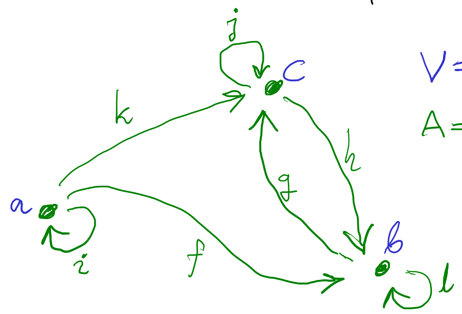
TEORIA KATEGORII

Teoria stworzona przez S. Eilenberga i S. Maclane'a (1945).

Kategoria składa się z obiektów oraz strzałek pomiędzy nimi. Strzałki przylegające do siebie można składać. Składanie jest łączne. Ponadto, każdy obiekt ma strzałkę identycznościową, jest to pętla, która jest neutralna względem składania.



$V = \{a, b, c\}$

$A = \{f, g, h, i, j, k, l\}$

DEF. Grafem skierowanym nazywamy strukturę postaci

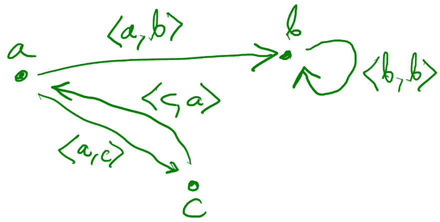
$$G = \langle V, A, \mathrm{dom}, \mathrm{cod} \rangle,$$

gdzie $\mathrm{dom} : A \to V$, $\mathrm{cod} : A \to V$ są odwzorowaniami.
Elementy zbioru V nazywamy wierzchołkami lub obiektami.
Elementy zbioru A nazywamy strzałkami.
Dla $f \in A$, $\mathrm{dom}(f)$ nazywamy dziedziną strzałki f, a $\mathrm{cod}(f)$ nazywamy przeciwdziedziną strzałki f.

domain = dziedzina

codomain = przeciwdziedzina

PRZYKŁAD 1 Grafem prostym nazywamy parę $\langle V, A \rangle$, gdzie V jest zbiorem, $A \subseteq V \times V$. Tak więc, A jest relacją 2-argumentową. Jeśli A jest symetryczna, to $\langle V, A \rangle$ jest nieskierowany.



$V = \{a, b, c\}$.

$A = \{\langle a,b \rangle, \langle a,c \rangle, \langle c,a \rangle, \langle b,b \rangle\}$

Graf prosty $\langle V, A \rangle$ jest grafem skierowanym, gdzie

$$\mathrm{dom}(\langle x, y \rangle) = x,$$

$$\mathrm{cod}(\langle x, y \rangle) = y.$$

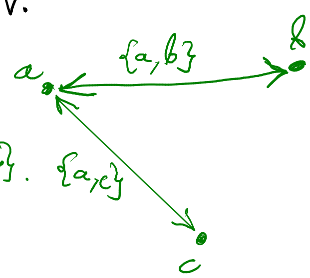
Grafy proste nieskierowane bywają definiowane jako pary postaci $\langle V, E \rangle$, gdzie E jest rodziną podzbiorów 2-elementowych zbioru V.

Niech $A_E = \{\langle a,b \rangle \in V \times V : \{a,b\} \in E\}$.

Wówczas $\langle V, A_E \rangle$ jest grafem prostym.

$V = \{a, b, c\}$,

$E = \{\{a,b\}, \{a,c\}\}$.



DEF. *Kategorią* nazywamy strukturę postaci

$$\langle V, A, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ \rangle,$$

gdzie $\langle V, A, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}\rangle$ jest grafem skierowanym, $\circ$ jest częściową operacją 2-argumentową na strzałkach, przy czym spełnione są następujące aksjomaty.

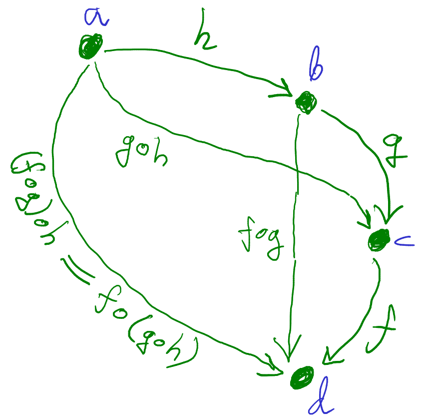
(K0) $f \circ g \in A$ jest zdefiniowane $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{cod}(g) = \mathrm{dom}(f)$.
Ponadto, $\mathrm{dom}(f \circ g) = \mathrm{dom}(g)$ oraz $\mathrm{cod}(f \circ g) = \mathrm{cod}(f)$.

(K1) *Łączność:* $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

(K2) *Identyczność:* Dla każdego obiektu $x \in V$ istnieje strzałka $id_x \in A$ taka, że
$\mathrm{dom}(id_x) = x = \mathrm{cod}(id_x)$
oraz

$$f \circ id_x = f, \quad id_x \circ g = g$$

dla każdych $f, g \in A$ takich, że
$\mathrm{dom}(f) = x = \mathrm{cod}(g)$.



Strzałkę id_x nazywamy *identycznością* obiektu x.
Operację $\circ$ nazywamy *składaniem* strzałek.

FAKT 1 Niech $\langle V, A, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ\rangle$ będzie kategorią, $x \in V$.
Załóżmy, że $i, j \in A$ są takie, że $\mathrm{dom}(i) = \mathrm{dom}(j) = \mathrm{cod}(i) = \mathrm{cod}(j) = x$
oraz $f \circ j = f$, $i \circ g = g$ dla odpowiednich strzałek f, g. Wówczas

$$i = j = id_x.$$

Tak więc, identyczność obiektu x jest wyznaczona jednoznacznie.

DOWÓD. Mamy w szczególności $i = i \circ j = j$. ∎

PRZYKŁAD 2 *Kategoria zbiorów.*

Niech V będzie rodziną zbiorów. Zdefiniujmy A jako rodzinę wszystkich odwzorowań pomiędzy zbiorami rodziny V. Dla $f \in A$, niech $\mathrm{dom}(f)$ oznacza jego dziedzinę, zaś $\mathrm{cod}(f)$ jego przeciwdziedzinę. Ponadto $f \circ g$ jest zwykłym złożeniem odwzorowań, a id_X jest odwzorowaniem tożsamościowym, tzn. $id_X : X \to X$, $id_X(x) = x$.

Przypomnijmy, że *funkcją* ze zbioru X do Y nazywamy relację $f \subseteq X \times Y$ spełniającą
$$\forall x \in X \ \exists! \ y \in Y \quad \langle x, y \rangle \in f.$$
istnieje dokładnie jeden

$R \subseteq X \times Y$
$\langle x, y \rangle \in R$ oznacza to samo co $x R y$.

Piszemy wtedy $y = f(x)$ zamiast $x f y$.

Dla relacji 2-argumentowej R definiujemy
$$\mathrm{dom}(R) = \{x : (\exists y) \ \langle x, y \rangle \in R\}.$$
Jeśli f jest funkcją z X do Y, to $\mathrm{dom}(f) = X$.

Definiuje się też
$$\mathrm{rng}(R) = \{y : (\exists x) \ \langle x, y \rangle \in R\},$$
rng = range (zbiór wartości)

Odwzorowaniem (*przekształceniem*) z X do Y nazywamy trójkę $\langle X, f, Y \rangle$, gdzie f jest funkcją z X do Y. Piszemy $f : X \longrightarrow Y$. W praktyce będziemy pisać f zamiast $\langle X, f, Y \rangle$, jeśli tylko Y jest wcześniej ustalone.

Dla odwzorowania $\langle X, f, Y \rangle$ definiujemy jego *przeciwdziedzinę*
$$\mathrm{cod}(X, f, Y) = Y.$$

NOTACJA. Kategorie będziemy oznaczać literami $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{K}$, itp.

Mając daną kategorię $\mathfrak{C}$, jej zbiór obiektów będziemy oznaczać $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$. Symbol $\mathfrak{C}$ będziemy utożsamiać ze zbiorem wszystkich strzałek kategorii $\mathfrak{C}$. Ponadto, przyjmujemy oznaczenie
$$\mathfrak{C}(X, Y) = \{f \in \mathfrak{C} : \ \mathrm{dom}(f) = X, \ \mathrm{cod}(f) = Y\}.$$
Będziemy pisać $f : X \longrightarrow Y$ lub $X \xrightarrow{f} Y$, mając na myśli $f \in \mathfrak{C}(X, Y)$.

Strzałki ustalonej kategorii bywają nazywane *morfizmami*.

PRZYKŁAD 3 Zbiory quasi-uporządkowane. Quasi-porządkiem na X nazywamy relację $\leqslant \subseteq X \times X$ spełniającą

$(\forall x)$ (QP0) $x \leqslant x$ (zwrotność)

$(\forall x, y, z)$ (QP1) $x \leqslant y \ \& \ y \leqslant z \implies x \leqslant z$ (przechodniość)

Quasi-porządek $\leqslant$ nazywamy *porządkiem* (częściowym), jeśli dodatkowo spełnia

$(\forall x, y)$ (P) $x \leqslant y \ \& \ y \leqslant x \implies x = y$ (antysymetria)

Quasi-porządek $\leqslant$ nazywamy *liniowym*, jeśli spełnia

$(\forall x, y)$ (L) $x \leqslant y$ lub $y \leqslant x$.

\mathfrak{X} $\mathfrak{X}$

$<$ \langle
$>$ \rangle

Niech $\mathfrak{X} = \langle X, \leqslant \rangle$ będzie zbiorem quasi-uporządkowanym.
Wówczas $\mathfrak{X}$ jest kategorią, której zbiorem obiektów jest X, zaś strzałkami są elementy relacji $\leqslant$.
Dla $\langle x,y\rangle, \langle y,z\rangle \in \leqslant$ definiujemy $\mathrm{dom}(\langle x,y\rangle) = x$, $\mathrm{cod}(\langle x,y\rangle) = y$, oraz $\langle y,z\rangle \circ \langle x,y\rangle = \langle x,z\rangle$.
Przechodniość gwarantuje, że $\langle x,z\rangle \in \leqslant$.

Łączność:

$$(\langle z,u\rangle \circ \langle y,z\rangle) \circ \langle x,y\rangle = \langle y,u\rangle \circ \langle x,y\rangle = \langle x,u\rangle,$$
$$\langle z,u\rangle \circ (\langle y,z\rangle \circ \langle x,y\rangle) = \langle z,u\rangle \circ \langle x,z\rangle = \langle x,u\rangle.$$

Identyczności: $\mathrm{id}_x = \langle x,x\rangle$.

Mamy $\langle x,y\rangle \circ \mathrm{id}_x = \langle x,y\rangle \circ \langle x,x\rangle = \langle x,y\rangle$; tak samo $\mathrm{id}_x \circ \langle z,x\rangle = \langle z,x\rangle$.

FAKT 2 Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, w której dla każdych $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ zbiór $\mathcal{C}(X,Y)$ jest co najwyżej 1-elementowy. Wówczas $\mathcal{C}$ jest kategorią wyznaczoną jednoznacznie przez quasi-porządek, tak jak w Przykładzie 3.
Dokładniej, relacja $\leqslant$ zdefiniowana wzorem

$$X \leqslant Y \iff \mathcal{C}(X,Y) \neq \emptyset$$

jest quasi-porządkiem na $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ oraz strzałka $f: X \to Y$ odpowiada parze $\langle X, Y\rangle$.

DOWÓD. $X \leqslant X$, bo $\mathrm{id}_X \in \mathcal{C}(X,X)$, zatem $\mathcal{C}(X,X) \neq \emptyset$.
Jeśli $X \leqslant Y$, $Y \leqslant Z$, to $\mathcal{C}(X,Y) = \{f_{X,Y}\}$, $\mathcal{C}(Y,Z) = \{f_{Y,Z}\}$.
Wówczas $f_{Y,Z} \circ f_{X,Y} \in \mathcal{C}(X,Z)$, zatem $\mathcal{C}(X,Z) \neq \emptyset$, czyli $X \leqslant Z$.
Tak więc $\leqslant$ jest quasi-porządkiem.
Dla $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ niech $\mathcal{C}(X,Y) = \{f_{X,Y}\}$, jeśli tylko $X \leqslant Y$. Wówczas $f_{Y,Z} \circ f_{X,Y} = f_{X,Z}$, zatem składanie strzałek jest takie samo jak składanie par relacji $\leqslant$. $\blacksquare$

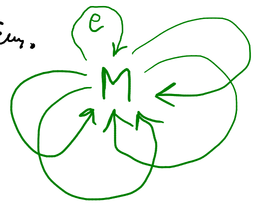
Kategorie spełniające założenia powyższego faktu nazywa się quasi-uporządkowanymi.
Ważnym przykładem jest zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ wraz z naturalnym porządkiem liniowym.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[loop below] & 1 \arrow[r] \arrow[loop below] & 2 \arrow[r] \arrow[loop below] & 3 \arrow[r] \arrow[loop below] & \cdots \end{tikzcd}$$

Przykład 4 Monoidy. Monoidem nazywamy strukturę $\langle M,\cdot,e\rangle$ taką, że $\cdot$ jest działaniem 2-argumentowym łącznym na M, e jest elementem neutralnym działania $\cdot$. Monoid $\langle M,\cdot,e\rangle$ wyznacza kategorię $\mathcal{M}$, w której $Ob(\mathcal{M})=\{M\}$ oraz $\mathcal{M}(M,M)=M$. Składaniem jest działanie $\cdot$, $id_M=e$.

Jeśli X,Y są obiektami ustalonej kategorii, to $id_X\circ id_Y$ istnieje $\Leftrightarrow X=Y$.

Fakt 3 Monoid to kategoria z jednym obiektem.



Konkretnym przykładem jest $(\mathbb{N},+,0)$.

Def. Niech X będzie obiektem kategorii $\mathcal{E}$. Definiujemy

$$End(X)=\mathcal{E}(X,X).$$

Elementy zbioru $End(X)$ nazywamy endomorfizmami obiektu X.

Fakt 4 $\langle End(X),\circ,id_X\rangle$ jest monoidem.

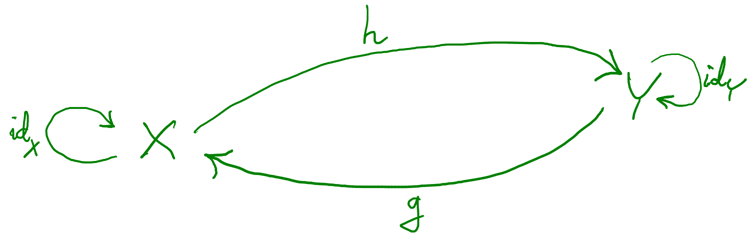
Def. Niech $\mathcal{E}$ będzie kategorią. Izomorfizmem nazywamy strzałkę $h\in\mathcal{E}$ dla której istnieje strzałka g spełniająca

$$h\circ g=id_{cod(h)},\qquad g\circ h=id_{dom(h)}.$$

Fakt 5 Jeśli $h:X\to Y$ jest izomorfizmem, to strzałka g spełniająca

(*) $h\circ g=id_Y$ i $g\circ h=id_X$

jest wyznaczona jednoznacznie.



Dowód. Przypuśćmy, że dodatkowo $h\circ g'=id_Y$ oraz $g'\circ h=id_X$. Wówczas

$$g=g\circ id_Y=g\circ(h\circ g')=(g\circ h)\circ g'=id_X\circ g'=g'. \blacksquare$$

Def. Jeśli g,h spełniają (*), to g nazywamy odwrotnością strzałki h i oznaczamy h^{-1}.

Fakt 6 Jeśli h_0,h_1 są izomorfizmami oraz $cod(h_1)=dom(h_0)$, to $h_0\circ h_1$ jest izomorfizmem oraz

$$(h_0\circ h_1)^{-1}=h_1^{-1}\circ h_0^{-1}.$$

Dowód. Mamy

$$(h_0\circ h_1)\circ(h_1^{-1}\circ h_0^{-1})=h_0\circ h_1\circ h_1^{-1}\circ h_0^{-1}=h_0\circ id_{cod(h_1)}\circ h_0^{-1}=h_0\circ h_0^{-1}=\overset{id_{cod(h_0\circ h_1)}}{\overset{\|}{id_{cod(h_0)}}}.$$

Podobnie

$$(h_1^{-1}\circ h_0^{-1})\circ(h_0\circ h_1)=h_1^{-1}\circ h_0^{-1}\circ h_0\circ h_1=id_{dom(h_1)}=id_{dom(h_0\circ h_1)}. \blacksquare$$

FAKT 7 Identyczności są izomorfizmami.

DEF. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Automorfizmem obiektu X nazywamy każdy izomorfizm typu $h: X \longrightarrow X$. Przyjmujemy oznaczenie

$$\mathrm{Aut}(X) = \{ h \in \mathrm{End}(X) : \ h \text{ jest izomorfizmem} \}.$$

FAKT 8 Dla każdego obiektu X kategorii $\mathcal{C}$, $\langle \mathrm{Aut}(X), \circ \rangle$ jest grupą. Jej elementem jest id_X.

DEF. Grupoidem nazywamy kategorię, w której każda strzałka jest izomorfizmem.

PRZYKŁAD 5 (a) W kategorii zbiorów, izomorfizmy to bijekcje.

Istotnie, niech $h: X \longrightarrow Y$ będzie taki, że istnieje $g: Y \longrightarrow X$ spełniające $g \circ h = id_X$, $h \circ g = id_Y$.

Dla $x_0 \neq x_1$ mamy $g \circ h(x_0) = x_0 \neq x_1 = g \circ h(x_1)$, zatem $h(x_0) \neq h(x_1)$.

[Jeśli $x_0, x_1 \in X$ i $h(x_0) = h(x_1)$, to $x_0 = g \circ h(x_0) = g(h(x_0)) = g(h(x_1)) = g \circ h(x_1) = x_1$.]

Tak więc h jest 1–1 (różnowartościowe).

Dla $y \in Y$ mamy $y = \cancel{g \circ h}^{\,h \circ g}(y) = \cancel{g}^{\,h}(\cancel{h}^{\,g}(y))$, zatem $y = g(x)$ dla $x = h(y)$. Tak więc h jest „na" (suriekcja).

Stąd h jest bijekcją i $g = h^{-1}$.

(b) W zbiorze quasi-uporządkowanym, izomorfizmy to pary $\langle x, y \rangle$ takie, że

$$x \leq y \quad \text{oraz} \quad y \leq x.$$

W zbiorze uporządkowanym jedynymi izomorfizmami są identyczności, czyli pary postaci $\langle x, x \rangle$.

DEF. Obiekty X, Y ustalonej kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy izomorficznymi, jeśli istnieje izomorfizm $h: X \longrightarrow Y$. Piszemy wtedy $X \approx Y$.

FAKT 9 Relacja $\approx$ jest równoważnością (tzn. jest zwrotna, symetryczna i przechodnia).

DOWÓD. Zwrotność: $X \approx X$, ponieważ $id_X : X \to X$ jest izomorfizmem.

Symetria: $X \approx Y \Rightarrow Y \approx X$, ponieważ jeśli $h: X \to Y$ jest izomorfizmem, to $h^{-1}: Y \to X$ jest izomorfizmem.

Przechodniość: $X \approx Y \ \& \ Y \approx Z \Rightarrow X \approx Z$, ponieważ złożenie izomorfizmów jest izomorfizmem (Fakt 6). ∎

PRZYKŁAD 6 (a) Kategoria grup: Obiekty to grupy. Strzałki to homomorfizmy grup.
(b) Kategoria przestrzeni wektorowych nad ustalonym ciałem K: Obiekty to przestrzenie wektorowe nad K. Strzałki to odwzorowania liniowe.
(c) Kategoria przestrzeni topologicznych **Top**: Obiekty to przestrzenie topologiczne. Strzałki to odwzorowania ciągłe. Izomorfizmy to homeomorfizmy.

DEF. Podkategorią kategorii $\mathfrak{C}$ nazywamy kategorię $\mathfrak{K}$ spełniającą
(0) $Ob(\mathfrak{K}) \subseteq Ob(\mathfrak{C})$,
(1) $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{C}$,
(2) Składanie w $\mathfrak{K}$ jest takie samo jak w $\mathfrak{C}$,
(3) $\forall X \in Ob(\mathfrak{K})$ $id_X^{\mathfrak{C}} \in \mathfrak{K}$. Innymi słowy, identyczności w $\mathfrak{K}$ są identycznościami w $\mathfrak{C}$.

Podkategorię $\mathfrak{K}$ kategorii $\mathfrak{C}$ będziemy nazywać pełną, jeśli
$$\forall X,Y \in Ob(\mathfrak{K}) \qquad \mathfrak{K}(X,Y) = \mathfrak{C}(X,Y).$$
Podkategorię $\mathfrak{K}$ nazywamy szeroką w $\mathfrak{C}$, jeśli $Ob(\mathfrak{K}) = Ob(\mathfrak{C})$.

DEF. Obiektem początkowym kategorii $\mathfrak{C}$ nazywamy obiekt E spełniający
$$\forall X \in Ob(\mathfrak{C}) \quad |\mathfrak{C}(E,X)| = 1.$$

$|S|$ oznacza moc zbioru S.

FAKT 10 Obiekt początkowy, o ile istnieje, jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

DOWÓD. Przypuśćmy, że E, E' są obiektami początkowymi w kategorii $\mathfrak{C}$. Wówczas
$\mathfrak{C}(E,E) = \{id_E\}$ oraz $\mathfrak{C}(E',E') = \{id_{E'}\}$.
Ponadto, $\mathfrak{C}(E,E') = \{h\}$, bo E jest początkowy.
Tak samo, $\mathfrak{C}(E',E) = \{g\}$, bo E' jest początkowy.
Z kolei $g \circ h \in \mathfrak{C}(E,E) = \{id_E\}$ oraz $h \circ g \in \mathfrak{C}(E',E') = \{id_{E'}\}$.
Tak więc $g \circ h = id_E$ oraz $h \circ g = id_{E'}$, zatem h jest izomorfizmem, czyli $E \cong E'$. ∎

PRZYKŁAD 7 W kategorii zbiorów obiektem początkowym jest zbiór pusty $\emptyset$.
Jakie są możliwe odwzorowania ze zbioru pustego?
$f: \emptyset \longrightarrow Y$ oznacza, że $f \subseteq \emptyset \times Y$ jest funkcją o dziedzinie $\emptyset$, o wartościach w Y.

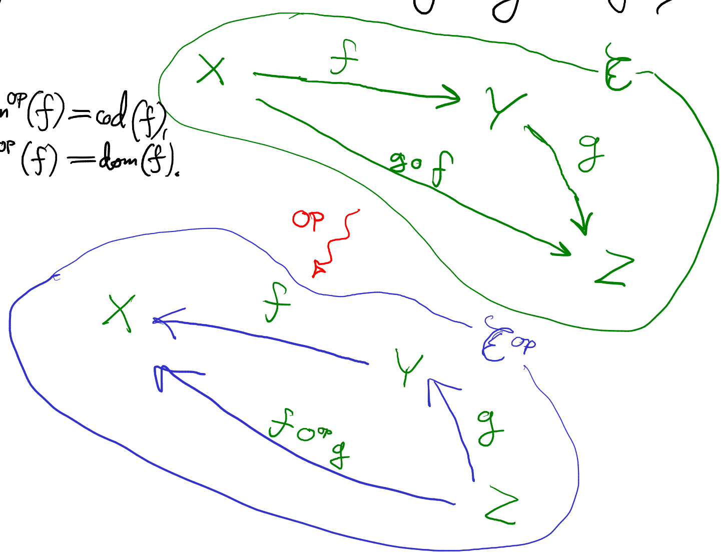
Tak więc, f spełnia
$$(\forall x\in\emptyset)(\exists!\, y\in Y)\ x f y.$$
Jest to skrót na formułę
$$(\forall x)\,[\underbrace{x\in\emptyset}_{\text{fałsz}} \Rightarrow (\exists!\, y\in Y)\ x f y].$$
Z tego wynika, że każde f spełnia powyższą formułę.
Z kolei
$$\emptyset\times Y=\emptyset, \quad \text{zatem} \quad f=\emptyset.$$

WNIOSEK: Jedyna funkcja z $\emptyset$ do Y jest funkcja pusta $\emptyset$.
Stąd, jedynym odwzorowaniem z $\emptyset$ do Y jest $\emptyset:\emptyset\longrightarrow Y$.

PRZYKŁAD 8 W kategorii grup, obiektem początkowym jest grupa trywialna (1-elementowa).

PRZYKŁAD 9 Niech $\langle X,\leqslant\rangle$ będzie zbiorem (quasi-)uporządkowanym, traktowanym jako kategoria. Obiektem początkowym jest element $s\in X$ spełniający
$$(\forall x\in X)\ s\leqslant x.$$
Tak więc, jest to najmniejszy element w $\langle X,\leqslant\rangle$.

DEF. Niech $\mathcal{E}$ będzie kategorią. Kategorią odwróconą (opposite category) do $\mathcal{E}$ nazywamy kategorię $\mathcal{E}^{op}$ zdefiniowaną następująco:
$$Ob(\mathcal{E}^{op}):=Ob(\mathcal{E}),$$
$$\mathcal{E}^{op}(X,Y):=\mathcal{E}(Y,X)$$
$$dom^{op}(f)=cod(f),\quad cod^{op}(f)=dom(f).$$



Składanie: $f\circ^{op} g := g\circ f$.

FAKT 11 Kategoria odwrócona jest kategorią. Ponadto
$$(\mathcal{E}^{op})^{op}=\mathcal{E}^{op}.$$
Izomorfizmy w $\mathcal{E}^{op}$ są te same co w $\mathcal{E}$.

DEF. Obiekt F kategorii $\mathcal{E}$ nazywamy końcowym, jeśli jest początkowy w $\mathcal{E}^{op}$.

FAKT 12 Obiekt końcowy, o ile istnieje, jest wyznaczony jednoznacznie, z dokładnością do izomorfizmu.

PRZYKŁAD 10 Obiektem końcowym w kategorii zbiorów jest zbiór 1-elementowy.
Istotnie, niech $F=\{a\}$ i ustalmy zbiór X.

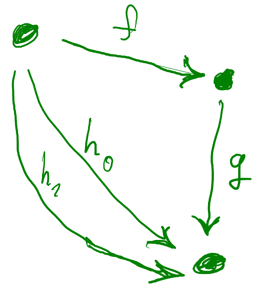
Ustalmy odwzorowanie $f\colon X \longrightarrow F$. Wówczas $(\forall x\in X)\ f(x)=a$. Stąd f jest funkcją stałą równą a. Tak więc f jest wyznaczone jednoznacznie.

PRZYKŁAD 11 W kategorii grup, obiektem końcowym jest grupa trywialna.

PRZYKŁAD 12 W zbiorze (quasi-)uporządkowanym, obiekt końcowy to element największy.

KATEGORIA ŚCIEŻEK

Ustalmy graf skierowany $\mathbb{G} = \langle V, A, dom, cod\rangle$.

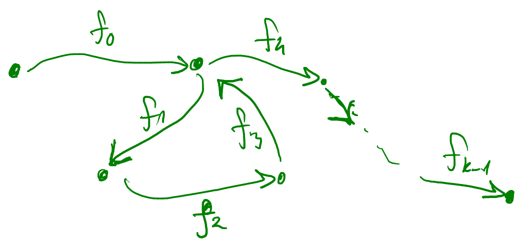


Ścieżką w $\mathbb{G}$ nazywamy ciąg postaci

$$\vec{f} = \langle f_0, f_1, \dots, f_{k-1}\rangle,$$

gdzie $f_0,\dots,f_{k-1}\in A$ oraz $dom(f_{i+1}) = cod(f_i)$ dla $i<k-1$.

Wierzchołek $dom(f_0)$ nazywamy początkiem ścieżki $\vec{f}$ a $cod(f_{k-1})$ nazywamy końcem ścieżki $\vec{f}$. Liczbę k nazywamy długością ścieżki $\vec{f}$.



Ścieżką od wierzchołka A do wierzchołka B nazywamy ścieżkę, której początkiem jest A, a końcem jest B.

Złożeniem ścieżek $\vec{f} = \langle f_0,\dots,f_{k-1}\rangle$, $\vec{g} = \langle g_0,\dots,g_{l-1}\rangle$ nazywamy ścieżkę

$$\vec{f}\circ\vec{g} := \langle g_0,\dots,g_{l-1}, f_0,\dots,f_{k-1}\rangle,$$ pod warunkiem, że $cod(g_{l-1}) = dom(f_0)$.

FAKT 13 Składanie ścieżek jest łączne.

Dla każdego wierzchołka $X\in V$ definiujemy „pustą" ścieżkę od X do X i oznaczamy ją id_X.

TWIERDZENIE 1 Niech $\mathbb{G} = \langle V, A, dom, cod\rangle$ będzie grafem skierowanym. Wówczas zbiór wszystkich ścieżek w $\mathbb{G}$ jest kategorią zawierającą $\mathbb{G}$ jako podgraf.

DEF. Kategorię ścieżek nad $\mathbb{G}$ oznaczamy $\mathbb{F}(\mathbb{G})$ i nazywamy kategorią wolną nad $\mathbb{G}$.
