STRUKTURY GENERYCZNE

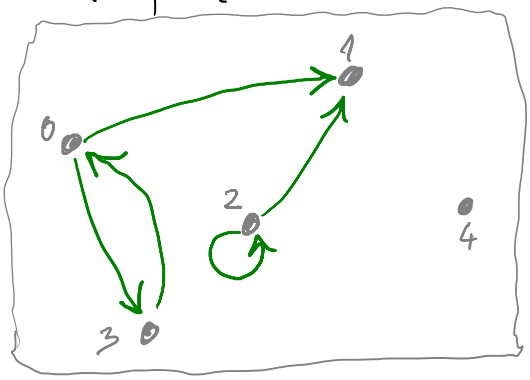
GRAFY

DEF. Grafem prostym skierowanym nazywamy parę (X, E) taką, że X jest zbiorem, $E \subseteq X^2$. Elementy zbioru X nazywamy wierzchołkami, a elementy relacji E nazywamy strzałkami lub krawędziami skierowanymi. Para $(x, x) \in E$ nazywa się pętlą.

PRZYKŁAD 1

$X = \{0,1,2,3,4\}$,

$E = \{(0,1), (0,3), (2,1), (2,2), (3,0)\}$.



DEF. Grafem prostym (nieskierowanym) nazywamy graf (X, E) taki, że relacja E jest symetryczna i antyzwrotna, tzn.

$$(\forall x, y \in X) \quad (x,y) \in E \Rightarrow (y,x) \in E. \qquad \text{(symetria)}$$

$$(x \in X) \quad (x,x) \notin E. \qquad \text{(antyzwrotność)}$$

Elementy relacji E nazywamy krawędziami.

UWAGA 1 Graf prosty bywa zazwyczaj definiowany jako para $(X, \tilde{E})$, gdzie $\tilde{E}$ jest rodziną podzbiorów 2-elementowych zbioru X.

Mamy oczywistą zależność:

$$\left.\begin{array}{l} E \subseteq X^2 \\ \text{relacja symetryczna} \\ \text{antyzwrotna} \end{array}\right] \Rightarrow \quad \tilde{E} := \{\{x,y\} : (x,y) \in E\} \text{ jest rodziną 2-elementowych}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{E} - \text{rodzina} \\ \text{zbiorów 2-elementowych} \end{array}\right] \Rightarrow \quad E := \{(x,y) : \{x,y\} \in \tilde{E}\} \text{ jest relacją symetryczną, antyzwrotną.}$$

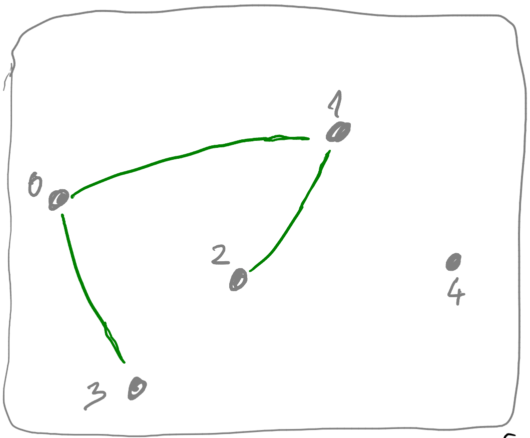
FAKT 1 Każdy graf skierowany prosty wyznacza (jednoznacznie) graf prosty. Dokładniej, jeśli (X, E) jest grafem prostym skierowanym, to $(X, \hat{E})$ jest grafem prostym, gdzie

$$\hat{E} = \{ (x,y) : \ x \neq y \ \text{ oraz } \left[(x,y) \in E \ \text{ lub } \ (y,x) \in E \right] \}.$$

PRZYKŁAD 2

$X = \{0,1,2,3,4\}$,

$\hat{E} = \{(0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (0,3), (3,0)\}$.



UWAGA 2 Graf skończony na zbiorze $\{1,2,\ldots,n\}$ (lub $\{0,1,\ldots,n-1\}$) można opisać za pomocą macierzy $n \times n$ o wartościach w zbiorze $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$. Macierze symetryczne z zerową przekątną odpowiadają grafom prostym nieskierowanym.

PRZYKŁAD 3

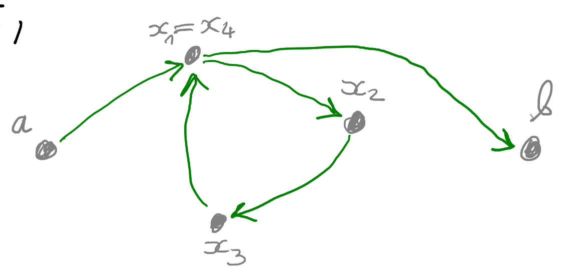
$$(X,E) \longleftrightarrow \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (X,\hat{E}) \longleftrightarrow \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

DEF. Ścieżką od a do b (długości n) w grafie (X,E) nazywamy ciąg strzałek (krawędzi)

$$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in E,$$

gdzie $x_0 = a$, $x_n = b$.

Jeśli $a = b$, to powyższą ścieżkę nazywamy cyklem.



Ścieżkę nazywamy nieredukowalną, jeśli nie ma powtórzeń, tzn. $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

Graf (X,E) nazywamy spójnym, jeśli dla każdych $a, b \in X$, $a \neq b$, istnieje ścieżka od a do b.

GRAFY PROSTE JAKO PRZESTRZENIE METRYCZNE

PRZYPOMNIENIE. Metryką na zbiorze X nazywamy funkcję $\varrho : X^2 \to [0, +\infty)$ spełniającą

$$(M0) \quad \varrho(x,y) = 0 \iff x = y \qquad \text{(zwrotność)}$$

$$(M1) \quad \varrho(y,x) = \varrho(x,y) \qquad \text{(symetria)}$$

$$(M2) \quad \varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y) \qquad \text{(warunek trójkąta)}$$

Kulą otwartą [domkniętą] o środku w $x_0 \in X$ i promieniu $r \geq 0$ nazywamy zbiór

$$B_r(x_0) := \{x \in X : \varrho(x_0, x) < r\} \qquad \left[\overline{B}_r(x_0) := \{x \in X : \varrho(x_0, x) \leq r\}\right].$$

(kula otwarta) (kula domknięta)

DEF. Metryką naturalną na grafie prostym (X, E) nazywamy funkcję $\varrho_E : X^2 \to \{0,1,2\}$ zdefiniowaną wzorem

$$\varrho(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x = y, \\ 1, & \text{jeśli } (x,y) \in E, \\ 2, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

FAKT 2 ϱ_E jest metryką na X. (Graf (X,E) jest nieskierowany!)

Ponadto,

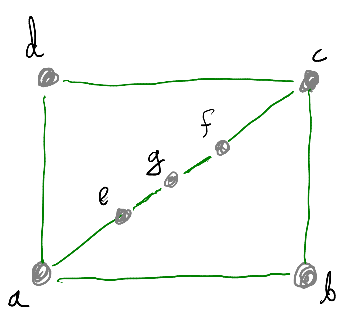
$$x E y \iff \varrho(x,y) = 1.$$

DEF. Niech (X,E) będzie grafem prostym spójnym. Metryką ścieżkową na (X,E) nazywamy funkcję $\delta_E : X^2 \to [0, +\infty)$ zdefiniowaną wzorem

$$\delta_E(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x = y, \\ n, & \text{jeśli } x \neq y \text{ oraz } n \text{ jest długością najkrótszej ścieżki od } x \text{ do } y. \end{cases}$$

FAKT 3 δ_E jest metryką na X. Ponadto $x E y \iff \delta_E(x,y) = 1$.

PRZYKŁAD 4

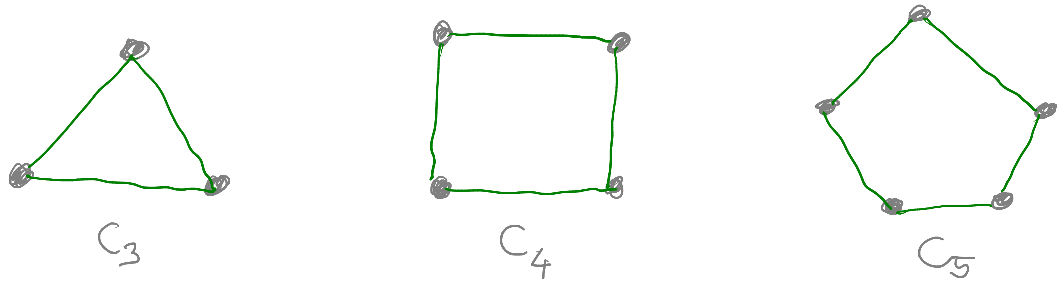


$$\delta_E(b, g) = 3$$

$$\varrho_E(b, g) = 2.$$

PRZYKŁAD 5 Cyklem n-elementowym $(n \geq 3)$ nazywamy graf C_n o wierzchołkach $v_1, \dots, v_n$ oraz zbiorze krawędzi

$$E = \{ (v_i, v_j) : \quad |i-j| = 1 \quad \text{lub} \quad \{i,j\} = \{1,n\} \}.$$

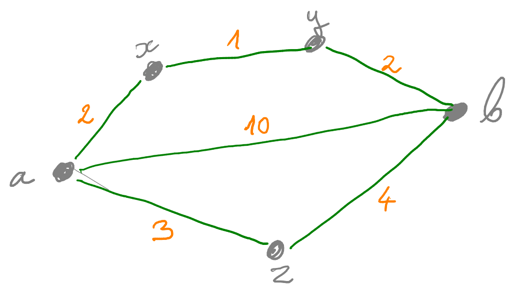


PYTANIE: Jaka jest średnica cyklu C_n w metryce ścieżkowej?

UWAGA 3 Rozważa się też grafy proste (skończone) z wagą, czyli funkcją w przypisującą krawędzi (x,y) liczbę dodatnią $w(x,y)$, przy czym zakładamy $w(x,y) = w(y,x)$.
To indukuje wagę każdej ścieżki i możemy zdefiniować $\delta_E(x,y)$ jako minimum wag ścieżek od x do y. Jest to metryka.

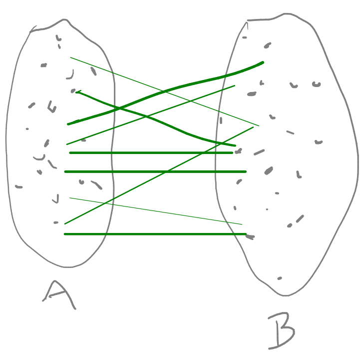
Przykład:

$$\delta_E(a,b) = 2+1+2 = 5,$$
$$\delta_E(y,z) = 2+4 = 1+2+3 = 6$$
$$\delta_E(x,z) = 2+3 = 5.$$



DEF. Grafem dwudzielnym nazywamy graf prosty (X, E) taki, że istnieje rozbicie $\{A, B\}$ zbioru X (tzn. $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$) o własności, że

$$\forall (x,y) \in E \qquad (x \in A \text{ i } y \in B) \text{ lub } (y \in A \text{ i } x \in B).$$



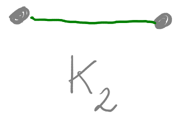
Graf (X,E) nazywamy dyskretnym, jeśli $E = \emptyset$.
Graf dyskretny jest dwudzielny.

Graf (X,E) nazywamy zupełnym (pełnym), jeśli $E = X^2 \setminus \{(x,x) : x \in X\}$. Innymi słowy, w grafie zupełnym każde dwa różne wierzchołki są połączone krawędzią.

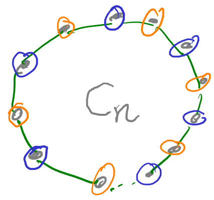
Przez K_n będziemy oznaczać graf zupełny mający dokładnie n wierzchołków, $n \geq 2$.

Fakt 4 (1) Graf zupełny K_n jest dwudzielny $\iff n \leq 2$.

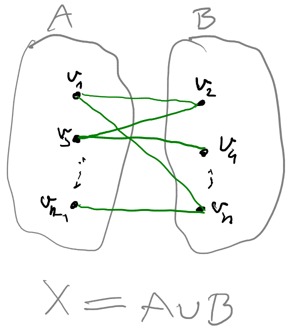
(2) Cykl C_n jest dwudzielny $\iff n$ jest parzyste.



Twierdzenie 1 Graf prosty (X,E) jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy cykl w (X,E) ma długość parzystą.



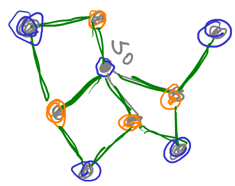
Dowód. Załóżmy, że (X,E) jest dwudzielny, $X = A \cup B$, jak w definicji. Niech $(v_1, \ldots, v_n)$ będzie cyklem. Możemy założyć, że $v_1 \in A$. Wówczas $v_2 \in B$, $v_3 \in A$, itd. Indukując, $v_i \in A$ dla i nieparzystego, $v_i \in B$ dla i parzystego. Ponadto $v_n \in B$, zatem n jest parzyste.



Załóżmy teraz, że każdy cykl w (X,E) ma długość nieparzystą. Załóżmy dodatkowo, że (X,E) jest spójny. Wybierzmy $v_0 \in X$. Niech

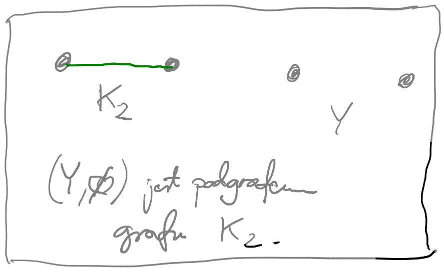
$$A = \{x \in X : \delta_E(v_0, x) \text{ jest parzysta}\}, \qquad B = X \setminus A.$$

Wówczas $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$ oraz nie ma krawędzi w zbiorze A ani w zbiorze B. Istotnie, gdyby np. $a_1, a_2 \in A$ były połączone krawędzią, to ścieżka od v_0 do a_1, krawędź (a_1, a_2), oraz ścieżka od a_2 do v_0 tworzą cykl długości nieparzystej. Tak samo w przypadku zbioru B.



Jeśli X nie jest spójny, to jest sumą rozłączną podgrafów indukowanych spójnych, zatem dwudzielność wynika z powyższych rozważań. ■

Def. Niech (X,E) będzie grafem. Podgrafem nazywamy graf (Y,F) taki, że $Y \subseteq X$, $F \subseteq E$. Podgrafem indukowanym nazywamy graf (Y,F) spełniający $Y \subseteq X$ oraz $F = E \cap Y^2$.



Składową spójności grafu (X,E) nazywamy maksymalny (w sensie zawierania) podgraf indukowany spójny.

Twierdzenie 2 (1) Dwie różne składowe spójności ustalonego grafu są rozłączne.

(2) Każdy graf jest sumą rozłączną składowych spójności.

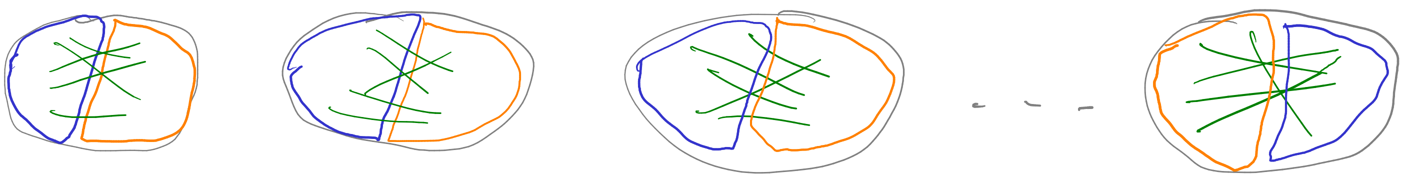
Dowód. Ad (1). Niech Y_1, Y_2 będą składowymi spójności grafu (X,E) takimi, że istnieje $v_0 \in Y_1 \cap Y_2$. Wówczas $Y_1 \cup Y_2$ jest podgrafem indukowanym spójnym, bo dla $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$ suma ścieżek od y_1 do v_0 oraz od v_0 do y_2 daje ścieżkę od y_1 do y_2. Stąd $Y_1 = Y_1 \cup Y_2 = Y_2$.

Ad (2). Niech $\mathcal{C} \neq \emptyset$ będzie łańcuchem podgrafów indukowanych spójnych, tzn. $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \subseteq C_2$ lub $C_2 \subseteq C_1$. Niech $Y = \bigcup \mathcal{C}$. Wówczas Y jest podgrafem indukowanym spójnym. Istotnie, dla $y_1, y_2 \in Y$ znajdziemy $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ takie, że $y_1 \in C_1$, $y_2 \in C_2$. Niech $C = C_1 \cup C_2 \in \{C_1, C_2\}$. Jest to podgraf indukowany spójny zawierający y_1, y_2, zatem zawiera też ścieżkę od y_1 do y_2. Ścieżka ta jest oczywiście zawarta w Y. Tak więc Y jest spójny.

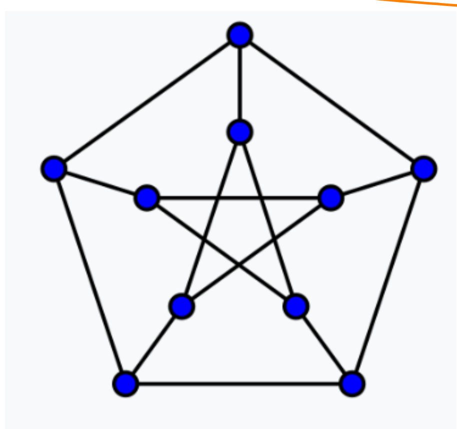
Pokazaliśmy, że rodzina podgrafów indukowanych spójnych (wraz z inkluzją $\subseteq$) spełnia założenia lematu Kuratowskiego–Zorna, zatem każdy jej element zawiera się w elemencie maksymalnym, czyli składowej spójności.

Innymi słowy, każdy podgraf indukowany spójny zawiera się w składowej spójności. W szczególności, dla każdego $v \in X$, podgraf $\{v\}$ jest spójny, zatem zawiera się w składowej spójności. Stąd $X = \bigcup \mathcal{S}$, gdzie $\mathcal{S}$ jest rodziną składowych spójności grafu (X,E). Z (1) wynika, że
$$\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S} \quad (S_1 \neq S_2 \Longrightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset). \quad \blacksquare$$

Fakt 5 Graf jest dwudzielny $\Longleftrightarrow$ każda jego składowa spójności jest grafem dwudzielnym.



Składowe spójności.

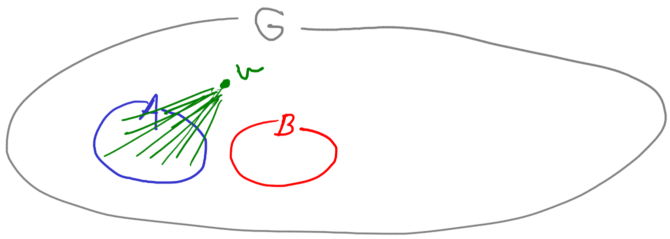


Przykład 6 Graf Petersena:

GRAF LOSOWY

DEF. (RADO, ERDŐS + RENYI ≈ 1960) Grafem losowym (grafem Rado) nazywamy graf (G, E) taki, że G jest zbiorem przeliczalnym oraz spełniony jest następujący warunek.

(R) Dla każdych podzbiorów skończonych rozłącznych $A, B \subseteq G$ istnieje $v \in G \setminus (A \cup B)$ taki, że $(v, a) \in E$ dla każdego $a \in A$ oraz $(v, b) \notin E$ dla każdego $b \in B$.



TWIERDZENIE 3 (RADO) Niech $(\mathbb{N}, E)$ będzie grafem zdefiniowanym następująco. Dla $k < l$ przyjmujemy $k E l \iff$ cyfra na miejscu k w rozwinięciu dwójkowym liczby l wynosi 1.

Wówczas $(\mathbb{N}, E)$ jest grafem losowym.

$l = (1100100)_{(2)}$

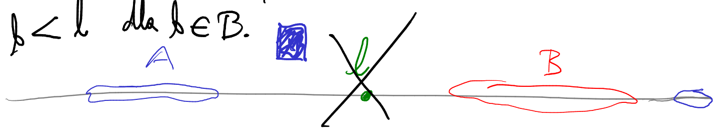
$k = (110)_{(2)}$

DOWÓD. Ustalmy zbiory skończone rozłączne $A, B \subseteq \mathbb{N}$.

Możemy założyć, że $\max A > \max B$, w razie czego powiększając zbiór A.

Niech $l = \sum_{a \in A} 2^a$. Wówczas $a E l$ dla $a \in A$, ponieważ $a < l$ dla $a \in A$.

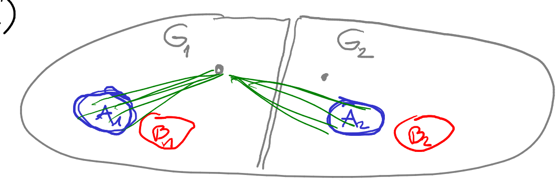
Ponadto $\neg (b E l)$ dla $b \in B$, ponieważ $b < l$ dla $b \in B$.



TWIERDZENIE 4 Graf losowy (G,E) jest niepodzielny w następującym sensie. Jeśli $G = G_1 \cup G_2$, to przynajmniej jeden z podgrafów indukowanych G_1 lub G_2 jest grafem losowym.

DOWÓD. Przypuśćmy, że ani G_1 ani G_2 nie są losowe. To znaczy, że istnieją pary zbiorów rozłącznych skończonych (A_1, B_1), (A_2, B_2) takie, że $A_i, B_i \subseteq G_i$, dla $i = 1,2$ oraz nie istnieje wierzchołek $v_i \in G_i$ realizujący warunek (R) w grafie G_i, dla $i = 1,2$.

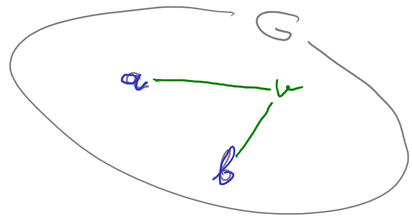
Niech $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$. Stosując (R) znajdujemy $v \in G$ połączony z wszystkimi elementami zbioru A oraz niepołączony z żadnym elementem zbioru B.



To prowadzi do sprzeczności, bo jeśli $v \in G_i$ ($i=1$ lub $i=2$), to v realizuje warunek (R) dla pary (A_i, B_i). ■

FAKT 6 Graf losowy jest spójny i ma średnicę 2 (ze względu na metrykę ścieżkową).

DOWÓD. Ustalmy $a \neq b$ w grafie losowym (G,E). Stosując warunek (R) dla $A := \{a,b\}$, $B = \emptyset$, dostajemy $v \in G$ takie, że $a E v$ i $v E b$. To daje nam ścieżkę długości 2 od a do b. ■

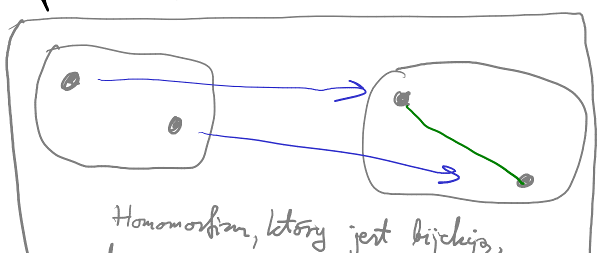


DEF. Homomorfizmem grafów (G,E), (G',E') nazywamy odwzorowanie $f: G \to G'$ spełniające

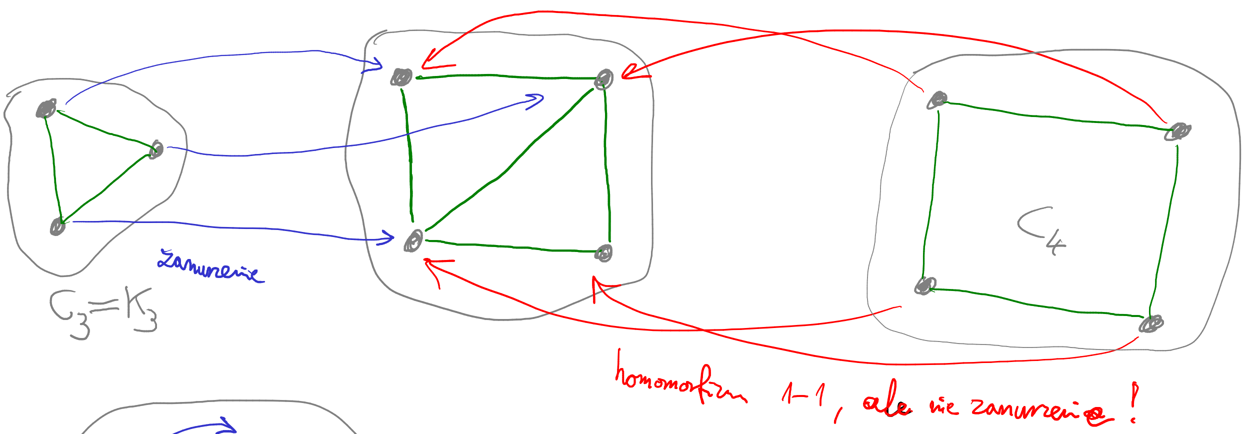
$$\forall x_1, x_2 \in G \quad \left(x_1 E x_2 \implies f(x_1) E' f(x_2) \right).$$

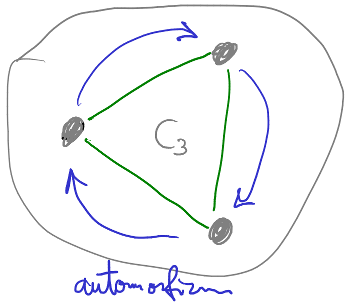
Homomorfizm $f: (G,E) \to (G',E')$ nazywamy izomorfizmem grafów, jeśli f jest bijekcją oraz $f^{-1}: G' \to G$ jest homomorfizmem.

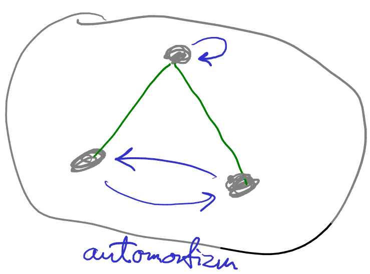
Izomorfizm $f: (G,E) \to (G,E)$ nazywamy automorfizmem.


Homomorfizm, który jest bijekcją, ale nie jest izomorfizmem.

Zanurzeniem grafu (G,E) w graf (G',E') nazywamy homomorfizm $f: (G,E) \to (G',E')$, (który jest różnowartościowy oraz) jest izomorfizmem z (G,E) na podgraf indukowany $f[G]$.







TWIERDZENIE 5 Graf losowy jest jedynym, z dokładnością do izomorfizmu, grafem przeliczalnym $\mathcal{R}$, z następującą własnością przedłużania.

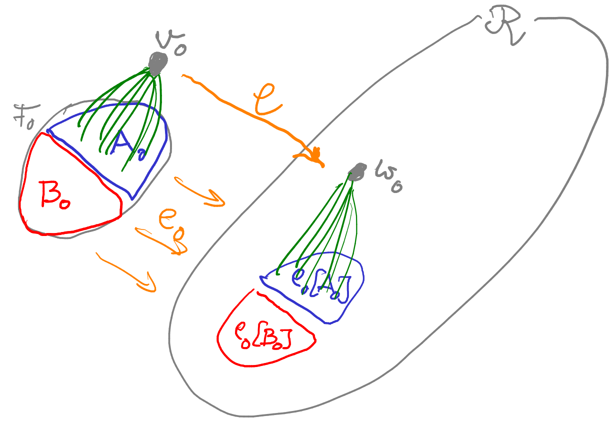
(P) Dla każdego grafu skończonego F, jego podgrafu indukowanego $F_0 \subseteq F$, każde zanurzenie $e_0 : F_0 \to \mathcal{R}$ przedłuża się do zanurzenia $e : F \to \mathcal{R}$.

DOWÓD (SZKIC). Niech $\mathcal{R}$ będzie (jakimkolwiek) grafem losowym. Ustalmy $F_0 \subseteq F$. Indukcja ze względu na $|F \setminus F_0|$.

Załóżmy, że $F = F_0 \cup \{v_0\}$. Niech $A_0 = \{x \in F_0 : x E v_0\}$, $B_0 = F_0 \setminus A_0$.
Warunek (R) daje wierzchołek $w_0 \in \mathcal{R} \setminus e_0[A_0 \cup B_0]$ taki, że

$(\forall a \in A_0)\ e_0(a) E w_0$,

$(\forall b \in B_0)\ e_0(b) \not E w_0$.



Niech $e : F \to \mathcal{R}$ będzie określone jako

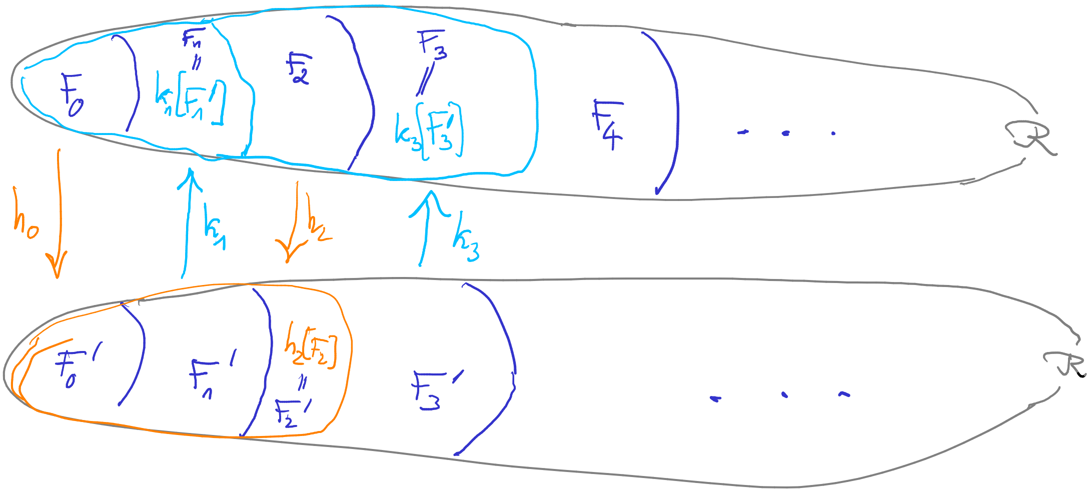
$e|F_0 = e_0$, $e(v_0) = w_0$.

Wówczas e jest zanurzeniem przedłużającym e_0.

Dalej, prosta indukcja załatwia sprawę.

Jedyność. Ustalmy grafy losowe $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ oraz izomorfizm $h_0 : F_0 \to F_0'$, gdzie F_0, F_0' są podgrafami indukowanymi odpowiednio w $\mathcal{R}$ i w $\mathcal{R}'$.

Pokażemy, że h_0 przedłuża się do izomorfizmu $h : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$.



1. $h_0^{-1} : F_0' \xrightarrow{\approx} F_0$.
   k_1 przedłuża h_0^{-1}.
2. $k_1^{-1} : F_1 \xrightarrow{\approx} F_1'$.
   h_2 przedłuża k_1^{-1}.
3. $h_2^{-1} : F_2' \xrightarrow{\approx} F_2$
   k_3 przedłuża h_2^{-1}.

Powyższą konstrukcję można poprowadzić tak, aby $\bigcup_n F_n = \mathcal{R}$, $\bigcup_n F_n' = \mathcal{R}'$.

$(\forall n)$ h_{2n+2} przedłuża h_{2n} oraz k_{2n+3} przedłuża k_{2n+1}.

Na końcu mamy zanurzenia $h : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$, $k : \mathcal{R}' \to \mathcal{R}$ przedłużające wszystkie h_n, k_n odpowiednio. Ponadto $h \circ k = id_{\mathcal{R}'}$, $k \circ h = id_{\mathcal{R}}$, zatem h jest izomorfizmem.

Ustalając $v_0 \in \mathcal{R}$, $v_0' \in \mathcal{R}'$ mamy izomorfizm $h_0 : \{v_0\} \xrightarrow{\cong} \{v_0'\}$, zatem $\mathcal{R} \cong \mathcal{R}'$. $\blacksquare$

TWIERDZENIE 6 Każdy graf przeliczalny zanurza się w graf losowy.

DOWÓD. Ustalmy graf przeliczalny X; niech $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, gdzie $X_0 = \{v_0\}$, $X_n \subseteq X_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz grafy X_n są skończone. Mamy zanurzenie $e_0 : X_0 \to \mathcal{R}$. Warunek (P) z poprzedniego twierdzenia daje nam metodę przedłużania indukcyjnie do zanurzeń $e_n : X_n \longrightarrow \mathcal{R}$. Ostatecznie $e := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} e_n$ jest zanurzeniem grafu X w $\mathcal{R}$. $\blacksquare$