FUNKTORY

DEF. Funktorem kowariantnym z kategorii $\mathbb{K}$ w kategorię $\mathcal{L}$ nazywamy odwzorowanie $F: \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ (wraz z odwzorowaniem $F: Ob(\mathbb{K}) \longrightarrow Ob(\mathcal{L})$) spełniające

$$(F1) \quad F(id_X) = id_{F(X)}, \quad \text{dla } X \in Ob(\mathbb{K}).$$

$$(F2) \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g), \text{ dla } f, g \in \mathbb{K} \text{ takich, że } dom(f) = cod(g).$$

W szczególności, jeśli $f: X \longrightarrow Y$ w $\mathbb{K}$, to $F(f): F(X) \longrightarrow F(Y)$ w $\mathcal{L}$.

DEF. Funktorem kontrawariantnym z kategorii $\mathbb{K}$ w kategorię $\mathcal{L}$ nazywamy każdy funktor kowariantny z $\mathbb{K}$ w $\mathcal{L}^{op}$.

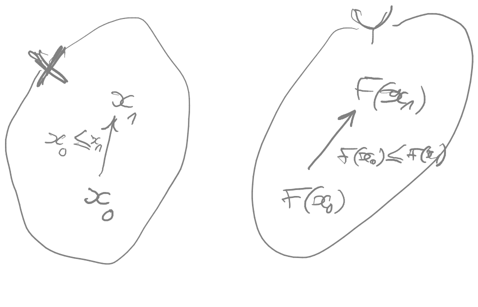
Tak więc, $F: \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ jest funktorem kontrawariantnym, jeśli dla każdej strzałki $f: X \longrightarrow Y$ w $\mathbb{K}$, $F(f): F(Y) \longrightarrow F(X)$, $F(id_X) = id_{F(X)}$, oraz $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ dla $f, g \in \mathbb{K}$ takich, że $dom(f) = cod(g)$.

FAKT 1 (1) Złożenie dwóch funktorów jest funktorem.

(2) Jeśli $\mathbb{K}$ jest podkategorią kategorii $\mathcal{L}$, to odwzorowanie $F: \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{L}$, dane wzorem $F(f) = f$, $F(X) = X$ dla $f \in \mathbb{K}$, $X \in Ob(\mathbb{K})$, jest funktorem kowariantnym.

PRZYKŁAD 1 Niech $(X, \leq_X)$, $(Y, \leq_Y)$ będą zbiorami (quasi-)uporządkowanymi, traktowanymi jako kategorie. Wówczas $F: X \to Y$ jest funktorem kowariantnym $\iff$

$$\forall x_0, x_1 \in X \left(x_0 \leq_X x_1 \implies F(x_0) \leq_Y F(x_1) \right).$$



Z kolei $F: X \longrightarrow Y$ jest funktorem kontrawariantnym

$$\iff \forall x_0, x_1 \in X \left(x_0 \leq_X x_1 \implies F(x_0) \geq_Y F(x_1) \right).$$

PRZYKŁAD 2 Niech $(A, \cdot, \mathbb{1})$, $(B, *, e)$ będą monoidami. Wówczas funktorem kowariantnym z A do B jest homomorfizm monoidów, tzn. odwzorowanie $F: A \longrightarrow B$ spełniające

(1) $F(\mathbb{1}) = e$,

(2) $F(a_1 \cdot a_2) = F(a_1) * F(a_2)$.

$F: A \to B$ jest funktorem kontrawariantnym, jeśli

(1) $F(\mathbb{1}) = e$,

(2') $F(a_1 \cdot a_2) = F(a_2) * F(a_1)$.

Przykład 3 Niech $\mathbb{M} = (M, \bullet, 1)$ będzie monoidem, traktowanym jako kategoria. Wówczas $\mathbb{M}^{op} = (M, \tilde{\bullet}, 1)$, gdzie $\tilde{\bullet}$ jest zdefiniowana wzorem

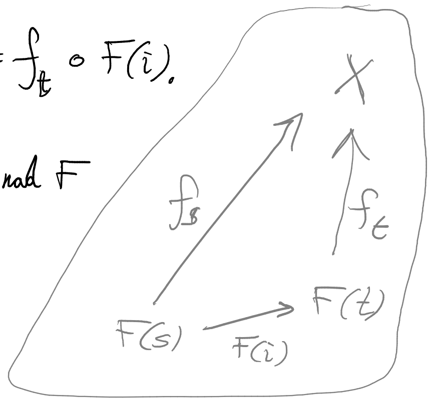
$$x \,\tilde{\bullet}\, y := y \bullet x \quad \text{dla } x, y \in M.$$

Kogranice

Def. Niech $\mathcal{S}$ będzie kategorią małą, tzn. $Ob(\mathcal{S})$ jest zbiorem. Niech $F: \mathcal{S} \to \mathcal{K}$ będzie funktorem kowariantnym. Kostożkiem nad F nazywamy parę $(X, \{f_s\}_{s \in Ob(\mathcal{S})})$, gdzie

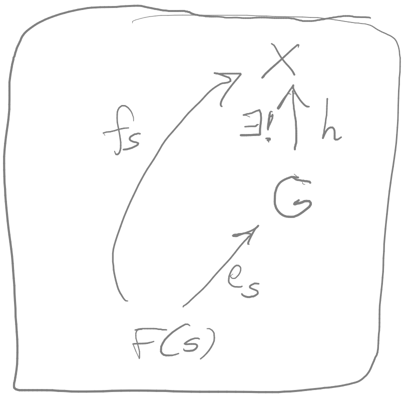
(KS0) $X \in Ob(\mathcal{K})$, $f_s : F(s) \longrightarrow X$ w $\mathcal{K}$,

(KS1) $\forall s, t \in Ob(\mathcal{S})\ \forall i : s \to t$ w $\mathcal{S}$, $\quad f_s = f_t \circ F(i)$.



Kogranicą funktora F nazywamy kostożek $(G, \{e_s\}_{s \in Ob(\mathcal{S})})$ nad F taki, że dla każdego kostożka $(X, \{f_s\}_{s \in Ob(\mathcal{S})})$ nad F istnieje dokładnie jedna strzałka $h : G \longrightarrow X$ w $\mathcal{K}$ spełniająca

(KG) $\forall s \in Ob(\mathcal{S}) \quad f_s = h \circ e_s.$



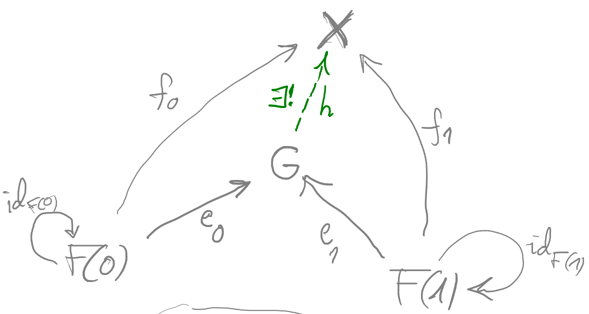
Przykład 4 Niech $\mathcal{S}$ będzie kategorią złożoną z dwóch obiektów $0, 1$ z jedynymi strzałkami id_0, id_1.

Niech $F : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}et$ będzie funktorem, gdzie $\mathcal{S}et$ oznacza kategorię zbiorów.

Czym jest kogranica funktora F?

Dla ułatwienia załóżmy, że

$$F(0) \cap F(1) = \emptyset.$$



Niech $G = F(0) \cup F(1)$, niech $e_i : F(i) \to G$ będzie tożsamościowe $(i = 0, 1)$.

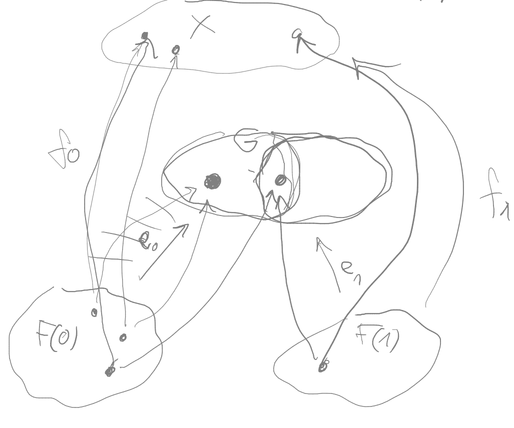
$e_i(x) = x$ dla $x \in F(i)$.

Ustalmy kostożek $(X, \{f_0, f_1\})$ nad F.

Załóżmy, że $h : G \longrightarrow X$ spełnia (KG), czyli

$h \circ e_0 = f_0, \quad h \circ e_1 = f_1.$

To oznacza, że $h|F(0) = f_0$, $h|F(1) = f_1$.



Skoro $F(0) \cap F(1) = \emptyset$, powyższe warunki jednoznacznie definiują odwzorowanie h na $F(0) \cup F(1) = G$.

Tak więc $(G, \{e_0, e_1\})$ jest kogranicą funktora F.

FAKT 2 Kogranica funktora $F: \mathfrak{S} \to \mathbb{K}$ jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Dokładniej, jeśli $(G, \{e_s\}_{s\in Ob(\mathfrak{S})})$, $(G', \{e'_s\}_{s\in Ob(\mathfrak{S})})$ spełniają definicję kogranicy, to istnieje dokładnie jeden izomorfizm $h: G \to G'$ taki, że

$$\forall s\in Ob(\mathfrak{S}) \qquad h\circ e_s = e'_s .$$

$$\begin{tikzcd}
 & G' \\
F(s) \arrow[ur, "e'_s"] \arrow[r, "e_s"'] & G \arrow[u, "h"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

Dowód. Kostożki nad F tworzą kategorię. Strzałką od $(X, \{f_s\}_{s\in Ob(\mathfrak{S})})$ do $(Y, \{g_s\}_{s\in Ob(\mathfrak{S})})$ jest strzałka $h\in \mathbb{K}(X,Y)$ spełniająca

$$\forall s\in Ob(\mathfrak{S}) \qquad h\circ f_s = g_s .$$

Składaniem jest składanie strzałek w $\mathbb{K}$. Kogranica jest obiektem początkowym kategorii kostożków nad F. ■

$$\begin{tikzcd}
 & Y \\
F(s) \arrow[ur, "g_s"] \arrow[r, "f_s"'] & X \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

DEF. Kategorię dyskretną nazywamy kategorię małą, w której jedyne strzałki, to identyczności. Tak więc kategorię dyskretną możemy utożsamić z jej zbiorem obiektów.

Niech $\mathfrak{S}$ będzie kategorią dyskretną. Wówczas każde odwzorowanie $F: Ob(\mathfrak{S}) \to Ob(\mathbb{K})$ wyznacza funktor $F: \mathfrak{S} \to \mathbb{K}$, który jest jednocześnie kowariantny i kontrawariantny.

KOPRODUKT

DEF. Niech S będzie zbiorem niepustym, traktowanym jako kategoria dyskretna. Niech $\mathbb{K}$ będzie kategorią, $F: S \to \mathbb{K}$ funktorem, to znaczy mamy zadaną rodzinę obiektów $\{F(s)\}_{s\in S}$. Kogranicę funktora F nazywamy koproduktem rodziny $\{F(s)\}_{s\in S}$.

PRZYKŁAD 5 W kategorii zbiorów koproduktami są sumy rozłączne. Formalnie, niech $\{X_s\}_{s\in S}$ będzie rodziną zbiorów. Niech

$$G = \bigcup_{s\in S} (X_s \times \{s\}), \qquad e_s: X_s \to G, \qquad e_s(x) = (x, s).$$

Wówczas $(G, \{e_s\}_{s\in S})$ jest koproduktem rodziny $\{X_s\}_{s\in S}$.

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
 & G \arrow[u, dashed, "\exists!\, h"] & \\
F(s) \arrow[uur, bend left, "f_s"] \arrow[ur, "e_s"'] & & F(t) \arrow[uul, bend right, "f_t"'] \arrow[ul, "e_t"]
\end{tikzcd}$$

ZADANIE 1 Jak wyglądają koprodukty w kategorii grup (grup abelowych) ?

PRZYKŁAD 6 Niech $(X, \leq)$ będzie zbiorem uporządkowanym, niech $\mathcal{A} = \{a_s\}_{s \in S}$ będzie rodziną elementów zbioru X. Czym jest koprodukt ?

Kostożkiem nad $\mathcal{A}$ jest $(x, \{(a_s, x)\}_{s \in S})$, gdzie $a_s \leq x$ dla $s \in S$.

Tak więc, kostożek jest jednoznacznie wyznaczony przez element x taki, że $\forall s \in S\ (a_s \leq x)$.

Koprodukt jest wyznaczony przez element g taki, że

$$g = \sup \{a_s\}_{s \in S} \qquad (\text{kres górny zbioru } \{a_s\}_{s \in S}).$$

ZADANIE 2 Czym są koprodukty w monoidach ?

GRANICE

DEF. Niech $\mathfrak{S}$ będzie kategorią małą, niech $F: \mathfrak{S} \to \mathbb{K}$ będzie funktorem kontrawariantnym. Stożkiem nad F nazywamy parę $(X, \{f_s\}_{s \in Ob(\mathfrak{S})})$ spełniającą

(S0) $f_s : X \to F(s)$ dla $\overbrace{s \in Ob(\mathfrak{S})}^{\text{każdego}}$.

(S1) $f_s = F(i) \circ f_t$ dla każdej $i: s \to t$ w $\mathfrak{S}$.

Granicą funktora F nazywamy stożek $(G, \{\pi_s\}_{s \in Ob(\mathfrak{S})})$ taki, że dla każdego stożka $(X, \{f_s\}_{s \in Ob(\mathfrak{S})})$ istnieje dokładnie jedna strzałka $h: X \to G$ taka, że

(G) $\forall s \in Ob(\mathfrak{S}) \qquad f_s = \pi_s \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[ddl, "f_s"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\, h"] \arrow[ddr, "f_t"] & \\
 & G \arrow[dl, "\pi_s"'] \arrow[dr, "\pi_t"] & \\
F(s) & & F(t) \arrow[ll, "F(i)"]
\end{tikzcd}$$

FAKT 3 Granica funktora kontrawariantnego $F: \mathfrak{S} \to \mathbb{K}$ jest kogranicą funktora kowariantnego $F: \mathfrak{S} \to \mathbb{K}^{op}$.

DEF. Niech S będzie zbiorem niepustym, $\mathcal{F} = \{X_s\}_{s \in S}$ rodziną obiektów kategorii $\mathbb{K}$, traktowaną jako funktor z kategorii dyskretnej S w kategorię $\mathbb{K}$. Granicę funktora $\mathcal{F}$ nazywamy produktem rodziny $\{X_s\}_{s \in S}$ w kategorii $\mathbb{K}$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f_s"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\, h"] \\
X_s & G \arrow[l, "\pi_s"]
\end{tikzcd}$$

$$\forall s \in S \ (f_s = \pi_s \circ h).$$

PRZYKŁAD 7 Produkty w kategorii zbiorów to iloczyny kartezjańskie.

Niech $\{X_s\}_{s\in S}$ będzie rodziną zbiorów. Przyjmijmy

$$P=\prod_{s\in S}X_s := \left\{p\in \Big(\bigcup_{s\in S}X_s\Big)^S : \forall s\in S\ \ p(s)\in X_s\right\}.$$

Niech $\pi_s : P\longrightarrow X_s$ będzie rzutowaniem kanonicznym, tzn. $\pi_s(p)=p(s)$, $p\in P$.

Wówczas $(P, \{\pi_s\}_{s\in S})$ jest produktem rodziny $\{X_s\}_{s\in S}$ w kategorii zbiorów.

Istotnie, ustalmy stożek $(Y, \{g_s\}_{s\in S})$, tzn. $g_s : Y\longrightarrow X_s$ dla $s\in S$.

Poszukujemy (jedynego) odwzorowania $h: Y\longrightarrow P$ spełniającego

$$\forall s\in S\ \ (\pi_s\circ h = g_s).$$

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "g_s"'] \arrow[d, dashed, "h"] \\ X_s & P \arrow[l, "\pi_s"] \end{tikzcd}$$

Innymi słowy $\quad h(y)(s)=\pi_s(h(y))=g_s(y)$.

To daje jednoznaczny wzór na odwzorowanie h.

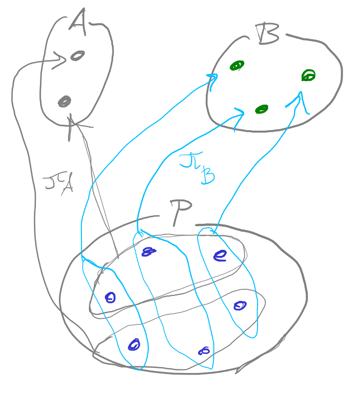
$A=\{a,b\}$, $\quad B=\{c,d,e\}$

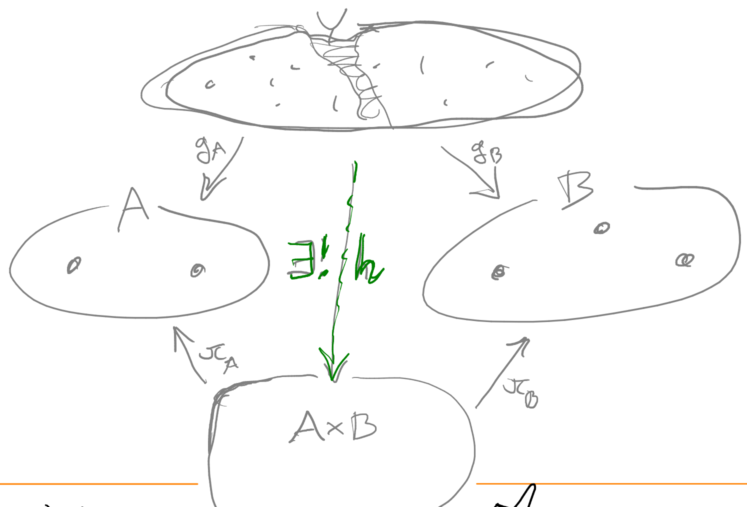
$A\times B=\{(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e)\}$

$\pi_A : A\times B\longrightarrow A$, $\qquad \pi_B: A\times B\longrightarrow B$

$\pi_A(x,y)=x$ $\qquad \pi_B(x,y)=y$

Stożek graniczny: $(A\times B, \{\pi_A, \pi_B\})$





PRZYKŁAD 8 Niech $(X,\leq)$ będzie zbiorem uporządkowanym, $\mathcal{A}=\{a_s\}_{s\in S}\subseteq X$.

Wówczas produktem rodziny $\mathcal{A}$ jest

$$p=\inf\{a_s\}_{s\in S}.$$

NOTACJA Jeśli $\{X_s\}_{s\in S}$ jest rodziną obiektów kategorii $\mathbb{K}$, to jej produkt (o ile istnieje) oznaczamy zwykle $\left(\prod_{s\in S} X_s, \{\pi_s\}\right)$, a strzałki $\pi_s : \prod_{t\in S} X_t \longrightarrow X_s$ nazywamy rzutowaniami.

Koprodukt rodziny $\{X_s\}_{s\in S}$ oznaczamy $\left(\coprod_{s\in S} X_s, \{e_s\}_{s\in S}\right)$ lub $\left(\bigoplus_{s\in S} X_s, \{e_s\}_{s\in S}\right)$ przy czym $e_s : X_s \longrightarrow \coprod_{t\in S} X_t$ $\left(e_s : X_s \longrightarrow \bigoplus_{t\in S} X_t\right)$ nazywamy czasami włożeniami.

CIĄGI

DEF. Ciągiem (prostym) w kategorii $\mathbb{K}$ nazywamy dowolny funktor kowariantny ze zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ w $\mathbb{K}$, przy czym $\mathbb{N}$ traktujemy jako kategorię uporządkowaną przez zwykły liniowy porządek.

Ciągiem odwrotnym w $\mathbb{K}$ będziemy nazywać każdy funktor kontrawariantny z $(\mathbb{N}, \leq)$ w $\mathbb{K}$.

Ciąg $F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ opisuje się poprzez zdefiniowanie obiektów $F(n)$, $n\in\mathbb{N}$ oraz strzałek $F(m,n) : F(m) \longrightarrow F(n)$, gdzie $m\leq n$. Spełnione muszą być warunki

(1) $F(m,m) = id_{F(m)}$

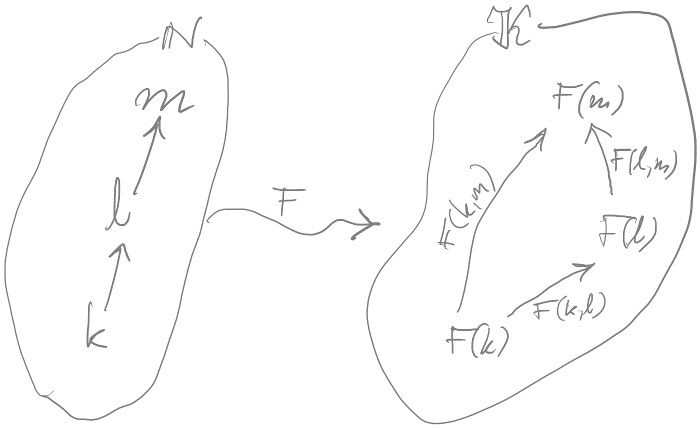
(2) $k\leq l\leq m \implies F(k,m) = F(l,m)\circ F(k,l)$.

Tak naprawdę, ciąg $F : \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{K}$ można zdefiniować zadając obiekty $F(n)$, $n\in\mathbb{N}$ oraz strzałki $F(n,n+1) : F(n) \longrightarrow F(n+1)$, $n\in\mathbb{N}$. Wówczas definiujemy

$$F(n,n) := id_{F(n)}, \quad n\in\mathbb{N},$$

$$F(m,n) := F(n,n-1)\circ\ldots\circ F(m,m+1)$$

dla $m<n$.



$$F(0) \xrightarrow{F(0,1)} F(1) \xrightarrow{F(1,2)} F(2) \xrightarrow{F(2,3)} \ \cdots\ \xrightarrow{F(n-1,n)} F(n) \longrightarrow \ldots$$

Ciąg odwrotny $F : \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{K}$ definiuje się analogicznie, przy czym strzałki idą w drugą stronę.

$$F(0) \xleftarrow{F(0,1)} F(1) \xleftarrow{F(1,2)} F(2) \longleftarrow \ \cdots\ \xleftarrow{F(n-1,n)} F(n) \xleftarrow{F(n,n+1)} F(n+1) \longleftarrow \ldots$$

NOTACJA

Ciąg w kategorii $\mathbb{K}$ będziemy oznaczać $\vec{x}$ (lub $\vec{a}, \vec{v}$, itp.), przy czym $\vec{x}(n)$ będzie oznaczany X_n (lub A_n, V_n, itp.), zaś $\vec{x}(m,n)$ będzie oznaczana x_m^n. Tak więc $x_m^n : X_m \longrightarrow X_n$ oraz

(1) $x_n^n = id_{X_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(2) $x_k^m = x_l^m \circ x_k^l$ dla $k \leq l \leq m$.

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & X_k \arrow[r, "x_k^l"'] \arrow[rr, bend left, "x_k^m"] & X_l \arrow[r, "x_l^m"'] & X_m \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Ciąg odwrotny w $\mathbb{K}$ będziemy oznaczać $\overleftarrow{x}$, przy czym X_n, $x_m^n : X_n \longrightarrow X_m$ będą oznaczać to co poprzednio, z uwzględnieniem zmiany kierunku strzałek. Tak więc:

(1) $x_n^n = id_{X_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(2') $x_k^m = x_k^l \circ x_l^m$ dla $k \leq l \leq m$.

$$\begin{tikzcd} \dots & X_k \arrow[l] & X_l \arrow[l, "x_k^l"] & X_m \arrow[l, "x_l^m"] \arrow[ll, bend right, "x_k^m"'] & \dots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

ZADANIE 3 Kiedy ciąg jest jednocześnie ciągiem odwrotnym?

$\vec{a} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$, $A_n = A$ dla $n \in \mathbb{N}$.

$a_n^{n+1} = f_n$.

$$A \xrightarrow{f_0} A \xrightarrow{f_1} A \xrightarrow{f_2} \dots$$

$\overleftarrow{a} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$, $A_n = A$ dla $n \in \mathbb{N}$.

$a_n^{n+1} = f_n$.

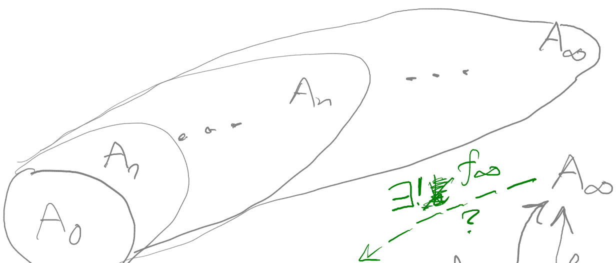
$$A \xleftarrow{f_0} A \xleftarrow{f_1} A \xleftarrow{f_2} \dots$$

PRZYKŁAD 9 Niech $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie łańcuchem zbiorów, tzn. $A_n \subseteq A_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Wówczas mamy ciąg $\vec{a} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{Set}$,

gdzie $a_m^n : A_m \longrightarrow A_n$ jest odwzorowaniem tożsamościowym, $a_m^n(x) = x$ dla $x \in A_m$.

Czym jest kogranica ciągu $\vec{a}$?



Niech $A_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$,

niech $e_n : A_n \longrightarrow A_\infty$ będzie tożsamościowe, $e_n(x) = x$.

Oczywiście $e_m = e_n \circ a_m^n$ dla $m \leq n$.

Tak więc, $(A_\infty, \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ jest kostożkiem nad $\vec{a}$.

Ustalmy kostożek $(X, \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ nad $\vec{a}$. To oznacza:

$$(\forall m < n) \quad f_n \circ a_m^n = f_m.$$

$$\begin{tikzcd} & A_\infty \arrow[dl, dashed, "\exists!\, f_\infty\, ?"'] \\ X & A_n \arrow[l, "f_n"'] \arrow[u, "e_n"'] \\ & A_m \arrow[u, "a_m^n"'] \arrow[ul, "f_m"] \arrow[uu, bend right, "e_m"'] \end{tikzcd}$$

Innymi słowy $(\forall m < n) \quad f_n | A_m = f_m$.

Tak więc $f_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n : A_\infty \longrightarrow X$. Jest to jednocześnie jedyna możliwość na odwzorowanie $h : A_\infty \longrightarrow X$ spełniające (KG), czyli

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (f_n = h \circ e_n).$$

PRZYKŁAD 10. Niech $\overleftarrow{x}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{Set}$ będzie ciągiem odwrotnym.

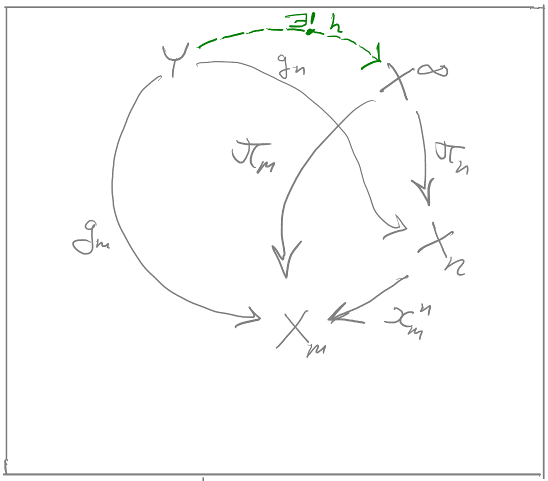
Zdefiniujmy

$$X^{\infty} = \left\{ p \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n : (\forall m \le n)\ p(m) = x_m^n(p(n)) \right\}.$$

Niech $\pi_n : X^{\infty} \longrightarrow X_n$ będzie rzutowaniem kanonicznym, tzn. $\pi_n(p) = p(n)$.

Wówczas $(X^{\infty}, \{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ jest stożkiem nad $\overleftarrow{x}$. Istotnie, dla $m \le n$ mamy

$$(x_m^n \circ \pi_n)(p) = x_m^n(p(n)) = p(m).$$



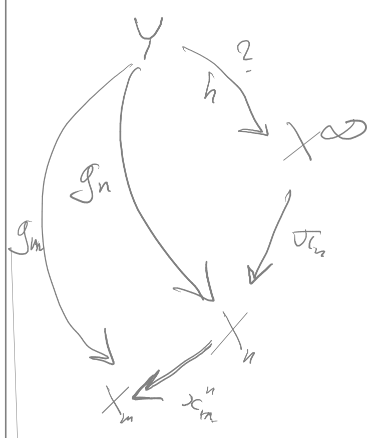
Ustalmy stożek $(Y, \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ nad $\overleftarrow{x}$.

Poszukujemy $h : Y \longrightarrow X^{\infty}$ spełniającego

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ g_n = \pi_n \circ h.$$

To oznacza $h(y)(n) = g_n(y)$. To jest jedyna możliwość na odwzorowanie h. Mamy jednakże

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \pi_n \circ h = g_n,$$

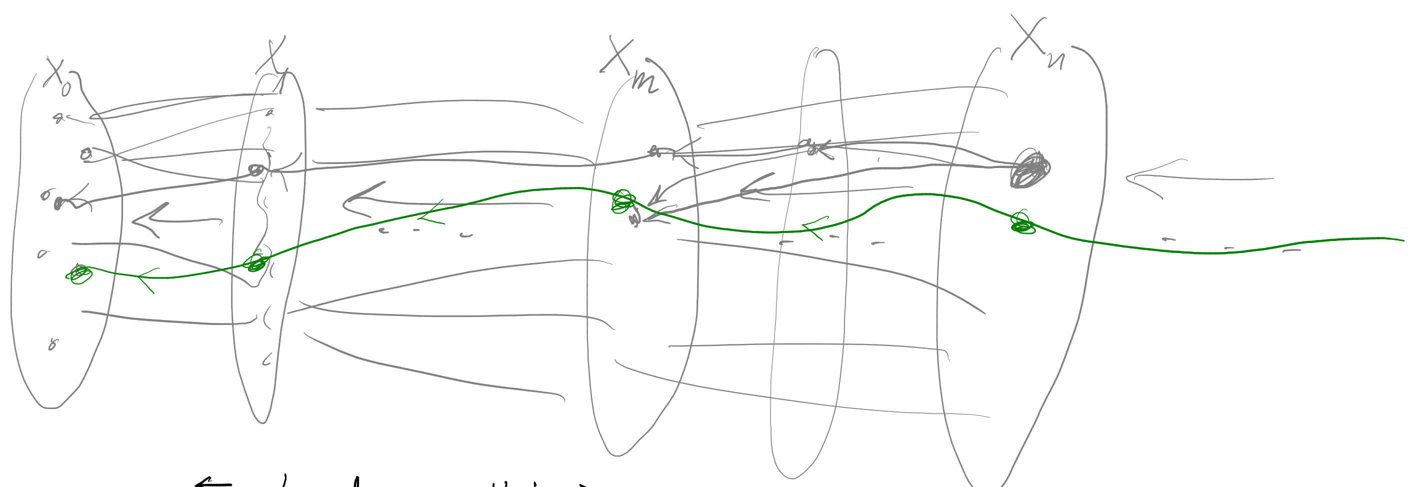


zatem pozostaje sprawdzić, że $h(y) \in X^{\infty}$ dla $y \in Y$.

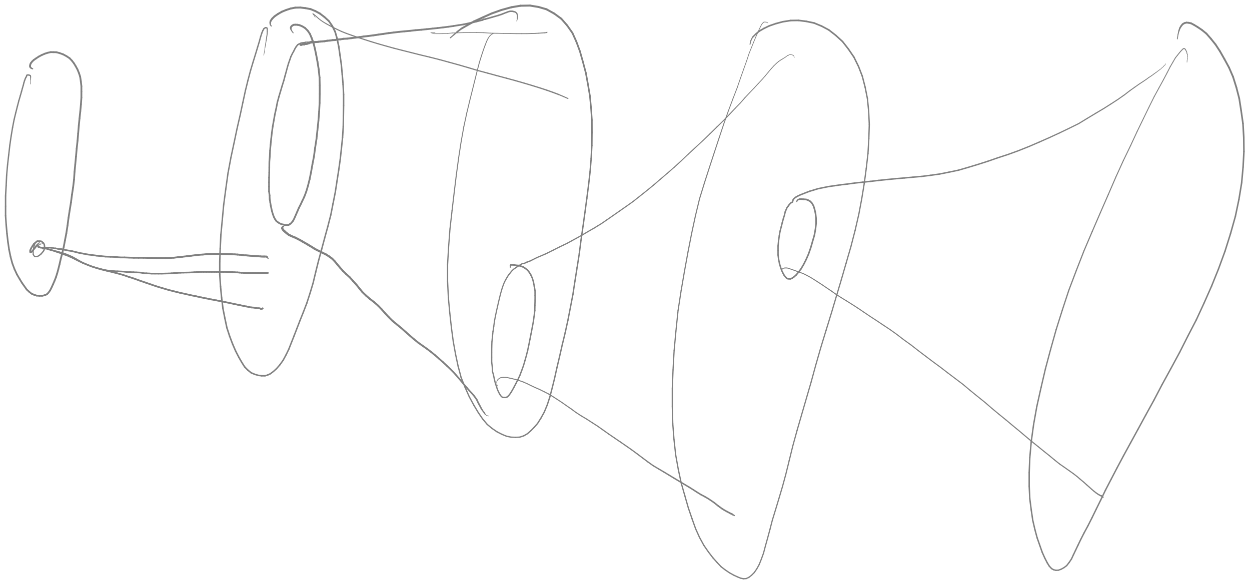
Mamy

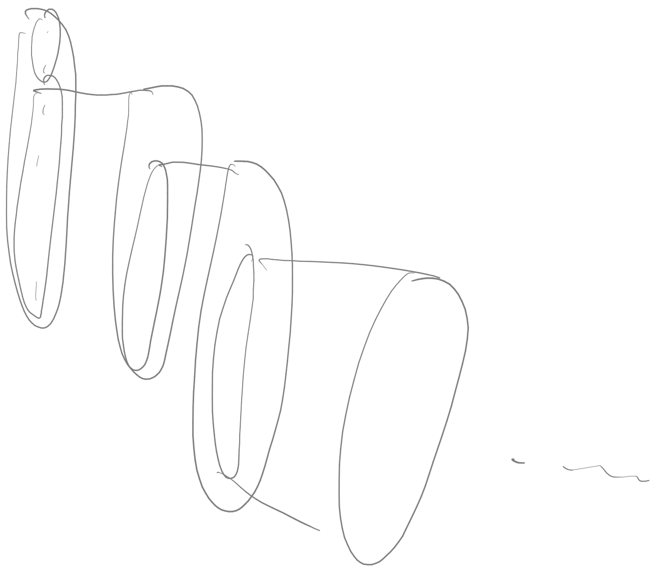
$$m < n \Rightarrow x_m^n(h(y)(n)) = x_m^n(g_n(y)) = g_m(y) = h(y)(m).$$

To pokazuje, że $h(y) \in X^{\infty}$.



Granica ciągu $\overleftarrow{x}$ to zbiór wszystkich gałęzi powyższego drzewa.





$\mathbb{N} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{N}$

$\alpha(n) = n+1$

$\mathbb{N} \xleftarrow{\alpha} \mathbb{N} \xleftarrow{\alpha} \mathbb{N} \xleftarrow{\alpha} \cdots$

Załóżmy, że $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ spełnia $\alpha(p(n+1)) = p(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd $p(0) = \alpha(p(1)) = p(1)+1 = p(2)+2 = \ldots = p(n)+n$, sprzeczność.

NOTACJA Granicę funktora kontrawariantnego $F: \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ oznaczamy $\varprojlim F$.
Kogranicę funktora $F: \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ oznaczamy $\varinjlim F$.

ZADANIE 3 Kiedy ciąg jest jednocześnie odwrotny i prosty?

$\vec{x}: \mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Przypuśćmy, że $\vec{x}$ jest też ciągiem odwrotnym.

$(\forall k < l) \quad x_k^l : X_k \to X_l$. Stąd $\underbrace{X_l = X_k}$.

Dalej,

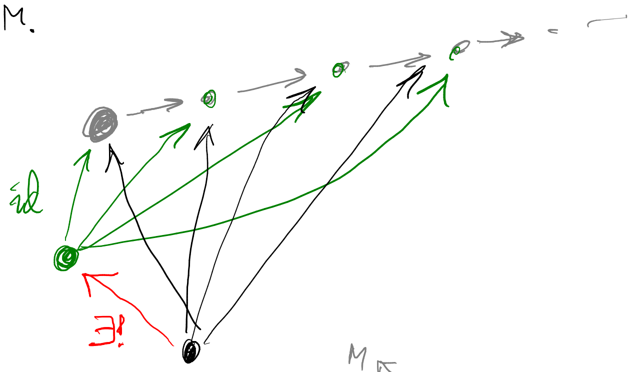
$$k \le l \le m \implies x_k^m = x_l^m \circ x_k^l$$
$$\implies x_k^m = x_k^l \circ x_l^m.$$
$$\implies x_k^l \circ x_l^m = x_l^m \circ x_k^l.$$

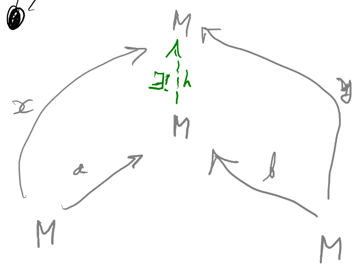
Stąd, obrazem $\vec{x}$ jest monoid przemienny $M \subseteq End(X)$, gdzie $X = \vec{x}(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

PRZYKŁAD 11 Niech $\mathbb{M}=(M,\cdot,1)$ będzie monoidem.
Mamy funktor $F:\{0,1\}\to \mathbb{M}$, $F(0)=F(1)=M$.
Kostożek nad F to para $(a,b)\in M^2$.
(KG) mówi, że

$$\forall (x,y)\in M^2 \ \exists!\, h\in M$$

$$x=h\circ a, \quad y=h\circ b.$$



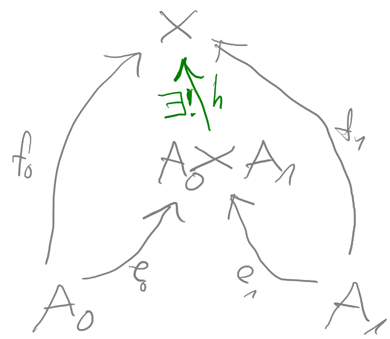


PRZYKŁAD 12 Niech $\mathcal{Ab}$ oznacza kategorię grup przemiennych z homomorfizmami.
Ustalmy $A_0, A_1 \in Ob(\mathcal{Ab})$. Wówczas $(A_0\times A_1, \{e_0,e_1\})$, gdzie

$$e_0(x)=(x,0), \qquad e_1(y)=(0,y), \quad x\in A_0, y\in A_1,$$

jest koproduktem $\{A_0,A_1\}$ w kategorii grup abelowych.
Istotnie, ustalmy $(X,\{f_0,f_1\})$, kostożek nad $\{0,1\}\to\{A_0,A_1\}$.
Zdefiniujmy

$$h(a_0,a_1)=(f_0(a_0), f_1(a_1)).$$



Wówczas h spełnia

$$(\forall i\in\{0,1\}) \quad f_i = h\circ e_i. \qquad (*)$$

Z drugiej strony, jeśli h' spełnia $(*)$, to

$$h'(a_0,a_1)=\underbrace{h'(a_0,0)}_{=h(a_0,0)}+\underbrace{h'(0,a_1)}_{=h(0,a_1)}=h'(e_0(a_0))+h'(e_1(a_1)),$$

zatem $h'=h$.