss in the early '70s. The two engineers used the code on IBM370 to solve 3D elastic problems discretized by 50,000 unknowns in less than 50 minutes. Even though the precision of their solution was low, the result was surprising and helpful in assessing the stability of underground openings. Our discussion took place on a trolley bus, and we closed our discussion only after observing that we should have left at one of the previous stops.

Prof. Marek later identified their method as a variant of the two-level *multigrid method*. Unfortunately, they have never published their results. Multigrid was proposed in 1962 (see Fedorenko [9]), but the result had to wait for practical applications till the '70s. Multigrid uses the discretization of the problem by several grids and the operators that transfer the solution from the coarser grid to the finer one and vice versa. The basic idea of multigrid is to accelerate the solution of discretized problems by combining solutions at different scales (or grid levels). Instead of solving the problem directly on a fine grid, multigrid methods exploit coarser grids to eliminate “smooth” errors on the nearest finer grid and use the resulting preconditioning effect to speed up the finer grid solution. The problems on the coarsest grid are often solved by a direct method.

Multigrid enjoys *asymptotically linear complexity* and is widely used for solving huge engineering problems. Multigrid was used for solving huge problems. In Mohr et al. [14], the authors describe the modeling of the dynamics of the Earth’s mantle. The discretization of the problem resulted in the system of linear equations with 1.1×10^{13} unknowns. The solution required nine iterations executed on the Peta-Scale machines with 327 680 cores in 776.09 seconds.

3 FETI and BETI methods

The *FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting)* methods introduced by Farhat and Roux [8] is a powerful tool for the parallel solution of large discretized partial differential equations. The basic idea is to decompose the domain into subdomains, interconnect them by Lagrange multipliers, and eliminate the primal variables to get a smaller, better-conditioned dual problem. The elimination of primal variables amounts to the solution of local problems defined separately for each subdomain. These local problems can be solved in parallel by direct methods. After Farhat, Mandel, and Roux [7] proved that the condition number of the dual stiffness matrix is uniformly bounded on the subspace defined by the kernels of subdomain stiffness matrices, FETI became one of the most successful theoretically supported scalable and massively parallel solver for elliptic PDE. The subspace is also called the natural coarse grid. More on FETI and other domain decomposition methods can be found, e.g., in Tosseli and Widlund [15]. The performance of the FETI method can be further improved by preconditioning.

Alternatively, we can use singular solutions, provided they are available, to eliminate the subdomains’ interior unknowns from continuous problem. This approach results in higher precision of the solution at the cost of more laborious formulation and discretization. The basic idea is due to Langer and Steinbach [11] who called it *BETI (Boundary Element Tearing and Interconnecting)*. Though the technique is more complicated as compared with FETI, it reduces the discretization to the subdomains’ boundaries and, somewhat surprisingly, generates considerably better-conditioned Schur complements (i.e., discretized Poincaré-Steklov operator) and global systems (see Vodstrčil et al. [16]).

Since the duality transforms the linear inequality constraints describing the non-penetration in contact problem to the bound constraints, FETI and BETI can also solve large contact problems. In [3, Sect. 20.9], there is a solution to an academic contact problem discretized by 5.7×10^9 nodal variables and decomposed into 64,000 subdomains. The problem was solved on 1008 nodes of the Salomon computer after 149 matrix-vector multiplications that took 497 seconds.

4 Hybrid FETI and BETI methods

The dimension of the coarse problem limits the scope of parallel scalability of the original FETI. A direct solver typically solves the coarse problem with at least quadratic complexity – its cost is negligible for a small number of subdomains, but it dominates the computations when the number of subdomains is large, currently some tens of thousands of subdomains. To overcome the latter limitation, Klawonn et al. [10] used the idea of FETI-DP (dual–primal, see, e.g., Farhat, Lesoinne, and Pierson [6]) to enforce some constraints on the primal level by interconnecting the groups of subdomains into *clusters* as in Fig. 1. For example, the elastic bodies can be interconnected by enforcing the same rigid body modes of the interiors of adjacent faces.

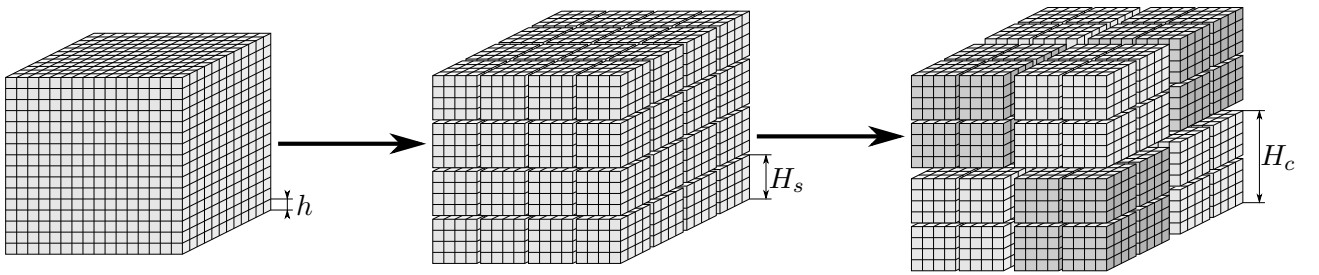


Fig. 1: Domain Ω decomposed into $4 \times 4 \times 4$ subdomains and $2 \times 2 \times 2$ clusters.

Thus, the defect of each cluster is the same as that of each of its subdomains. Klawonn and Rheinbach [12] proved the scalability of the resulting *hybrid FETI (H-FETI)* or *hybrid TFETI* in the context of preconditioned FETI methods.

However, H-TFETI is highly scalable even if it is preconditioned only by the coarse grid defined by the kernels of clusters [1]. The latter authors used a variant of FETI called *Total FETI (TFETI)*, which enforces the Dirichlet conditions by Lagrange multipliers [2] so that all subdomains are floating and their stiffness matrices have a priori known kernels. The methods that combine FETI-DP with TFETI are called H-TFETI-DP (hybrid TFETI-DP) or briefly H-TFETI. Notice that H-TFETI is a unique three-level domain decomposition method with the coarse grids split between primal and dual variables. We can apply the same procedure to the problem decomposed into subdomains and discretized by the boundary element method. The resulting method is called H-TBETI (hybrid TBETI), see Dostál et al. [5].

The parallel scalability of hybrid methods stems from a nice structure of the stiffness matrices of the clusters. Implementing the hybrid methods can exploit the node-core architecture of modern supercomputers. If the unknowns in clusters are properly ordered, we can partially block diagonal stiffness matrices of the clusters that are easy to decompose.

The condition number of a cluster defined on a fixed cube domain, decomposed into $m \times m \times m$ subdomains interconnected by the face's rigid body modes and discretized by a regular grid, increases proportionally to m . The estimates show that the cost of the coarse problem decreases with m^6 while the number of iterations increases only proportionally to $\sqrt{m}$. The theoretical results and numerical experiments indicate that H-TFETI is a competitive computational engine for solving huge elastic problems discretized by a sufficiently regular grid.

The results in Table 1 illustrate the performance of H-TFETI (see [1]). The number of subdomains and primal unknowns ranged from 729 to 110,592 and from 15,000,633 to 2,275,651,584,

respectively (see Table 1) The relative precision of the solution obtained by the conjugate gradient method was prescribed by $\varepsilon = 10^{-6}$. Similar results were obtained for the variational inequalities.

clusters	subdomains	unknowns	iter/time[sec]	iter/time[sec]	iter/time[sec]
			H-TFETI	TFETI	DirTFETI
27	729	15,000,633	89/27.7	60/17.3	20/40.0
343	9261	190,563,597	105/35.1	59/20.3	19/46.2
1000	27,000	555,579,000	104/35.2	na	na
2197	59,319	1,220,607,063	104/59.8	na	na
4096	110,592	2,275,651,584	104/58.7	na	na

Table 1: Billion clumped cube - unpreconditioned H-TFETI and TFETI, and TFETI with Dirichlet preconditioner (DirTFETI), times include initiation, $m = 3$.

It is also possible to treat the whole problem as one cluster to get FETI-DP method. The preconditioned variant of the FETI-DP algorithm was tested on a larger academic benchmark discretized by 8×10^8 to 2.2×10^{11} nodal variables with the number of clusters ranging from 64 to 17576. Using the standard Schur complement preconditioners, the numbers of iterations and the solution times ranged from 29 to 31 and 46.6s to 51.8s, respectively (see Říha et al. [13]).

References

- [1] Z. Dostál, T. Brzobohatý, O. Vlach, O. Meca, M. Sadowská: Hybrid TFETI domain decomposition with the clusters joined by faces' rigid modes for solving huge 3D elastic problems, *Comput Mech* **71** (2023), 333–347, <https://doi.org/10.1007/s00466-022-02242-2>.
- [2] Z. Dostál, D. Horák, R. Kučera.: Total FETI - an easier implementable variant of the FETI method for numerical solution of elliptic PDE, *Commun. Numer. Methods Eng.* **22** (2006), 1155–1162.
- [3] Z. Dostál, T. Kozubek, M. Sadowská, V. Vondrák: Scalable Algorithms for Contact Problems, 2nd edition, Birkhäuser, Cham (2023).
- [4] Z. Dostál, T. Kozubek, O. Vlach: Reorthogonalization based stiffness preconditioning in FETI algorithms with applications to variational inequalities, *Numer. Lin. Algebra and Appl.* **22** (2015), 6, 987–998.
- [5] Z. Dostál, M. Sadowská, D. Horák, J. Kružík: Hybrid TBETI domain decomposition for huge 2D scalar variational inequalities, *Int. J. Num. Methods in Eng.* **125** (2024), 24, e7597.
- [6] C. Farhat, M. Lesoinne, K. Pierson: A scalable dual-primal domain decomposition method, *Numer. Lin. Algebra and Appl.* **7** (2000), 7–8, 687–714.
- [7] C. Farhat, J. Mandel, F.-X. Roux: Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **115** (1994), 365–385.
- [8] C. Farhat, F.-X. Roux: A method of Finite Element Tearing and Interconnecting and its parallel solution algorithm, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **32** (1991), 1205–1227.

- [9] *R. P. Fedorenko*: A relaxation method for solving elliptic differential equations, USSR Comput. Math. Physics **1** (1962), 1092–1096.
- [10] *A. Klawonn, O. Rheinbach*: A hybrid approach to 3-level FETI, Proc. Appl. Math. Mech. **8** (2008), 10841–10843.
- [11] *U. Langer, O. Steinbach*: Boundary Element Tearing and Interconnecting Methods, Computing **71** (2003), 3, 205–228.
- [12] *A. Klawonn, O. Rheinbach*: Highly scalable parallel domain decomposition methods with an application to biomechanics, Z. Angew. Math. Mech. **90**, 1 (2010), 5–32.
- [13] *L. Říha, T. Brzobohatý, A. Markopoulos, O. Meca*: ESPRESSO, Highly Parallel Framework for Engineering Applications, [online]. <http://numbox.it4i.cz>.
- [14] *M. Mohr, U. Rüde, B. Wohlmuth, H.-P. Bunge*: Challenges for Mantle Convection Simulations at the Exa-Scale: Numerics, Algorithmics and Software, In P. Neittaanmäki and M.-L. Rantalainen (eds.), Impact of Scientific Computing on Science and Society, Computational Methods in Applied Sciences **58** (2023), <https://doi.org/10.1007/978-3-031-29082-4-4>.
- [15] *A. Toselli, O. B. Widlund*: Domain Decomposition Methods – Algorithms and Theory, Springer Series on Computational Mathematics 34, Springer, Berlin 2005.
- [16] *P. Vodstrčil, D. Lukáš, Z. Dostál, M. Sadowská, D. Horák, O. Vlach*: On favorable bounds on the spectrum of discretized Steklov-Poincaré operator and applications to domain decomposition methods in 2D, Computers & Math. with Appl. **167** (2024), 12–20.
- [17] *O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung*: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, 1967.
- [18] *M. Zlámal*: On the finite element method, Numer. Math. **12** (1968), 394–409.

Zdeněk Dostál is a professor at VSB Technical University of Ostrava, Faculty of Electrical Engineering and Computer Science, Department of Applied Mathematics, 17. listopadu 2172/15 708 00 Ostrava – Poruba, Czech Republic, e-mail: zdenek.dostal@vsb.cz.

Parallel implementation of immersed boundary adaptive FEM or how to avoid mesh generation in a mesh-based method

JAKUB ŠÍSTEK

Abstract: Finite element method (FEM) typically relies on computational meshes composed of elements forming a nonoverlapping partition of the computational domain. However, generating these meshes of sufficient quality can be challenging and time-consuming, especially for very complex geometries used, e.g. in 3D printing. As a potential remedy, ideas of the immersed boundary method have been incorporated into FEM. We present a parallel implementation of an immersed boundary adaptive FEM. In order to achieve sufficient resolution at the boundary, local mesh refinement driven towards boundary is used. For large meshes distributed over a large number of processors, the resulting systems have to be solved by parallel iterative solvers. We present the method and demonstrate its performance for a complex problem of linear elasticity with meshes refined adaptively towards the area with the largest stress for achieving better accuracy within these regions.

Keywords: immersed finite elements, adaptive mesh refinement, domain decomposition methods .

AMS classification: 65N50, 65N55, 65Y05

Introduction

Finite element method (FEM) relies on computational meshes. These are typically composed of elements forming a nonoverlapping partition of the computational domain. While the success and the wide adoption of FEM stems also from its flexibility to incorporate unstructured meshes for general geometries, mesh generation of high-quality meshes can be challenging and time-consuming, especially for very complex geometries used, e.g., in 3D printing.

A number of approaches have been developed to circumvent the need for generating body-fitted meshes. For example, this issue was the main motivation for developing isogeometric analysis (IGA) using as basis functions the same splines as used in computer-aided design (CAD) [1]. Rather different approach is based on the idea of embedding the computational domain into a larger, simpler domain with a simple, e.g., structured, grid. There are many flavours of adopting this idea in the context of FEM. The unfitted FEM [2], finite cell method [3], CutFEM [4], or shifted boundary methods [5] are examples of such approaches. While these methods share many building blocks, they are different in others. The main issues are related to imposing boundary conditions on the immersed boundary, numerical integration over elements intersected by the boundary, and stabilizing the basis functions that are not sufficiently supported within the domain.

In [6], we have presented the three-grid immersed FEM. The main idea of the method is to use three separate grids; one for representing the implicit geometry, which needs to be very

fine at the boundary and coarse elsewhere, the FE grid for approximating the solution, with refinement driven towards areas of large variations of the solution, and the quadrature grid for numerical integration, which is local to cut elements, and it uses only their part inside of the domain for accurate integration. Due to these different requirements, it is not possible to serve all these needs by a single grid.

A parallel implementation combining parallel adaptive mesh refinement (AMR) and iterative solution of the arising linear system using a nonoverlapping domain decomposition method was presented in [6]. A number of applications to large-scale Poisson problems on complex 3-D geometries were included in that paper. In this paper, we present an application of the method to linear elasticity problems using adaptive mesh refinement towards regions of high stress, demonstrating the versatility of the parallel AMR combined with immersed FEM and domain decomposition.

Three-grid immersed FEM for linear elasticity

We consider the following problem of linear elasticity in a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ with boundary $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. In the strong form, we seek the displacement vector $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfying

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}_N \quad \text{on } \Gamma_N, \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_D \quad \text{on } \Gamma_D, \quad (3)$$

where $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ is the body force vector, $\mathbf{n}$ is the outward vector of the unit normal, $\mathbf{g}_N$ and $\mathbf{g}_D$ are prescribed Neumann and Dirichlet data. The Cauchy stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ and the symmetric infinitesimal strain tensor $\boldsymbol{\epsilon}$ are defined as

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 2\mu\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + \lambda\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}))\mathbf{I}, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T), \quad (5)$$

with Lamé parameters μ and λ , and the identity tensor $\mathbf{I}$.

Let us now turn our attention to deriving the weak formulation. Unlike as in the standard FEM, in the current setting, Dirichlet boundary conditions cannot be directly incorporated into the definition of the function spaces for approximating the solution and test functions. Instead, a suitable weak formulation of the boundary conditions has to be considered.

When we multiply 1 by a vector test function $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3$, integrate over Ω , and apply the divergence theorem, we arrive at the following weak formulation. Seek $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^3$ such that

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_{\Gamma_D} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\Gamma = l(\mathbf{v}) \quad (6)$$

where the bilinear form $a(\cdot, \cdot)$ and the linear form $l(\cdot)$ are defined as

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} 2\mu\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) + \lambda\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}))\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}))d\Omega, \quad (7)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_N \cdot \mathbf{v} d\Gamma. \quad (8)$$

Now we need to take the Dirichlet boundary condition 3 into account. To this end, we employ the (symmetric) Nitsche method [7]. It provides a way to enforce the boundary condition 3 weakly by adding suitable terms to the variational formulation 6.

We begin with multiplying the boundary condition $\mathbf{u} - \mathbf{g}_D = \mathbf{0}$ by a specially chosen test function

$$\mathbf{w} = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \gamma \mathbf{v}, \quad (9)$$

followed by integrating over Γ_D . Here γ is a suitably chosen penalty parameter. Finally, we add the derived weak formulation of the Dirichlet boundary condition

$$\int_{\Gamma_D} (\mathbf{u} - \mathbf{g}_D) \cdot \mathbf{w} d\Gamma = 0 \quad (10)$$

to 6 and obtain the Nitsche's weak formulation of the linear elasticity problem:

Find $\mathbf{u}_h \in V_h$ such that

$$A_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = L_h(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad (11)$$

where V_h is the finite element space (e.g., piecewise polynomials on the background grid) without essential boundary constraints, and $A_h(\cdot, \cdot)$ and $L_h(\cdot)$ are defined as

$$A_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_{\Gamma_D} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\Gamma - \int_{\Gamma_D} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \gamma \int_{\Gamma_D} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Gamma, \quad (12)$$

$$L_h(\mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) - \int_{\Gamma_D} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{g}_D d\Gamma + \gamma \int_{\Gamma_D} \mathbf{g}_D \cdot \mathbf{v} d\Gamma. \quad (13)$$

The term scaled by γ ensures stability for a sufficiently large penalty parameter γ . Typically, $\gamma = \gamma_0/h_f$, where h_f is the characteristic finite element size.

In the three-grid immersed FEM, the solution is approximated on the FE grid obtained by the following procedure. First, the geometry of interest is enclosed into a cube with a single hexahedral element. This element is then uniformly refined several times to obtain a reasonably fine grid for representing the solution inside of the domain.

At this point, the geometry grid representing the signed distance function and thus implicitly the boundary of the domain is taken into account. Every element of the FE grid determines whether it is inside, outside, or cut by the boundary. This allows us to refine the cut elements further to obtain a sufficiently fine resolution of the boundary. Due to the enforcement of the 2:1 ratio between sizes of neighbouring elements, the refinement propagates also to the elements farther from the boundary.

The third grid is constructed within the cut elements to approximately tessellate the part of the element inside the domain using cubes and tetrahedrons. Although the automatic algorithm may lead to very distorted tetrahedra, they are only used for numerical integration, and do not influence the space of finite element functions and its approximation properties.

The final yet important issue of FEM with immersed boundaries is the *small cut-cell issue*. Namely, some basis functions may have only arbitrarily small part of their support inside Ω . Consequently, the resulting system matrix may be ill-conditioned. Several approaches for tackling this issue have been developed in literature, e.g., the ghost penalty stabilization [4], or element aggregation [8]. In the current method, we use extrapolation of such basis functions

from the neighbouring elements with sufficient support within Ω which very much resembles elimination of degrees of freedom at hanging nodes.

The arising system of linear equations is solved using nonoverlapping domain decomposition method. In particular, we use the preconditioned conjugate gradient (PCG) method with multilevel BDDC preconditioner [9, 10]. We have combined the method with parallel AMR using the p4est library [11] in [12]. All details of the algorithm and its parallel implementation for the three-grid immersed FEM can be found in [6].

Numerical results

We demonstrate the performance of the method on a problem of linear elasticity on a box with a spherical hole pulled by two opposite faces. This is a problem inspired by the classical Kirsch problem in 2D. The largest stress appears along the circle at the intersection of the symmetry plane parallel to the pulled faces of the box and the sphere. While the method works well also for more complex geometries, we demonstrate its ability of adaptively refining the FE grid based on solution properties. In particular, we refine 5 percent of elements with the largest von Mises stress in each grid adaptation step. Only one eighth of the box is considered in the computation, see Fig. 2. In this figure, four subsequent steps of the adaptive mesh refinement are shown. In particular, we plot the von Mises stress on elements and the partitioning of the elements into four subdomains.

Conclusions

We have presented a combination of the multilevel BDDC method with parallel adaptive mesh refinement, and with the three-grid immersed FEM for solving a large-scale problem of linear elasticity. The approach combines several features, namely parallel octree-based AMR, immersed boundary FEM, and a scalable algebraic solver. These three components provide a synergistic effect. The octree-based AMR allows the immersed FEM to achieve sufficient resolution at the boundary without requiring fine resolution also inside the domain of interest, which is the case of structured meshes often considered with immersed FEM in literature. Vice versa, the immersed FEM allows the octree-based AMR to be used on complex geometries, which is not straightforward otherwise. Although an adaptive FEM is efficient in terms of degrees of freedom for a certain solution accuracy, for large complex domains in 3D, the problem sizes grow beyond the capabilities of a single computer. For this reason, employing a scalable parallel method for solving systems of algebraic equations such as the multilevel BDDC is crucial for achieving parallel scalability of the whole approach.

References

- [1] *T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs*: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **194** (2005), 39–41, 4135–4195.
- [2] *A. Hansbo, P. Hansbo*: An unfitted finite element method, based on Nitsche’s method, for elliptic interface problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **191** (2002), 5537–5552.

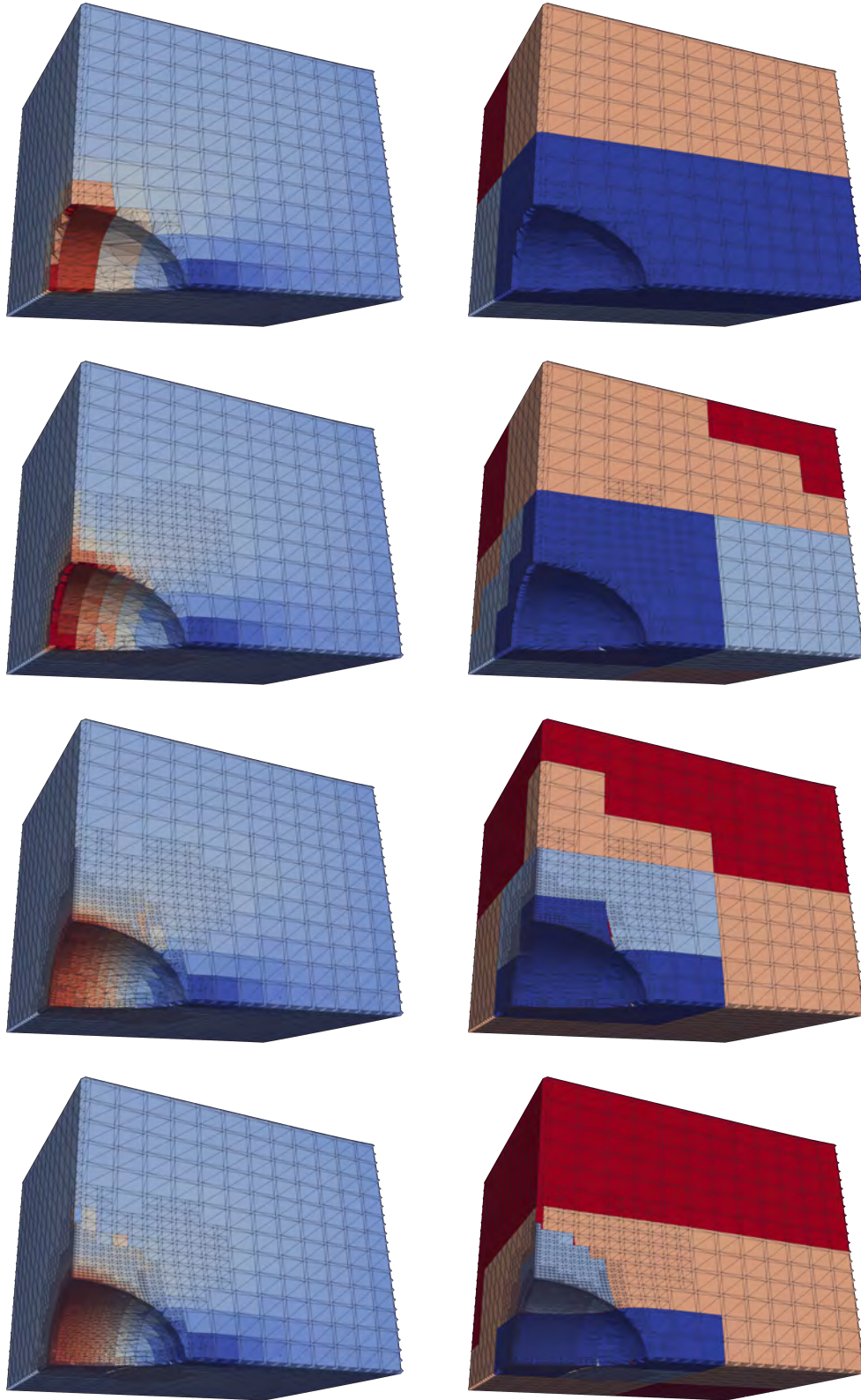


Fig. 2: Deformed shape of a cube with a spherical inclusion. Four subsequent steps of the adaptive mesh refinement towards the area with the largest von Mises stress (from top to bottom). In each step, five percent of elements with the largest stress are refined. Von Mises stress on elements (left) and distribution of elements into four subdomains (right).

- [3] *J. Parvizian, A. Düster, E. Rank*: Finite cell method, *Computational Mechanics* **41** (2007), 121–133.
- [4] *E. Burman, S. Claus, P. Hansbo, M. G. Larson, A. Massing*: CutFEM: Discretizing geometry and partial differential equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **104** (2015), 472–501.
- [5] *A. Main, G. Scovazzi*: The shifted boundary method for embedded domain computations. part I: Poisson and Stokes problems, *Journal of Computational Physics* **372** (2018), 972–995.
- [6] *E. Febrianto, J. Šístek, P. Kůs, M. Kecman, F. Cirak*: A three-grid high-order immersed finite element method for the analysis of CAD models, *Computer-Aided Design* **173** (2024), 103730.
- [7] *J. A. Nitsche*: Über ein variationsprinzip zur lösung von Dirichlet-problemen bei verwendung von teilräumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* **36** (1971), 9–15.
- [8] *F. Verdugo, A. F. Martín, S. Badia*: Distributed-memory parallelization of the aggregated unfitted finite element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **357** (2019), 112583, 1–32.
- [9] *C. R. Dohrmann*: A preconditioner for substructuring based on constrained energy minimization, *SIAM Journal on Scientific Computing* **25** (2003), 246–258.
- [10] *B. Sousedík, J. Šístek, J. Mandel*: Adaptive-Multilevel BDDC and its parallel implementation, *Computing* **95** (2013), 1087–1119.
- [11] *C. Burstedde, L. Wilcox, O. Ghattas, p4est*: Scalable algorithms for parallel adaptive mesh refinement on forests of octrees, *SIAM Journal on Scientific Computing* **33** (2011), 1103–1133.
- [12] *P. Kůs, J. Šístek*: Coupling parallel adaptive mesh refinement with a nonoverlapping domain decomposition solver, *Advances in Engineering Software* **110** (2017), 34–54.

Jakub Šístek is a researcher at the Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences, Žitná 25, 115 67 Prague 1, Czech Republic, e-mail: sistek@math.cas.cz

Acknowledgement The paper is based on joint work with E. Febrianto, F. Cirak, P. Kůs, M. Kecman, and J. Musil.

The author was supported by the Czech Science Foundation through GAČR 23-06159S, and by the Czech Academy of Sciences through RVO:67985840. Computational time on the Karolina supercomputers has been provided thanks to the support of the Ministry of Education, Youth and Sports of the Czech Republic through the e-INFRA CZ (ID:90140).

Numerical techniques for solving conservation laws: continuous and discontinuous approximations

MAREK BRANDNER, JIŘÍ EGERMAIER,
HANA KOPINCOVÁ

Abstract: In this text, we address issues related to continuous and discontinuous data approximation in the framework of numerical methods for conservation law problems. We briefly suggest that the choice of approximation is a complex issue, and that there is no clear answer as to which approximation is generally better.

Keywords: conservation laws, finite volume method, Godunov method, active flux scheme, continuous and discontinuous approximation, property-preserving scheme

AMS classification: 76M10, 76M12, 76M20

1 Introduction

Numerical techniques for approximating solutions to conservation law problems are now a well-established and rapidly developing field within computational fluid mechanics and numerical mathematics. In this context, when we refer to conservation laws, we mean hyperbolic partial differential equations. These equations have important applications, such as the Euler equations that describe inviscid compressible flow, the Saint-Venant equations that describe shallow water flow, and the Lighthill-Whitham-Richards equations that model traffic flow.

The solutions to initial or initial-boundary problems for these equations may involve shock waves, rarefaction waves, contact discontinuities, and other phenomena. To address this, we introduce weak solutions within the framework of mathematical theory. However, these solutions are not uniquely determined. Consequently, we further introduce vanishing viscosity solutions or implement entropy conditions to refine our approach.

There are several numerical methods available for solving the problems mentioned above. These include: finite difference method (FDM) [1], finite volume method (FVM) [2, 22], Godunov type methods [2], finite element method (FEM, including its variations SUPG, AFC, edge based finite element) [3, 4, 9], discontinuous Galerkin finite element method (DGFEM) [5], evolution Galerkin method (EGM, including its variation FVEG) [6, 7], residual distribution schemes (RDS) [8], active flux schemes (AFS) [10, 11], spectral difference schemes (SD) [12, 13, 14], flux reconstruction schemes (FR) [15, 16].

Some of these approaches rely on a continuous approximation of the solution, while others utilize a discontinuous approximation. In some instances, the distinction may largely depend on interpretation. Within this context, the appropriateness of using continuous versus discontinuous solutions in numerical methods for conservation laws is often questioned and discussed. We will demonstrate that the answer to this question is not straightforward or clear-cut. Before that, we will outline two numerical methods.

2 Godunov method – discontinuous approximation

In this paragraph, we provide a brief description of the Godunov method [17, 18, 19]. Consider the following system of partial differential equations in one spatial variable

$$\mathbf{u}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{u})]_x = \mathbf{0}$$

where $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ and $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Further, consider the uniform discretization $x_j = j\Delta x$, $j \in \mathbb{Z}$, $\Delta x > 0$, $t_n = n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\Delta t > 0$, $x_{j+1/2} = x_j + \Delta x/2$, $t_{n+1/2} = t_n + \Delta t/2$, $\mathbf{u}_j^n = \mathbf{u}(x_j, t_n)$, $\mathbf{U}_j^n = \mathbf{U}(x_j, t_n) \approx \mathbf{u}_j^n$.

The integral formulation of the conservation law has the following form

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{u}(x, t_{n+1}) dx &= \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{u}(x, t_n) dx - \\ &- \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{j+1/2}, t)) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{j-1/2}, t)) dt. \end{aligned}$$

We can adjust this equation to emphasize the integral averages

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{u}(x, t_{n+1}) dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{u}(x, t_n) dx - \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{j+1/2}, t)) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{j-1/2}, t)) dt \right] \end{aligned}$$

The equality mentioned above can be expressed as follows

$$\bar{\mathbf{u}}_j^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{\mathbf{f}}_{j+1/2}^{n+1/2} - \bar{\mathbf{f}}_{j-1/2}^{n+1/2})$$

where

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_j^n &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{u}(x, t_n) dx, \\ \bar{\mathbf{f}}_{j+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{j+1/2}, t)) dt. \end{aligned}$$

We need to accurately approximate the numerical flow functions $\bar{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{n+1/2} \approx \bar{\mathbf{f}}_{j+1/2}^{n+1/2}$ now. We must use approximation because we do not know the point values of the function we are seeking; we only have the integral averages for time layer t_n . The Godunov method is based on using integral averages of the function $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}(x, t_n)$ to construct a piecewise constant discontinuous approximation. At the points of discontinuity in this approximation, we solve either exactly or approximately the Riemann problems, which involve the original equation but with a specific initial condition. The solutions to the Riemann problems are then incorporated into the integrals that appear in $\bar{\mathbf{f}}_{j+1/2}^{n+1/2}$. The numerical scheme then takes the form

$$\bar{\mathbf{U}}_j^{n+1} = \bar{\mathbf{U}}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{n+1/2} - \bar{\mathbf{F}}_{j-1/2}^{n+1/2})$$

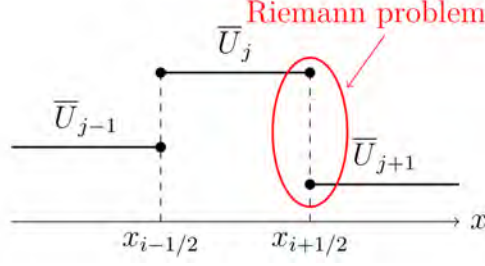


Fig. 1: Godunov scheme – reconstruction

where $\bar{\mathbf{U}}_j^n \approx \bar{\mathbf{u}}_j^n$.

The Godunov method is a prototype for high-resolution finite volume methods (high order Godunov type methods), for the discontinuous Galerkin method and for the evolutionary Galerkin method.

3 Active flux scheme – continuous approximation

The basic version of this method dates back to 1977 and is one of the schemes proposed by Bram van Leer, known as Scheme V. Interest in this method was revived after 2010, leading to the proposal of a general variant systems of partial differential equations in multiple dimensions [20, 10, 11]. Let us now consider, for the sake of simplicity, the scalar conservation law

$$u_t + [f(u)]_x = 0.$$

This method combines a conservative approach that works with approximations of integral averages and the method of characteristics (CIR). It is based on a continuous piecewise quadratic approximation, making it a third-order method. The quadratic approximation is constructed in each cell using the integral average $\bar{U}_j^n \approx \bar{u}_j^n$ and two point values $U_{j-1/2}^n \approx u_{j-1/2}^n$ and $U_{j+1/2}^n \approx u_{j+1/2}^n$, which are identical for adjacent cells (i.e. the reconstruction is continuous).

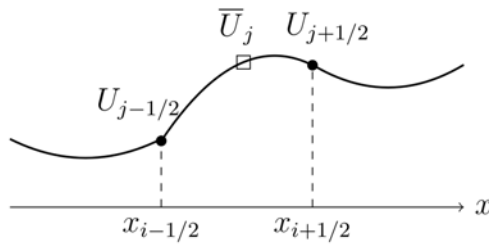


Fig. 2: Active flux scheme – reconstruction

The basic form of the active flux method is the same as the Godunov method

$$\bar{U}_j^{n+1} = \bar{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_{j+1/2}^{n+1/2} - \bar{F}_{j-1/2}^{n+1/2}).$$

However, we determine the numerical flux function using the quadrature formula

$$\bar{F}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{6} \left[f(U_{j+1/2}^n) + 4f(U_{j+1/2}^{n+1/2}) + f(U_{j+1/2}^{n+1}) \right].$$

In this case, the required point values $U_{j+1/2}^{n+1/2}$ and $U_{j+1/2}^{n+1}$ are determined using an appropriate version of the method of characteristics. Thus, we obtain a conservative third-order method (for sufficiently smooth solutions) that uses a continuous approximation. As a result, the numerical method does not require exact or approximate solvers for the Riemann problems.

4 Property-preserving numerical schemes

Let us summarize what properties the method should have for solving partial differential equations of hyperbolic type or for solving singularly perturbed problems [21].

- It should be a high-resolution method that accurately approximates both smooth and rapidly varying or non-smooth solutions.
- The method should mitigate the Gibbs phenomenon (numerical oscillations).
- The method is invariant domain preserving.
- The method is conservative.
- The method should accurately represent the physical model, ensuring that it aligns with the principles of physics in multiple dimensions.
- The method is expected to converge to a weak solution that satisfies entropy conditions.
- The scheme should be compact and not have a wide stencil.
- The convex hull of the data employed must contain the exact domain of dependence. The stencils should only contain data to which the desired output is sensitive.
- The stencil should be as symmetrical as possible with respect to the domain of dependence.
- The necessary stability condition based on the Courant-Friedrichs-Lewy inequality should be as unrestricted as possible.
- The method should be both computationally efficient and robust.

It's important to note that the linear monotonicity-preserving methods are at most first order. Consequently, we adopt nonlinear methods by switching between higher and lower order techniques based on the data [23, 2]. (There are exceptions for certain problems, such as linear acoustics, where odd high-order methods can be utilized. These methods are stable and can accurately approximate rapidly varying data [24].) It is also important to select conservative methods as this helps in accurately approximating shock waves. Additionally, the correct application of entropy fixes aids in the proper approximation of rarefaction waves [2].

5 Advantages and disadvantages of the discontinuous approximation

Discontinuous data approximation has several advantages. An integral formulation leading to conservative methods can be easily used, limiting (restriction of the Gibbs phenomenon) can be easily implemented, and (approximate) solvers of Riemann problems can be included in the procedure [18, 2]. Implementing hp-adaptivity and general grids, including the so-called space-time DG, is also relatively easy [26]. Unfortunately, the discontinuous approximation also has

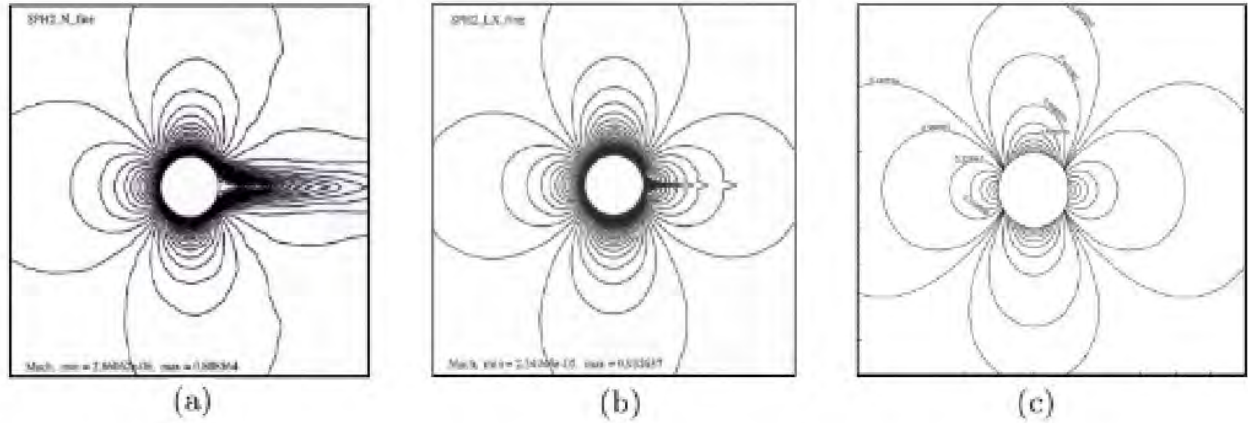


Fig. 3: (a) Godunov method 2. order (MUSCL); (b) residual distribution scheme (RDS); (c) RDS with elliptic-hyperbolic splitting. Flow around the cylinder, Mach number [33].

many drawbacks. Riemann problems have to be solved unnecessarily in many cases (at each cell boundary). Usually, only (approximate) solvers of 1D Riemann problems are included in the procedure. Thus, the algorithms contain some form of splitting. The choice of the grid thus affects the formulation of 1D Riemann problems [25]. The methods are usually not compact enough (the stencil expands as the order of the technique increases). A description of several failings of one-dimensional Riemann solvers applied to multidimensional equations can be found in [34, 35].

If we wanted to construct a purely multidimensional method, we would use an approach based on multidimensional Riemann problems. However, the exact or approximate solution of these problems is very complicated, except in special cases. The use of alternative multidimensional approaches (for example approximate evolution operators) with the attempt to simultaneously realize a compact reconstruction also leads to very complicated procedures [7]. An even more complicated situation would arise if we use high-order reconstruction and are forced to solve multidimensional generalized Riemann problems [25]. A comparison of the three approaches is illustrated in Figure 3. Philip Roe (author of Roe’s Solver of Riemann’s Problems, among other things) offers a very insightful critique in this sense [27]. Let us highlight one of his significant arguments: “Acoustic waves, on the other hand, behave one-dimensionally only in one dimension. In n dimensions they have an n -dimensional domain of dependence that does not have a simple mapping onto the grid, and cannot be represented by any finite number of one-dimensional interactions.”

6 Advantages and disadvantages of the continuous approximation

The advantage of the continuous approximation is that the method based on it can avoid solving Riemann problems. The solvers of Riemann problems can be replaced, for example, by the use of characteristics, bicharacteristics or the Poisson formula [6, 32]. The approaches just mentioned can be implemented in a genuinely multidimensional form. However, it is important to note that not all methods based on continuous approximation are purely multidimensional.

When dealing with exact solutions that are discontinuous (i.e., containing a Riemann problem), the Gibbs phenomenon can occur, particularly with high-order methods leading to numerical oscillations. Thus, shock-capturing becomes necessary, and a suitable limiter must be employed [28, 29].

Unfortunately, the use of a limiter (together in conjunction with a continuous approximation) generally results in a non-conservative method. To maintain conservativity, we must introduce specific corrections and distribute these corrections among the grid nodes [30]. However, this process can cause the solution to oscillate again since we are modifying the values adjusted by the limiter. Therefore, a significant drawback of methods based on continuous approximation is the complicated and unresolved challenge of integrating a conservative method with a limiter [31].

Additionally, we must ensure that weak solutions, which do not satisfy the entropy condition, are eliminated; this requires the implementation of an entropy fix procedure.

7 Conclusion

This text aims to argue against the simplistic idea that using continuous and discontinuous approximations in numerical methods for solving conservation laws is a straightforward choice. Specifically, it challenges the notion that when dealing with discontinuous or rapidly varying solutions, the discontinuous approximation is always the better option. Both options have notable advantages and disadvantages that we have highlighted.

Our goal should be to develop a method that meets as many of the required properties as possible. This can be very challenging in many instances. Therefore, selecting an appropriate method is always a compromise. The development of a robust and efficient method is influenced by the intricate interplay of the need for conservativity, suppression of the Gibbs phenomenon, and consideration of the multidimensional nature of the problems. It should also be noted that meeting individual requirements is also difficult in more general cases. For example, the question is how to create a limiter if the exact solution does not have bounded total variation or does not preserve monotonicity.

In conclusion, the development of new efficient and robust numerical methods for fluid flow simulation is still an area of intense research, among other reasons mentioned above.

References

- [1] *R. J. LeVeque*: Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems, SIAM, 2007.
- [2] *R. J. LeVeque*: Finite volume methods for hyperbolic problems, Cambridge university press **31** (2002).
- [3] *D. Kuzmin, R. Löhner, S. Turek*: Flux-corrected transport: principles, algorithms, and applications, Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] *H.-G. Roos, L. Tobiska, M. Stynes*: Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations, Springer, 2008.
- [5] *V. Dolejší, M. Feistauer*: Discontinuous Galerkin method, Analysis and Applications to Compressible Flow. Springer Series in Computational Mathematics. Springer **48** (2015).

- [6] *M. Lukáčová-Medvid'ová, K. Morton, G. Warnecke*: Evolution Galerkin methods for hyperbolic systems in two space dimensions, *Mathematics of Computation* **69**, 232 (2000), 1355–1384.
- [7] *M. Lukáčová-Medvid'ová, J. Saibertová, G. Warnecke*: Finite volume evolution Galerkin methods for nonlinear hyperbolic systems, *Journal of Computational Physics* **183**, 2 (2002), 533–562.
- [8] *R. Abgrall*: A review of residual distribution schemes for hyperbolic and parabolic problems: the July 2010 state of the art, *Communications in Computational Physics* **11**, 4 (2012), 1043–1080.
- [9] *G. R. Barrenechea, V. John, P. Knobloch*: Analysis of algebraic flux correction schemes, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **54**, 4 (2016), 2427–2451.
- [10] *T. Eymann, P. Roe*: Active flux schemes for systems, 20th AIAA computational fluid dynamics conference, 2011.
- [11] *T. A. Eymann*: Active Flux Schemes, 2013.
- [12] *D. A. Kopriva, J. H. Koliás*: A conservative staggered-grid Chebyshev multidomain method for compressible flows, *Journal of computational physics* **125**, 1 (1996), 244–261.
- [13] *Y. Liu, M. Vinokur, Z. Jian Wang*: Spectral difference method for unstructured grids I: Basic formulation, *Journal of Computational Physics* **216**, 2 (2006), 780–801.
- [14] *A. Jameson*: A proof of the stability of the spectral difference method for all orders of accuracy, *Journal of Scientific Computing* **45** (2010), 348–358.
- [15] *H. T. Huynh*: A flux reconstruction approach to high-order schemes including discontinuous Galerkin methods, 18th AIAA computational fluid dynamics conference, 2007.
- [16] *H. T. Huynh*: A reconstruction approach to high-order schemes including discontinuous Galerkin for diffusion, 47th AIAA aerospace sciences meeting including the new horizons forum and aerospace exposition, 2009.
- [17] *S. K. Godunov, I. Bohachevsky*: Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics, *Matematičeskij sbornik* **47** (1959), 3, 271–306.
- [18] *E. F. Toro*: Godunov methods: Theory and applications, Springer Science & Business Media, 2012.
- [19] *B. Van Leer*: Towards the ultimate conservative difference scheme III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow, *Journal of Computational Physics* **23** (1977), 3, 263–275.
- [20] *B. Van Leer*: Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection, *Journal of computational physics* **23** (1977), 3, 276–299.
- [21] *D. Kuzmin, H. Hajduk*: Property-preserving numerical schemes for conservation laws, World Scientific, 2024.
- [22] *M. Brandner, S. Míka*: Brief history of the finite volumes method (Czech), *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* **59** (2014), 1, 44–54.

- [23] *R. J. LeVeque*: Numerical methods for conservation laws, Springer **132** (1992).
- [24] *B. Després*: Uniform asymptotic stability of Strang’s explicit compact schemes for linear advection, SIAM journal on numerical analysis **47** (2009), 5, 3956–3976.
- [25] *P. Roe*: Multidimensional upwinding, Handbook of Numerical Analysis **18** (2017), 53–80.
- [26] *J. J. Sudirham, J. JW van der Vegt, R. MJ van Damme*: Space–time discontinuous Galerkin method for advection–diffusion problems on time-dependent domains, Applied numerical mathematics **56** (2006), 12, 1491–1518.
- [27] *P. Roe*: Is discontinuous reconstruction really a good idea?, Journal of Scientific Computing **73** (2017), 2, 1094–1114.
- [28] *Y. Bai, P. Roe*: Toward Physically-based limiting for the Active Flux scheme, AIAA AVIATION 2021 FORUM, 2021.
- [29] *Y. Bai*: Shock capturing for high-order computational fluid dynamics, 2023.
- [30] *F. He, P. Roe*: The treatment of conservation in the active flux method, AIAA AVIATION 2020 FORUM, 2020.
- [31] *R. Abgrall, W. Barsukow*: Extensions of active flux to arbitrary order of accuracy, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis **57** (2023), 2, 991–1027.
- [32] *D. Fan, P. Roe*: Investigations of a new scheme for wave propagation, 22nd AIAA computational fluid dynamics conference, 2015.
- [33] *M. Rad*: A residual distribution approach to the Euler equations that preserves potential flow, University of Michigan, 2001.
- [34] *P. Roe*: Discrete models for the numerical analysis of time-dependent multidimensional gas dynamics, Journal of Computational Physics **63** (1986), 2, 458–476.
- [35] *J. J. Quirk*: A contribution to the great Riemann solver debate, Springer, 1997.

Associate professor **Marek Brandner**, Ing. **Jiří Egermaier** and Ing. **Hana Kopincová** work at the University of West Bohemia in Pilsen, Faculty of Applied Sciences, Department of mathematics, Univerzitní 8 , 30100 Plzeň, Czech Republic,
e-mail: brandner@kma.zcu.cz, jirieggy@kma.zcu.cz, kopincov@kma.zcu.cz.

Acknowledgement This work was supported by Technology Agency of the Czech Republic (TA CR) grant No. TK04020250.

Complete list of Zlámal's publications

COMPILED BY MICHAL KRÍŽEK, EVA RITTEROVÁ AND JARMILA ŠTRUNCOVÁ

- [1] *M. Zlámal*: Oscillation criterions, Čas. Pěst. Mat. Fyz. **75** (1950), 213–218. [zbl](#)
- [2] *M. Zlámal*: Asymptotic properties of the solutions of the third order linear differential equations, Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk **329** (1951), 159–167.
- [3] *M. Zlámal*: Nonlinear forced oscillations (Czech), Čas. Pěst. Mat. **77** (1952), 53–64.
- [4] *M. Zlámal*: Asymptotic properties of the solutions of linear differential equations (German), Math. Nachr. **10** (1953), 169–174. [zbl](#)
- [5] *M. Zlámal*: On a stability criterion of Lyapunov (Russian), Czech. Math. J. **3** (1953), 257–264. [zbl](#)
- [6] *M. Zlámal*: On an eigenvalue problem for the differential equation $y^{(n)} + \lambda A(x)y = 0$ (German), Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk **345** (1953), 91–99. [zbl](#)
- [7] *M. Zlámal*: On the stability of nonlinear forced oscillations (German), Czech. Math. J. **4** (1954), 95–103. [zbl](#)
- [8] *M. Zlámal*: A remark on the characteristic determinants of an eigenvalue problem (German), Czech. Math. J. **5** (1955), 175–179. [zbl](#)
- [9] *M. Zlámal*: On asymptotic properties of solutions of a second order linear differential equation (German), Czech. Math. J. **6** (**81**) (1956), 75–93. [zbl](#)
- [10] *M. Zlámal*: On the differential equation $\dot{y} + y = \ddot{y}^2$ (German), Czech. Math. J. **7** (1957), 26–40. [zbl](#)
- [11] *M. Zlámal*: On the first boundary value problem for a singularly perturbed elliptic differential equation (German), Czech. Math. J. **7** (1957), 413–417. [zbl](#)
- [12] *M. Novotný, K. Svoboda, M. Zlámal*: To 60th birthday of Otakar Borůvka (Czech), Čas. Pěst. Mat. **84** (1959), 236–250. [zbl](#)
- [13] *M. Zlámal*: On the telegraph equation with a small parameter (French), Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **27** (1959), 324–332. [zbl](#)
- [14] *M. Zlámal*: On the mixed problem for a hyperbolic equation with a small parameter (Russian), Czech. Math. J. **9** (1959), 218–242. [zbl](#)
- [15] *M. Zlámal*: The mixed problem for hyperbolic equations with a small parameter (Russian), Czech. Math. J. **10** (1960), 83–122. [zbl](#)
- [16] *M. Zlámal*: The parabolic equation as a limiting case of a certain elliptic equation, Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser. **57** (1962), 143–150. [zbl](#)
- [17] *M. Zlámal*: The parabolic equations as a limiting case of hyperbolic and elliptic equations, Differential Equations and Their Applications (Proc. Conf., Prague, 1962). Publ. House Czechoslovak Academy of Sciences, Prague (1963), 243–247. [zbl](#)
- [18] *M. Zlámal*: Asymptotic error estimates in solving elliptic equations of the fourth order by the method of finite differences, J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. B, Numer. Anal. **2** (1965), 337–344. [zbl](#)
- [19] *M. Zlámal*: On Singular Perturbation Problems Concerning Hyperbolic Equations, Lectures Series 45. University of Maryland, The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, College Park 1966.
- [20] *M. Zlámal*: On the estimate of the error of quadrature formulae, Apl. Mat. **11** (1966), 423–426. [zbl](#)

-
- [21] *F. T. Metcalf, M. Zlámal*: On the zeros of solutions to Bessel's equation, *Am. Math. Mon.* **73** (1966), 746–749. [zbl](#)
 - [22] *M. Zlámal*: Discretization and error estimates for boundary value problems of the second order, *Calcolo* **4** (1967), 541–550. [zbl](#)
 - [23] *M. Zlámal*: Discretisation and error estimates for elliptic boundary value problems of the fourth order, *Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comenianae, Math.* **17** (1967), 301–305. [zbl](#)
 - [24] *M. Zlámal*: Discretization and error estimates for elliptic boundary value problems of the fourth order, *SIAM J. Numer. Anal.* **4** (1967), 626–639. [zbl](#)
 - [25] *J. H. Bramble, B. E. Hubbard, M. Zlámal*: Discrete analogues of the Dirichlet problem with isolated singularities, *SIAM J. Numer. Anal.* **5** (1968), 1–25. [zbl](#)
 - [26] *M. Zlámal*: A finite element procedure for solving boundary value problems of the fourth order, *Proceedings of Conference of Finite Element Method, Plzeň*, 1968.
 - [27] *M. Zlámal*: On the finite element method, *Numer. Math.* **12** (1968), 394–409. [zbl](#)
 - [28] *M. Zlámal*: On mildly nonlinear elliptic boundary value problems, *Information Processing 68 (Proc. IFIP Congress, Edinburgh, 1968)*, Vol. 1: Mathematics, Software. North-Holland, Amsterdam (1969), 179–182. [zbl](#)
 - [29] *M. Zlámal*: On some finite element procedures for solving second order boundary value problems, *Numer. Math.* **14** (1969), 42–48. [zbl](#)
 - [30] *L. Holuša, J. Kratochvíl, M. Zlámal, A. Ženíšek*: Calculation of a plate of constant thickness by finite element method, *Stav. Čas. SAV* **17** (1969), 779–783.
 - [31] *J. Kratochvíl, M. Zlámal, A. Ženíšek*: Statical solution of hydrotechnical constructions (Czech), *Priehradné dni. Proceedings of Conference II* (1969), 298–311.
 - [32] *L. Holuša, J. Kratochvíl, M. Zlámal, A. Ženíšek*: *Finite Elements Method*, Vysoké učení technické, Brno, 1970, (Czech).
 - [33] *M. Zlámal*: A finite element procedure of the second order of accuracy, *Numer. Math.* **14** (1970), 394–402. [zbl](#)
 - [34] *A. Ženíšek, M. Zlámal*: Convergence of a finite element procedure for solving boundary value problems of the fourth order, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **2** (1970), 307–310. [zbl](#)
 - [35] *J. H. Bramble, M. Zlámal*: Triangular elements in the finite element method, *Math. Comput.* **24** (1971), 809–820. [zbl](#)
 - [36] *J. Kratochvíl, A. Ženíšek, M. Zlámal*: A simple algorithm for the stiffness matrix of triangular plate bending elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **3** (1971), 553–563. [zbl](#)
 - [37] *V. Kolář, J. Kratochvíl, M. Zlámal, A. Ženíšek*: Technical, physical and mathematical principles of the finite element method, *Rozpravy Československé akademie věd. Sešit 2*, **81** (1971), 1–85.
 - [38] *I. Babuška, M. Zlámal*: Nonconforming elements in the finite element method with penalty, *SIAM J. Numer. Anal.* **10** (1973), 863–875. [zbl](#)
 - [39] *M. Zlámal*: Some recent advances in the mathematics of finite elements, *The mathematics of finite elements and applications* (ed. J. R. Whiteman). Elsevier, Amsterdam (1973), 59–81. [zbl](#)
 - [40] *M. Zlámal*: Curved elements in the finite element method. Time dependent problems, *Čisl. Met. Mech. Spl. Sredi* **4** (1973), 25–49.
 - [41] *M. Zlámal*: A remark on the “Serendipity family”, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **7** (1973), 98–100.

- [42] *M. Zlámal*: The finite element method in domains with curved boundaries, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **5** (1973), 367–373. [zbl](#)
- [43] *M. Zlámal*: Curved elements in the finite element method. I, *SIAM J. Numer. Anal.* **10** (1973), 229–240. [zbl](#)
- [44] *M. Zlámal*: Curved elements in the finite element method. II, *SIAM J. Numer. Anal.* **11** (1974), 347–362. [zbl](#)
- [45] *M. Zlámal*: Finite element methods for parabolic equations, *Math. Comput.* **28** (1974), 393–404. [zbl](#)
- [46] *M. Zlámal*: Finite element methods for parabolic equations, *Conference on the Numerical Solution of Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics 363*. Springer, New York 1974, 215–221. [zbl](#)
- [47] *M. Zlámal*: Finite element multistep discretizations of parabolic boundary value problems, *Math. Comput.* **29** (1975), 350–359. [zbl](#)
- [48] *M. Zlámal*: Finite element multistep methods for parabolic equations, *Finite Elemente und Differenzenverfahren* (eds. J. Albrecht, L. Collatz). *International Series of Numerical Mathematics 28*. Birkhäuser, Basel (1975), 177–186. [zbl](#)
- [49] *M. Zlámal*: Unconditionally stable finite element schemes for parabolic equations, *Topics in Numerical Analysis. II.* (ed. J.H. Müller). Academic Press, London (1975), 253–261. [zbl](#)
- [50] *M. Zlámal*: The method of finite elements for the heat equation (Russian), *Variational-Difference Methods for the Solution of Problems of Mathematical Physics. Vyčisl. Centr Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR*, Novosibirsk (1976), 21–26.
- [51] *M. Zlámal*: Solution of nonlinear heat conduction problems by the finite element method, *Stav. Čas.* **24** (1976), 428–435.
- [52] *M. Zlámal*: Finite element methods in heat conduction problems, *The Mathematics of Finite Elements and Applications II*. Academic Press, London (1976), 85–104.
- [53] *M. Zlámal*: Finite element methods for nonlinear parabolic equations, *RAIRO, Anal. Numér.* **11** (1977), 93–107. [zbl](#)
- [54] *M. Zlámal*: Some superconvergence results in the finite element method, *Mathematical Aspects of Finite Element Methods. Lecture Notes in Math.* **606**, Springer, Berlin, 1977, 353–362. [zbl](#)
- [55] *M. Zlámal*: Superconvergence and reduced integration in the finite element method (Russian), *Methods of Numerical and Applied Mathematics. Vyčisl. Centr Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR*, Novosibirsk, 1977, 15–20. [zbl](#)
- [56] *M. Zlámal*: Superconvergence and reduced integration in the finite element method, *Math. Comput.* **32** (1978), 663–685. [zbl](#)
- [57] *M. Zlámal*: Superconvergence of gradients in the finite element method (Russian), *Variational-difference Methods in Mathematical Physics. Vyčisl. Centr Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR*, Novosibirsk (1978), 15–22. [zbl](#)
- [58] *P. Lesaint, M. Zlámal*: Superconvergence of the gradient of finite element solutions, *RAIRO, Anal. Numér.* **13** (1979), 139–166. [zbl](#)
- [59] *M. Zlámal*: Superconvergence of the gradient of finite element solutions, *Wiss. Z. Hochschule Architektur Bauwesen Weimar* **25** (1979), 375–380. [zbl](#)

-
- [60] *L. Čermák, M. Zlámal*: Transformation of dependent variables and the finite element solution of nonlinear evolution equations, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **15** (1980), 31–40. [zbl](#)
- [61] *P. Lesaint, M. Zlámal*: Convergence of the nonconforming Wilson element for arbitrary quadrilateral meshes, *Numer. Math.* **36** (1980), 33–52. [zbl](#)
- [62] *M. Zlámal*: A finite element solution of the nonlinear heat equation, *RAIRO, Anal. Numér.* **14** (1980), 203–216. [zbl](#)
- [63] *M. Zlámal*: Finite element method in physical and technical applications, *Comput. Phys. Commun.* **20** (1980), 37–42.
- [64] *M. Zlámal*: Galerkin-finite element solution of nonlinear evolution problems, *Proc. of the Special Year in Numer. Anal., University of Maryland* (1981).
- [65] *M. Zlámal*: Galerkin-finite element solution of nonlinear evolution problems, *Differential Equations and Their Applications. Equadiff 5. Teubner-Texte zur Mathematik 47.* Teubner, Leipzig (1982), 378–386. [zbl](#)
- [66] *M. Zlámal*: Finite element solution of quasistationary nonlinear magnetic field, *RAIRO, Anal. Numér.* **16** (1982), 161–191. [zbl](#)
- [67] *M. Zlámal*: Addendum to the paper "Finite element solution of quasistationary nonlinear magnetic field", *RAIRO, Anal. Numér.* **17** (1983), 407–415. [zbl](#)
- [68] *F. Melkes, M. Zlámal*: Numerical solution of nonlinear quasi-stationary magnetic fields, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **19** (1983), 1053–1062. [zbl](#)
- [69] *M. Zlámal*: A linear scheme for the numerical solution of nonlinear quasistationary magnetic fields, *Math. Comput.* **41** (1983), 425–440. [zbl](#)
- [70] *M. Zlámal, B. Vojtek*: Use of the computer for evaluating technological parameters of pit furnaces in NHKG steel company (Czech), *Bull. INORGA* **19** (1985), 193–195.
- [71] *L. Čermák, M. Zlámal*: Finite element solution of a nonlinear diffusion problem with a moving boundary, *RAIRO, Modélisation Math. Anal. Numér.* **20** (1986), 403–426. [zbl](#)
- [72] *L. Čermák, M. Zlámal*: Finite element solution of a nonlinear diffusion problem with a moving boundary, *Differential Equations and Their Applications. Equadiff 6. Lecture Notes in Mathematics 1192.* Springer, Berlin (1986), 291–294. [zbl](#)
- [73] *M. Zlámal*: Finite element solution of the fundamental equations of semiconductor devices. I, *Math. Comput.* **46** (1986), 27–43. [zbl](#)
- [74] *M. Zlámal*: Finite element solution of the fundamental equations of semiconductor devices, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies 133.* North-Holland, Amsterdam (1987), 121–128. [zbl](#)
- [75] *P. A. Markovich, M. Zlámal*: Inverse-average-type finite element discretizations of selfadjoint second-order elliptic problems, *Math. Comput.* **51** (1988), 431–449. [zbl](#)
- [76] *M. Zlámal*: Finite element solution of the fundamental equations of semiconductor devices, II. Report. Dep. de Mathématiques, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1988.
- [77] *M. Zlámal*: A box finite element method giving solution gradients with a higher order accuracy, *Finite Element Methods: Fifty Years of the Courant Element. Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* **164**, Marcel Dekker, New York (1994), 501–504. [zbl](#)
- [78] *M. Zlámal*: Finite element solution of the fundamental equations of semiconductor devices. II, *Appl. Math., Praha* **46** (2001), 251–294. [zbl](#)

Název: **Vzpomínkové odpoledne a seminář
Metoda konečných prvků dnes ke 100. výročí
narození profesora Miloše Zlámala**

Autoři: Antonín Aujeský, Marek Brandner, Vít Dolejší, Zdeněk Dostál,
Jiří Egermaier, Jan Franců, Ladislav Janíček, Hana Kopincová,
Tomáš Kozubek, Michal Křížek, Václav Kučera,
Jindřich Petruška, Jakub Šístek, Petr Vašík, Tomáš Vejchodský

Editor: Jan Franců

Sazba: typografický systém L^AT_EX

Vydavatel: Vysoké učení technické v Brně
Fakulta strojního inženýrství

Vyšlo: listopad 2025

Vydání: první (eBook)

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou

Tato publikace podléhá licenci Creative Commons:

[Uveďte autora — Neužívejte dílo komerčně — Nezpracovávejte 4.0 Mezinárodní](#)



ISBN 978-80-214-6392-9

