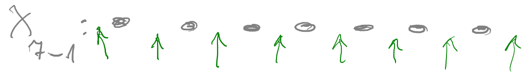
Losowość

ZADANIE 1 Rozważmy następujący proces Markowa. Startujemy od zbioru liniowo uporządkowanego $(X_0,<)$, gdzie $|X_0|=1$. W n-tym kroku, mając dany zbiór liniowo uporządkowany $(X_{n-1},<)$, rozszerzamy go do $(X_n,<)$ dodając jeden element losowo. To znaczy, $X_n=X_{n-1}\cup\{a_n\}$ oraz każde rozszerzenie porządku liniowego $<$ na X_n jest możliwe z tym samym prawdopodobieństwem $\frac{1}{n+1}$.



Niech $X_\infty=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X_n$. Pokaż, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi $(X_\infty,<)\cong(\mathbb{Q},<)$.

proste

ZADANIE 2 Rozważmy analogiczny proces jak powyżej, zamieniając zbiory uporządkowane na grafy. Dokładniej, X_0 jest grafem o jednym wierzchołku, $X_n=X_{n-1}\cup\{v_n\}$, gdzie v_n ma losowe połączenia z elementami zbioru X_{n-1}, z prawdopodobieństwem jednostajnym.
Konkretnie wybieramy losowo podzbiór $A\subseteq X_{n-1}$ i definiujemy krawędzie $x\sim v_n \iff x\in A$. Wiemy, że $|X_{n-1}|=n$, zatem mamy 2^n możliwości.

Niech $X_\infty=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X_n$. Pokaż, że z prawdopodobieństwem 1, graf X_∞ jest losowy.

Struktury matematyczne

DEF. Językiem pierwszego rzędu nazywamy parę $\mathcal{L}=(\{R_i\}_{i\in I},\{F_j\}_{j\in J})$, gdzie I,J są rozłącznymi zbiorami indeksów, wraz z funkcjami $\eta: I\to\mathbb{N}^+$, $\xi: J\to\mathbb{N}$.
Symbol R_i będzie oznaczał relację $\eta(i)$-argumentową.
Symbol F_j będzie oznaczał operację algebraiczną $\xi(j)$-argumentową lub stałą, jeśli $\xi(j)=0$.
Język $\mathcal{L}$ nazywamy przeliczalnym [skończonym], jeśli $I\cup J$ jest zbiorem przeliczalnym [skończonym].

Zbiór S nazywamy przeliczalnym, jeśli istnieje odwzorowanie różnowartościowe z S do $\mathbb{N}$.

PRZYKŁAD 1 (a) Język teorii zbiorów, to $\{\in\}$, przy czym $\eta(\in)=2$.
Symbol $\in$ oznacza relację należenia.

(b) Język teorii grup, to $\{\cdot\}$, gdzie $\xi(\cdot)=2$.
Jest to też język teorii półgrup.

$(\{\in\},\emptyset)$

$(\emptyset,\{\cdot\})$

(c) Język $\{E\}$, gdzie $\eta(E)=2$ jest językiem grafów, ale może też być językiem zbiorów uporządkowanych, a także językiem teorii zbiorów.

(d) Niech K będzie ciałem. Język teorii przestrzeni wektorowych nad K, to

$\mathcal{L}=\{+\}\cup\{F_\lambda\}_{\lambda\in K}$, gdzie $\xi(+)=2$ oraz $\xi(F_\lambda)=1$ dla $\lambda\in K$.

Oczywiście $+$ ma oznaczać dodawanie, a F_λ mnożenie przez λ.

DEF. Niech $\mathcal{L} = (\{R_i\}_{i\in I}, \{F_j\}_{j\in J})$ będzie językiem. Struktura (lub modelem) języka $\mathcal{L}$ jest

$$M = (M, \{R_i^M\}_{i\in I}, \{F_j^M\}_{j\in J}), \text{ gdzie}$$

(1) $R_i^M \subseteq M^{\eta(i)}$ dla $i \in I$, (relacja $\eta(i)$-argumentowa)

(2) $F_j^M : M^{\xi(j)} \longrightarrow M$ dla $j \in J$ lub $F_j^M \in M$, jeśli $\xi(j) = 0$.

(działanie / operacja algebraiczna $\xi(j)$-argumentowa lub stała)

PRZYKŁAD 2 Modelem języka teorii zbiorów jest dowolny zbiór M wraz z relacją 2-argumentową. To znaczy, $M = (M, \sim)$, gdzie $\sim := \in^M$.
Relacja $\sim$ może być (ale nie musi) zwrotna, symetryczna, przechodnia, itp.

Modelem języka teorii przestrzeni wektorowych nad ciałem $\mathbb{Z}_2$ jest struktura $M = (M, +, F_0, F_1)$, gdzie $+$ jest jakimkolwiek działaniem 2-argumentowym, a $F_0, F_1 : M \longrightarrow M$ jakimikolwiek funkcjami.

DEF. Niech X, Y będą strukturami języka $\mathcal{L}$. Odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy homomorfizmem, jeśli

(1) Dla każdej relacji n-argumentowej $R \in \mathcal{L}$ zachodzi

$$(\forall x_1, \dots, x_n \in X) \quad (x_1, \dots, x_n) \in R^X \Rightarrow (f(x_1), \dots, f(x_n)) \in R^Y.$$

(2) Dla każdej operacji m-argumentowej $F \in \mathcal{L}$ zachodzi

$$(\forall x_1, \dots, x_m \in X) \quad f(F^X(x_1, \dots, x_m)) = F^Y(f(x_1), \dots, f(x_m)).$$

W szczególności, jeśli $m = 0$, to $f(F^X) = F^Y$.

Piszemy wtedy $f : X \longrightarrow Y$.

Odwzorowanie identycznościowe $id_X : X \longrightarrow X$ ($id_X(x) = x$ dla $x \in X$) jest homomorfizmem.
Piszemy $id_X : X \longrightarrow X$.

Homomorfizm $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy izomorfizmem, jeśli istnieje homomorfizm $g : Y \longrightarrow X$ taki, że $f \circ g = id_Y$ oraz $g \circ f = id_X$. Wówczas $g = f^{-1}$.

FAKT 1 (1) Złożenie dwóch homomorfizmów [izomorfizmów] jest homomorfizmem [izomorfizmem].
(2) id_X jest izomorfizmem.

Dowód jest oczywisty.

DEF. Piszemy $X \cong Y$ i mówimy, że X, Y są izomorficzne, jeśli istnieje izomorfizm $f : X \xrightarrow{\cong} Y$.

FAKT 2 Homomorfizm $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ struktur języka $\mathcal{L}$ jest izomorfizmem $\iff$ f jest bijekcją oraz dla każdej relacji n-argumentowej $R \in \mathcal{L}$ zachodzi

$$(*) \quad (\forall x_1, \ldots, x_n \in X) \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in R^{\mathbb{X}} \iff (f(x_1), \ldots, f(x_n)) \in R^{\mathbb{Y}}.$$

(istotne jest $\Leftarrow$)

DOWÓD. ($\Leftarrow$) Niech $g = f^{-1}$ będzie odwzorowaniem odwrotnym do f. Wówczas g jest homomorfizmem, bo dla relacji n-argumentowej $R \in \mathcal{L}$, dla $y_1, \ldots, y_n \in Y$ zachodzi

$$(y_1, \ldots, y_n) \in R^{\mathbb{Y}} \implies (f^{-1}(y_1), \ldots, f^{-1}(y_n)) \in R^{\mathbb{X}}.$$

Oczywiście f^{-1} zachowuje wszystkie operacje algebraiczne.

($\Rightarrow$) Jeśli $f \circ g = id_Y$, $g \circ f = id_X$, to f jest bijekcją.
Istotnie, jeśli $x_1 \neq x_2$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$, bo $g(f(x_1)) = x_1 \neq x_2 = g(f(x_2))$.
Ponadto dla $y \in Y$ mamy $y = f(g(y))$.
Tak więc $g = f^{-1}$. Skoro f^{-1} jest homomorfizmem, to zachodzi $(*)$, bo $x_i = f^{-1}(f(x_i))$ dla $i \leq n$. ■

DEF. Niech $\mathbb{X}$ będzie strukturą języka $\mathcal{L}$. Podstrukturą nazywamy strukturę $\mathbb{M}$ taką, że $M \subseteq X$, M jest zamknięty na wszystkie operacje algebraiczne języka $\mathcal{L}$, a relacje języka $\mathcal{L}$ są obcięciami relacji z $\mathbb{X}$.

Dokładniej:

(1) Dla operacji algebraicznej n-argumentowej $F \in \mathcal{L}$ zachodzi

$$(\forall x_1, \ldots, x_n \in M) \qquad F^{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n) \in M.$$

W szczególności $F^{\mathbb{X}} \in M$, jeśli $n = 0$.
Ponadto $F^{\mathbb{M}} = F^{\mathbb{X}}|M^n$.

(2) Dla relacji m-argumentowej $R \in \mathcal{L}$ zachodzi

$$(\forall x_1, \ldots, x_m \in M) \qquad (x_1, \ldots, x_m) \in R^{\mathbb{M}} \iff (x_1, \ldots, x_m) \in R^{\mathbb{X}}.$$

Innymi słowy $R^{\mathbb{M}} = R^{\mathbb{X}} \cap M^m$.

Piszemy wtedy $\mathbb{M} \leq \mathbb{X}$.

Tak więc, $\mathbb{M} \leq \mathbb{X}$, jeśli $M \subseteq X$ oraz $F^{\mathbb{M}} = F^{\mathbb{X}}|M^n$ dla każdej operacji n-argumentowej $F \in \mathcal{L}$ oraz $R^{\mathbb{M}} = R^{\mathbb{X}} \cap M^m$ dla każdej relacji m-argumentowej $R \in \mathcal{L}$.

DEF. Homomorfizm $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ nazywamy zanurzeniem, jeśli jest izomorfizmem na podstrukturę $f[\mathbb{X}] \leq \mathbb{Y}$.

PRZYKŁAD 3 (a) Podstrukturą grupy $(G,\cdot)$ jest każdy podzbiór zamknięty na działanie, a więc nie musi to być podgrupa.
Jeśli jednak wzbogacimy język teorii grup o symbol e oznaczający element neutralny oraz o operację 1-argumentową $(\ldots)^{-1}$ oznaczającą element odwrotny, to podstruktura jest podgrupą.

(b) Podstrukturą grafu jest podgraf indukowany.

DEF. Mówiąc o klasie struktur, mamy na myśli wszystkie struktury ustalonego języka spełniające pewne warunki (aksjomaty). Warunków może być nieskończenie wiele.
W szczególności każda klasa struktur $\mathcal{F}$ spełnia warunek:

$$(i)\ (\forall \mathbb{X}\in\mathcal{F})(\forall \mathbb{Y})\qquad \mathbb{X}\simeq\mathbb{Y}\implies \mathbb{Y}\in\mathcal{F}.$$

Definiujemy

$$\sigma\mathcal{F}\overset{df}{=\!=}\Big\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{X}_n:\ \{\mathbb{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{F}\text{ jest łańcuchem, tzn. }(\forall n\in\mathbb{N})\ \mathbb{X}_n\leqslant\mathbb{X}_{n+1}\Big\}.$$

PRZYKŁAD 4 (Przestrzenie metryczne) Niech $\mathcal{L}=\{D_r\}_{r\in\mathbb{Q}^+}$, przy czym D_r jest relacją 2-argumentową dla $r\in\mathbb{Q}^+$.
Niech $\mathbb{X}=(X,\varrho)$ będzie przestrzenią metryczną. Wówczas $\mathbb{X}$ staje się strukturą w języku $\mathcal{L}$, przyjmując

$$(x,y)\in D_r\overset{df}{\iff}\varrho(x,y)<r.$$

Aksjomaty metryki wyrażone w tym języku wyglądają następująco:

(M0) $x=y\iff\forall r\in\mathbb{Q}^+\quad (x,y)\in D_r$.

(M1) $\forall r\in\mathbb{Q}^+\qquad (x,y)\in D_r\iff(y,x)\in D_r$.

(M2) $\forall r,s\in\mathbb{Q}^+\qquad (x,y)\in D_r\ \&\ (y,z)\in D_s\implies(x,z)\in D_{r+s}$.

(M3) $\exists r\in\mathbb{Q}^+\quad (x,y)\in D_r$ oraz $\Big(\forall_{\substack{s,t\in\mathbb{Q}^+\\ s<t}}\Big)\ (x,y)\in D_s\implies(x,y)\in D_t$.

Z drugiej strony, mając daną strukturę $\mathbb{X}=(X,\{D_r\}_{r\in\mathbb{Q}^+})$ spełniającą (M0)–(M2), możemy zdefiniować metrykę

$$\varrho(x,y)=\inf\{r\in\mathbb{Q}^+:\ (x,y)\in D_r\}.$$

Pierwsza część (M3) daje $\varrho(x,y)<+\infty$.

Symetria wynika z (M1). Warunek $x=y \iff \varrho(x,y)=0$ wynika z (M0) oraz z drugiej części (M3).
Warunek trójkąta: Przypuśćmy, że $\varrho(x,y)+\varrho(y,z)<\varrho(x,z)$. Wybierzmy $t\in\mathbb{Q}^+$ tak, aby

$$\varrho(x,y)+\varrho(y,z)<t<\varrho(x,z).$$

Wybierzmy $r,s\in\mathbb{Q}^+$ takie, że $\varrho(x,y)<r$, $\varrho(y,z)<s$ oraz $r+s=t$.
Wówczas $(x,y)\in D_r$ & $(y,z)\in D_s$ oraz $(x,z)\notin D_{r+s}=D_t$, co przeczy (M2).

Zauważmy, że dla $r\in\mathbb{Q}^+$ zachodzi

$$\varrho(x,y)<r \iff (x,y)\in D_r.$$

Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, traktowanymi jako struktury powyższego języka $\mathcal{L}$.
Wówczas $f:X\longrightarrow Y$ jest homomorfizmem $\iff \forall x_0,x_1\in X \quad \varrho(f(x_0),f(x_1))\leq\varrho(x_0,x_1)$.
Innymi słowy, homomorfizmy to odwzorowanie nierozszerzające.
Izomorfizmy to izometrie (bijektywne).

FAKT 3 Niech $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem struktur ustalonego języka $\mathcal{L}$ takim, że $X_n\leqslant X_{n+1}$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$. Wówczas $X_\infty=\bigcup_{n\in\omega}X_n$ jest $\mathcal{L}$-strukturą, gdzie dla relacji n-argumentowej $R\in\mathcal{L}$, dla $x_1,\dots,x_n\in X_\infty$ zachodzi

$$(x_1,\dots,x_n)\in R^{X_\infty} \iff (x_1,\dots,x_n)\in R^{X_k}, \quad x_1,\dots,x_n\in X_k,$$

oraz dla operacji m-argumentowej $F\in\mathcal{L}$, dla $x_1,\dots,x_m\in X_\infty$ zachodzi

$$F^{X_\infty}(x_1,\dots,x_m)=F^{X_k}(x_1,\dots,x_m), \qquad x_1,\dots,x_m\in X_k.$$

Powyższe definicje nie zależą od wyboru k (z def. podstruktury).

DEF. Ciąg struktur $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $X_n\leqslant X_{n+1}$ dla $n\in\mathbb{N}$ nazywamy *łańcuchem*.

GRA BANACHA–MAZURA

DEF. Klasyczną grę Banacha–Mazura definiujemy następująco. Dwaje gracze, Ewa i Adam grają na przemian przedziałami otwartymi niepustymi w $\mathbb{R}$. Ewa zaczyna wybierając przedział U_0. Adam odpowiada przedziałem $U_1\subseteq U_0$. Ewa odpowiada przedziałem $U_2\subseteq U_1$. I tak dalej.
W n-tym kroku gracz odpowiada zawsze przedziałem zawartym w poprzednim.
Grając w nieskończoność, otrzymujemy ciąg malejący przedziałów $U_0\supseteq U_1\supseteq\dots\supseteq U_n\supseteq U_{n+1}\supseteq\dots$.

Ustalmy $X \subseteq \mathbb{R}$, zazwyczaj zbiór gęsty. Powiemy, że Adam wygrywa w grze $BM(\mathbb{R}, X)$, jeśli $X \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$. W przeciwnym razie Ewa wygrywa.

DEF. Mając daną grę nieskończoną dla dwóch graczy, jak powyżej, strategią gracza jest funkcja, która przypisuje jego/jej odpowiedź dla każdego aktualnego „stanu" gry.

W grze $BM(\mathbb{R}, X)$, strategia to funkcja przypisująca skończonemu łańcuchowi przedziałów $U_0 \supseteq \ldots \supseteq U_{k-1}$ przedział $U_k \subseteq U_{k-1}$, gdzie k jest parzyste dla Ewy, a nieparzyste dla Adama.

Strategię nazywamy stacjonarną (lub taktyką), jeśli zależy tylko od ostatniego ruchu przeciwnika. Strategię nazywamy strategią Markowa, jeśli zależy tylko od ostatniego ruchu przeciwnika oraz numeru tego ruchu.

TWIERDZENIE (OXTOBY) Adam ma strategię wygrywającą w $BM(\mathbb{R}, X)$ $\Leftrightarrow$ X zawiera podzbiór gęsty G_δ w $\mathbb{R}$.

DEF. Niech $\mathcal{F}$ będzie klasą struktur (ustalonego języka).
Definiujemy grę Banacha-Mazura $BM(\mathcal{F})$ następująco.
Ewa zaczyna wybierając $A_0 \in \mathcal{F}$. Adam wybiera $A_1 \in \mathcal{F}$ takie, że $A_0 \leq A_1$.
Ewa odpowiada wybierając $A_2 \in \mathcal{F}$, $A_1 \leq A_2$, itd.
Reguły dla obojga graczy są takie same. Wynikiem gry jest łańcuch

$$A_0 \leq A_1 \leq \ldots A_n \leq A_{n+1} \leq \ldots$$

Przyjmujemy $A_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \sigma\mathcal{F}$.

Ustalmy teraz $W \in \sigma\mathcal{F}$. Definiujemy grę Banacha-Mazura $BM(\mathcal{F}, W)$ z regułami jak w grze $BM(\mathcal{F})$, przy czym Adam wygrywa, jeśli $A_\infty \approx W$.

PRZYKŁAD 5 Niech $\mathcal{F}$ będzie klasą wszystkich zbiorów skończonych traktowanych jako struktury języka pustego.
Homomorfizmy to dowolne odwzorowania, a izomorfizmy to bijekcje.
Niech W będzie zbiorem przeliczalnym nieskończonym. Wówczas Adam ma taktykę w grze $BM(\mathcal{F}, W)$, która daje zbiór równoliczny z W.

DEF. Niech G będzie grą nieskończoną dla dwóch graczy, Player 0, Player 1.
Strategię gracza Player i $(i = 0, 1)$ nazywamy wygrywającą, jeśli, stosując tę strategię, Player i wygrywa, niezależnie od tego jak gra przeciwnik Player $1-i$.

W Przykładzie 5, opisana tam taktyka jest wygrywająca.

DEF. Niech $\mathcal{F}$ będzie klasą struktur. Strukturę $W \in \sigma\mathcal{F}$ nazywamy <u>$\mathcal{F}$-generyczną</u>, jeśli Adam ma strategię wygrywającą w grze $BM(\mathcal{F}, W)$.

FAKT 4 Struktura $\mathcal{F}$-generyczna, o ile istnieje, jest wyznaczona jednoznacznie, z dokładnością do izomorfizmu.

DOWÓD. Reguły dla obojga graczy są takie same.
Załóżmy, że W_0, W_1 są $\mathcal{F}$-generyczne. Możemy grać tak, że Adam używa strategii prowadzącej do W_1, natomiast Ewa używa strategii Adama prowadzącej do W_0, zaczynając grę od $A_{-1} \leq A_0$ zamiast A_0. Wówczas $A_\infty \approx W_1$, ponieważ Adam wygrywa. Z drugiej strony, zamieniając role graczy, Ewa wygrywa, co oznacza, że $A_\infty \approx W_0$. Tak więc $W_0 \approx W_1$. ■

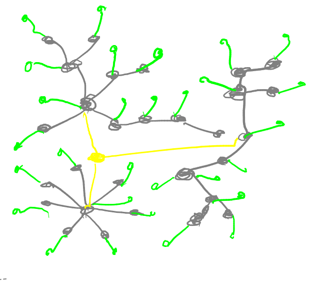
PRZYKŁAD 6 Niech $\mathcal{F}$ będzie klasą (wszystkich) porządków liniowych skończonych. Wówczas $\sigma\mathcal{F}$ jest klasą wszystkich porządków liniowych przeliczalnych. $(\mathbb{Q}, <)$ jest $\mathcal{F}$-generyczny.
Istotnie, Adam ma taktykę, która dla $(X, <)$ (skończonego) rozszerza go dokładając nowy punkt pomiędzy każdymi dwoma istniejącymi, oraz po jednym punkcie na samym początku i na końcu. Jest to strategia wygrywająca.

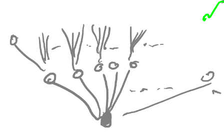
PRZYKŁAD 7 Niech $\mathcal{F}$ będzie klasą wszystkich grafów skończonych. Niech $\mathcal{R}$ oznacza graf Rado. Wówczas Adam ma strategię wygrywającą w grze $BM(\mathcal{F}, \mathcal{R})$, mianowicie, mając dany graf skończony G, dla każdego $A \subseteq G$ Adam dodaje wierzchołek v_A połączony dokładnie z elementami zbioru A (i z żadnymi innymi). Adam odpowiada grafem

$$G' = G \cup \{v_A : A \in \mathcal{P}(G)\}.$$

DEF Graf (prosty) G nazywamy <u>acyklicznym</u>, jeśli nie zawiera żadnego cyklu. Innymi słowy, nie istnieje homomorfizm różnowartościowy $f: C_k \to G$ dla żadnego $k \geq 3$.
C_k = cykl k-elementowy. <u>Drzewem</u> nazywamy graf spójny acykliczny.

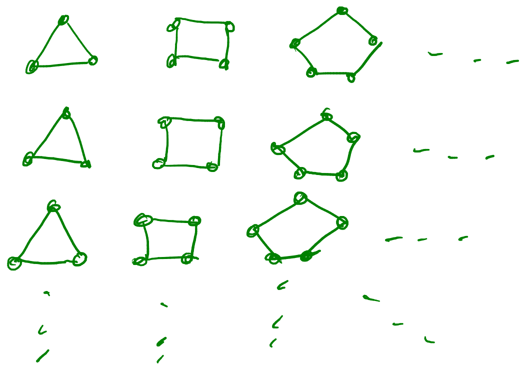
PRZYKŁAD 8 Niech $\mathcal{F}$ będzie klasą wszystkich grafów prostych skończonych acyklicznych.
Niech T_∞ będzie drzewem, w którym każdy wierzchołek ma stopień ∞.
Wówczas T_∞ jest $\mathcal{F}$-generyczny.
Istotnie, mając dany graf skończony acykliczny G, Adam najpierw dokłada nowy wierzchołek, aby w rezultacie dostać graf spójny, czyli drzewo. Następnie dodaje po jednym wierzchołku do każdego istniejącego wierzchołka, aby zwiększyć jego stopień o 1.





PRZYKŁAD 9 Niech $\mathcal{G}_k$ oznacza klasę wszystkich grafów skończonych stopnia $\leq k$.
Stopniem wierzchołka $v \in G$ nazywamy moc zbioru $\{x \in G : x \sim v\}$, oznaczamy go $\deg(v)$.
Graf G nazywamy k-regularnym, jeśli $\deg(v) = k$ dla każdego $v \in G$.

Niech W_2 będzie grafem będącym sumą rozłączną cykli, przy czym każdy cykl występuje nieskończenie wiele razy.

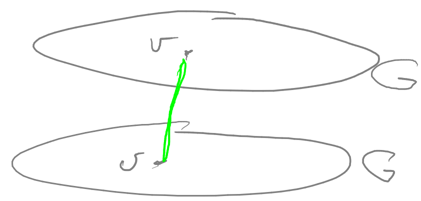


FAKT: W_2 jest $\mathcal{G}_2$-generyczny.

DOWÓD: Niech G będzie grafem skończonym stopnia ≤ 2. Wówczas każda jego składowa spójności jest cyklem lub ścieżką. Każdą ścieżkę można rozszerzyć do cyklu, dodając jeden wierzchołek. Tak więc, Adam może najpierw „pozamykać" wszystkie ścieżki, a następnie podokładać cykle długości k dla każdego k nie większego niż długość maksymalnego cyklu w G plus jeden. W ten sposób Adam uzyska graf izomorficzny z W_2. ■

FAKT: Każdy graf skończony stopnia $\leq k > 1$ rozszerza się do grafu skończonego k-regularnego.

DOWÓD. Ustalmy graf skończony G stopnia $\leq k$. Załóżmy, że $v \in G$ ma stopień $< k$.
Rozważmy $G_v := G \times \{0,1\}$, gdzie $(v,0) \sim (v,1)$ i nie ma żadnych nowych połączeń. Wówczas $(v,0)$, $(v,1)$ mają stopień o jeden większy niż v, a pozostałe wierzchołki (w,i) mają stopień taki jak w.



Powtarzając powyższą procedurę, dostajemy graf skończony k-regularny. ■

PYTANIE: Jak wygląda (i czy w ogóle istnieje) graf $\mathcal{G}_k$-generyczny dla $k>2$?