STRUKTURY MATEMATYCZNE

DEF. Operacją algebraiczną n-argumentową (działaniem) na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $a: X^n \longrightarrow X$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.
W przypadku $n=0$, operacja a wyznacza element zbioru X, który nazywamy stałą.
Relacją n-argumentową ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) w zbiorze X nazywamy dowolny zbiór $R \subseteq X^n$.

Strukturą matematyczną nazywamy ciąg $\mathbb{X} = (X, (a_i)_{i\in I}, (R_j)_{j\in J})$, gdzie I, J są zbiorami indeksów, $a_i : X^{n_i} \to X$ jest działaniem (lub stałą, jeśli $n_i = 0$) dla $i \in I$ oraz $R_j \subseteq X^{m_j}$ jest relacją dla $j \in J$.
Dopuszczamy przypadek $I = \emptyset$ (struktura relacyjna) lub $J = \emptyset$ (struktura algebraiczna).
Ciąg $((n_i)_{i\in I}, (m_j)_{j\in J})$ nazywamy typem struktury $\mathbb{X}$.

PRZYKŁAD 1 (1) Grupa $(G, \cdot)$ jest strukturą typu $((2), \emptyset)$.
(2) Monoid $(M, \cdot, e)$ jest strukturą typu $((2, 0), \emptyset)$
(3) Zbiór uporządkowany $(X, \leq)$ jest strukturą typu $(\emptyset, (2))$.
(4) $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leqslant, b)$ jest strukturą typu $((2,2,0,0), (2,3))$, gdzie $b \subseteq \mathbb{R}^3$ jest dana wzorem

$$b = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \exists t \in [0,1] \quad y = (1-t)x + tz\}.$$

(5) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$. Wówczas V można traktować jako strukturę algebraiczną

$$(V, +, (\hat{t})_{t\in\mathbb{R}})$$

typu $((2, (1)_{t\in\mathbb{R}}), \emptyset)$, gdzie $\hat{t} : V \longrightarrow V$ jest dane wzorem

$$\hat{t}(v) = t \cdot v, \qquad v \in V.$$

(6) Niech (M, ϱ) będzie przestrzenią metryczną.
Dla $r \in \mathbb{Q}^+$ zdefiniujmy relację R_r

$$R_r = \{(x,y) \in M^2 : \varrho(x,y) < r\}.$$

(M0) $\varrho(x,y) = 0 \iff x = y$
(M1) $\varrho(x,y) = \varrho(y,x)$
(M2) $\varrho(x,y) \leqslant \varrho(x,z) + \varrho(z,y)$
dla każdych x, y, z.

Wówczas $(M, (R_r)_{r\in\mathbb{Q}^+})$ jest strukturą relacyjną typu $(\emptyset, (2)_{r\in\mathbb{Q}^+})$.
Zauważmy, że metrykę ϱ można odtworzyć z powyższej struktury, mianowicie

$$\varrho(x,y) = \inf\{r\in\mathbb{Q}^+ : (x,y)\in R_r\}.$$

Aby to była metryka, relacje R_r muszą spełniać

(R0) $x=y \iff \forall r\in\mathbb{Q}^+ \ (x,y)\in R_r$ $\longleftarrow$ $\bigcap_{r\in\mathbb{Q}^+} R_r = \Delta(M)$, $\Delta(M) = \{(x,x) : x\in M\}$

(R1) $(x,y)\in R_r \iff (y,x)\in R_r$ $\longleftarrow$ $R_r^{-1} = R_r$

(R2) $(x,z)\in R_s$ i $(z,y)\in R_t \implies (x,y)\in R_{s+t}$ $\longleftarrow$ $R_s\circ R_t \subseteq R_{s+t}$

DEF. Podstrukturą struktury $\mathbb{X} = (X, (a_i)_{i\in I}, (R_j)_{j\in J})$ nazywamy strukturę $\mathbb{Y} = (Y, (\tilde{a}_i)_{i\in I}, (\tilde{R}_j)_{j\in J})$, gdzie

(1) $Y\subseteq X$;

(2) $\tilde{a}_i = a_i|Y^{n_i}$ dla $i\in I$ $\quad (a_i : X^{n_i}\to X)$

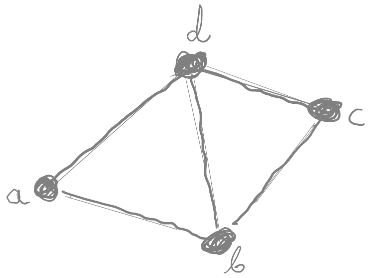
(3) $\tilde{a}_i = a_i \in Y$, w przypadku, gdy $n_i = 0$ $\quad$ (a_i – stała).

(4) $\tilde{R}_j = R_j \cap Y^{m_j}$ dla $j\in J$ $\quad (R_j\subseteq X^{m_j})$.

PRZYKŁAD 2 Graf prosty, to struktura postaci $\mathbb{G} = (G,E)$, gdzie $E\subseteq G^2$ jest relacją symetryczną antyzwrotną tzn. $xEy \implies x\neq y$.

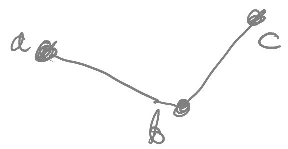
Podstrukturą grafu $\mathbb{G}$ jest podgraf indukowany $(H,\tilde{E})$, gdzie $H\subseteq G$ oraz $\tilde{E} = E\cap H^2$.

W teorii grafów, podgrafem grafu $\mathbb{G}$ nazywamy (każdy) graf postaci $(H,\hat{E})$, gdzie $H\subseteq G$ oraz $\hat{E}\subseteq E\cap H^2$.

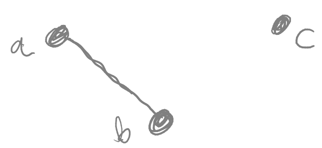


$G = \{a,b,c,d\}$
$E = \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(c,d),(d,c),(b,d),(d,b),(a,d),(d,a)\}$

Podgraf indukowany:
$H = \{a,b,c\}$,
$\tilde{E} = \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$.



Przykład podgrafu (nieindukowanego):
$H = \{a,b,c\}$,
$\hat{E} = \{(a,b),(b,a)\}$.



DEF. Niech $\mathbb{X}=(X,(a_i)_{i\in I},(R_j)_{j\in J})$, $\mathbb{Y}=(Y,(b_i)_{i\in I},(S_j)_{j\in J})$ będą strukturami tego samego typu. Homomorfizmem z $\mathbb{X}$ do $\mathbb{Y}$ nazywamy odwzorowanie $f: X\longrightarrow Y$ spełniające

(H1) $f(a_i(x_1,\dots,x_{n_i})) = b_i(f(x_1),\dots,f(x_{n_i}))$ dla $x_1,\dots,x_{n_i}\in X$, $i\in I$.

(H2) $f(a_i) = b_i$ jeśli $n_i=0$, czyli a_i, b_i są stałymi.

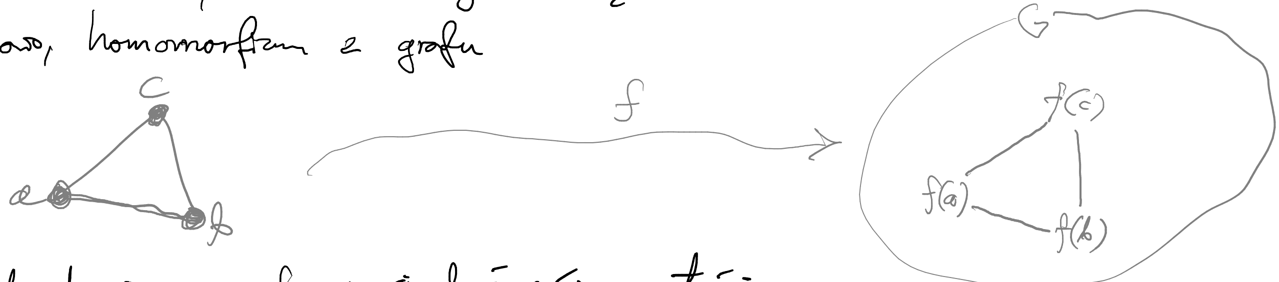
(H3) $(x_1,\dots,x_{m_j})\in R_j \Longrightarrow (f(x_1),\dots,f(x_{m_j}))\in S_j$ dla $x_1,\dots,x_{m_j}\in X$, $j\in J$.

Piszemy wtedy $f:\mathbb{X}\longrightarrow\mathbb{Y}$.

FAKT 1 Struktury matematyczne ustalonego typu wraz z homomorfizmami tworzą kategorię.

PRZYKŁAD 3 (1) Homomorfizm grafów prostych, to każde odwzorowanie pomiędzy zbiorami wierzchołków, które zachowuje krawędzie.

Przykładowo, homomorfizm z grafu



w jakikolwiek inny graf musi być różnowartościowy.

(2) Niech (M,ϱ_M), (N,ϱ_N) będą przestrzeniami metrycznymi, traktowanymi jako struktury relacyjne jak w Przykładzie 1 (6).

Odwzorowanie $f: M\longrightarrow N$ jest homomorfizmem $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $\big(\forall r\in\mathbb{Q}^+\big)\big(\forall x,y\in M\big)$ $(x,y)\in R_r^M \Rightarrow (f(x),f(y))\in R_r^N$,

czyli $\big(\forall r\in\mathbb{Q}^+\big)\big(\forall x,y\in M\big)$ $\varrho_M(x,y)<r \Longrightarrow \varrho_N(f(x),f(y))<r$.

Tak więc, $f: M\longrightarrow N$ jest homomorfizmem $\Longleftrightarrow$ f jest odwzorowaniem nierozszerzającym, to znaczy $\forall x,y\in M$ $\varrho_N(f(x),f(y))\leqslant\varrho_M(x,y)$.

Istotnie, jeśli istnieją x,y takie, że $\varrho_M(x,y)<\varrho_N(f(x),f(y))$, to biorąc $r\in\mathbb{Q}^+$ spełniające $\varrho_M(x,y)<r\leqslant\varrho_N(f(x),f(y))$, dostajemy $(x,y)\in R_r^M$ oraz $(f(x),f(y))\notin R_r^N$.

PRODUKTY STRUKTUR

DEF. Niech $\mathbb{X}_s = (X_s, (a_i^s)_{i\in I}, (R_j^s)_{j\in J})$, $s \in S$, będzie indeksowaną rodziną struktur ustalonego typu.

Niech $X = \prod_{s\in S} X_s$ i zdefiniujmy $a_i : X^{n_i} \longrightarrow X$, $R_j \subseteq X^{m_j}$, wzorami

$$a_i(x_1, \dots, x_{n_i})(s) := a_i^s(x_1(s), \dots, x_{n_i}(s)), \qquad i \in I,\ x_1, \dots, x_{n_i} \in X,$$

$$(x_1, \dots, x_{m_j}) \in R_j :\Longleftrightarrow \forall s \in S \quad (x_1(s), \dots, x_{m_j}(s)) \in R_j^s,$$

$$j \in J,\ x_1, \dots, x_{m_j} \in X.$$

Strukturę $\mathbb{X} = (X, (a_i)_{i\in I}, (R_j)_{j\in J})$ nazywamy iloczynem kartezjańskim rodziny $(\mathbb{X}_s)_{s\in S}$. Oznaczenie: $\mathbb{X} = \prod_{s\in S} \mathbb{X}_s$.

Jeśli $\mathbb{X}_s = \mathbb{Y}$ dla $s \in S$, to iloczyn $\prod_{s\in S} \mathbb{X}_s$ nazywamy potęgą struktury $\mathbb{Y}$ i oznaczamy $\mathbb{Y}^S$.

FAKT 2 Iloczyn kartezjański jest produktem w kategorii struktur ustalonego typu.

DOWÓD. Dla $t \in S$ niech $\pi_t : \prod_{s\in S} \mathbb{X}_s \longrightarrow \mathbb{X}_t$ będzie rzutowaniem kanonicznym, tzn. $\pi_t(x) = x(t)$. Przyjmijmy oznaczenia z powyższej definicji.

Ustalmy $t \in S$. Dla $i \in I$, $x_1, \dots, x_{n_i} \in \prod_{s\in S} X_s$ mamy

$$\pi_t(a_i(x_1, \dots, x_{n_i})) = a_i(x_1, \dots, x_n)(t) = a_i^t(\pi_t(x_1), \dots, \pi_t(x_{n_i})).$$

Dla $j \in J$, $x_1, \dots, x_{m_j} \in \prod_{s\in S} X_s$ mamy

$$(x_1, \dots, x_{m_j}) \in R_j \implies (\pi_t(x_1), \dots, \pi_t(x_{m_j})) \in R_j^t.$$

Tak więc, π_t jest homomorfizmem.

Ustalmy strukturę $\mathbb{M}$ tego samego typu co $\mathbb{X}_s$, $s \in S$.

Ustalmy rodzinę homomorfizmów $(f_s : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{X}_s)_{s\in S}$.

Istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $h : M \longrightarrow \prod_{s\in S} X_s$ spełniające $\pi_t \circ h = f_t$ dla $t \in S$. Konkretnie:

$$h(p)(t) = f_t(p) \quad \text{dla } p \in M.$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{M} \arrow[d, dashed, "\exists!\, h"] \arrow[dd, bend right=50, "f_t"'] \\ \prod_{s\in S} \mathbb{X}_s \arrow[d, "\pi_t"] \\ \mathbb{X}_t \end{tikzcd}$$

Pozostaje sprawdzić, że h jest homomorfizmem.

Dla $i \in I$, $p_1, \ldots, p_{n_i} \in M$ mamy

$$h(a_i^M(p_1, \ldots, p_{n_i}))(t) = f_t(a_i^M(p_1, \ldots, p_{n_i})) = a_i^t(\underbrace{f_t(p_1)}_{h(p_1)(t)}, \ldots, \underbrace{f_t(p_{n_i})}_{h(p_{n_i})(t)}), \quad t \in S,$$

zatem
$$h(a_i^M(p_1, \ldots, p_{n_i})) = a_i(h(p_1), \ldots, h(p_{n_i})).$$

Dla $j \in J$, $p_1, \ldots, p_{m_j} \in M$ mamy

$$(p_1, \ldots, p_{m_j}) \in R_j^M \implies \forall t \in S \quad (\underbrace{f_t(p_1)}_{h(p_1)(t)}, \ldots, \underbrace{f_t(p_{m_j})}_{h(p_{m_j})(t)}) \in R_j^t,$$

zatem
$$(h(p_1), \ldots, h(p_{m_j})) \in R_j.$$

Z tego wynika, że h jest homomorfizmem. $\blacksquare$

GENEROWANIE STRUKTUR

DEF. Niech będzie dana struktura $\mathbb{A}$ typu $((n_i)_{i \in I}, (m_j)_{j \in J})$. Definiujemy $ISP(\mathbb{A})$ jako klasę wszystkich struktur izomorficznych z podstrukturami jakiejkolwiek potęgi struktury $\mathbb{A}$.

I (isomorphic)
S (substructure)
P (power)

PRZYKŁAD 4 Niech $\mathbb{P} = (\{0,1\}, \leqslant)$, gdzie $\leqslant$ oznacza zwykły porządek, tzn. $0 < 1$.

Czym jest $ISP(\mathbb{P})$?

Ustalmy zbiór niepusty S. Wówczas $\mathbb{P}^S = (\{0,1\}^S, \leqslant^S)$, gdzie

$$x \leqslant^S y \iff \forall s \in S \quad x(s) \leqslant y(s).$$

$$\begin{tikzcd}
(0,1) \arrow[r] & (1,1) \\
(0,0) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur] & (1,0) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{P}^2$

Niech $h: \{0,1\}^S \longrightarrow \mathcal{P}(S)$, $\quad h(x) = x^{-1}(1)$.

Wówczas
$$x \leqslant^S y \iff h(x) \subseteq h(y) \quad \text{dla } x, y \in \{0,1\}^S.$$

Tak więc h jest izomorfizmem z $\mathbb{P}^S$ na $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$.

Stąd $ISP(\mathbb{P})$ składa się ze zbiorów uporządkowanych częściowo.

Ustalmy zbiór częściowo uporządkowany $(X, \leqslant)$. Zdefiniujmy $f: X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ wzorem
$$f(x) = \{p \in X : p \leqslant x\}.$$

Jeśli $x_1 \leq x_2$ w X, to $f(x_1) \subseteq f(x_2)$.

Tak więc $f\colon (X,\leq) \longrightarrow (\mathcal{P}(X),\subseteq)$ jest homomorfizmem.

Jeśli $x_1 \not\leq x_2$, to $x_1 \in f(x_1) \setminus f(x_2)$, zatem $f(x_1) \not\subseteq f(x_2)$.

Z tego wynika, że f jest izomorfizmem na swój obraz $\{f(x) : x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Pokazaliśmy więc, że $ISP(\mathbb{P})$ to klasa wszystkich zbiorów częściowo uporządkowanych.

PRZYKŁAD 5 Niech $\mathbb{L} = (\{0,1\}, \min, \max)$, gdzie min, max to operacje 2-argumentowe. $\min(0,1) = 0 = \min(1,0)$, itd.

Wówczas $ISP(\mathbb{L})$ to klasa wszystkich krat dystrybutywnych.

W szczególności
$$\mathbb{L}^S \approx (\mathcal{P}(S), \cap, \cup).$$

AMALGAMACJE

DEF. Niech $\mathbb{K}$ będzie kategorią. Mówimy, że $\mathbb{K}$ ma własność amalgamacji, dla każdych strzałek $f\colon Z \longrightarrow X$, $g\colon Z \longrightarrow Y$ (w $\mathbb{K}$) istnieją strzałki $f'\colon X \longrightarrow W$, $g'\colon Y \longrightarrow W$ takie, że $f' \circ f = g' \circ g$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f'"] \\
Y \arrow[r, "g'"'] & W
\end{tikzcd}$$

Niech $\mathcal{F}$ będzie ustaloną klasą struktur tego samego typu.

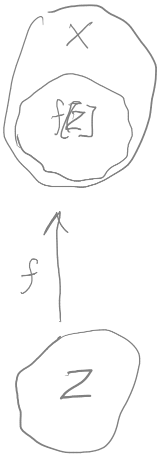
Mówimy, że $\mathcal{F}$ ma własność amalgamacji, jeśli kategoria $Emb(\mathcal{F})$, złożona z wszystkich zanurzeń struktur z $\mathcal{F}$, ma własność amalgamacji.

Powiemy, że $\mathcal{F}$ ma amalgamację w $Z \in \mathcal{F}$, jeśli dla każdych zanurzeń $f\colon Z \to X$, $g\colon Z \to Y$, $X, Y \in \mathcal{F}$, istnieje $W \in \mathcal{F}$ oraz zanurzenia $f'\colon X \to W$, $g'\colon Y \to W$ spełniające $f' \circ f = g' \circ g$.

Mówimy, że $\mathcal{F}$ ma własność amalgamacji współkońcowej, jeśli dla każdego $Z \in \mathcal{F}$ istnieje zanurzenie $e\colon Z \longrightarrow Z' \in \mathcal{F}$ takie, że $\mathcal{F}$ ma amalgamację w Z'.

PRZYKŁAD 6 (1) Klasa zbiorów skończonych ma własność amalgamacji.

Ustalmy zanurzenia zbiorów $f: Z \to X$, $g: Z \to Y$.



Możemy założyć, że $Z \subseteq X \cap Y$ oraz f, g są inkluzjami (tzn. $f(z)=z$, $g(z)=z$ dla $z \in Z$).

Niech $W = X \cup Y$, $f': X \xrightarrow{\subseteq} W$, $g': Y \xrightarrow{\subseteq} W$.

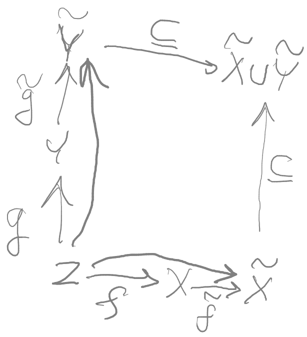
$f'(x) = x$, $g'(y) = y$.

Wówczas $f' \circ f(z) = f'(z) = z = g'(z) = g' \circ g(z)$.

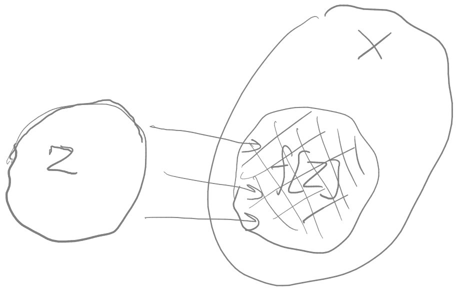
$f: Z \xrightarrow{1-1} X$. Niech $\tilde{f}: X \to Z \cup (X \setminus f[Z])$ będzie dane wzorem

$\tilde{f}(f(z)) = z$, $\tilde{f}(x) = x$, $z \in Z$, $x \in X \setminus f[Z]$

Wówczas $\tilde{f} \circ f : Z \to Z \cup (X \setminus f[Z])$ jest inkluzją.



(2) Klasa wszystkich grafów skończonych ma własność amalgamacji.



Ustalmy zanurzenia grafów

$f: Z \to X$, $g: Z \to Y$.

Tak jak poprzednio, możemy założyć, że f, g są inkluzjami oraz $Z = X \cap Y$.

Wówczas $X \cup Y$ ma strukturę grafu:

$a E b \iff a, b \in X$ i $a E^X b$

lub $a, b \in Y$ i $a E^Y b$.

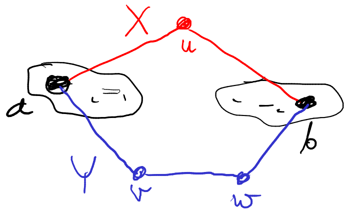
(Z jest podgrafem indukowanym w X i w Y).

(3) Niech $\mathcal{T}$ będzie klasą grafów skończonych acyklicznych (nie zawierających żadnych cykli).

Wówczas $\mathcal{T}$ nie ma własności amalgamacji, ale ma własność amalgamacji współkońcowej.

Dokładniej, $\mathcal{T}$ ma amalgamację w $Z \in \mathcal{T} \iff Z$ jest spójny.

($\Longrightarrow$)



Przypuśćmy, że Z jest niespójny i ustalmy $a, b \in Z$ z różnych składowych. Niech $X = Z \cup \{u\}$ z nowymi krawędziami (a, u), (u, b).

Niech $Y = Z \cup \{v, w\}$ z nowymi krawędziami (a, v), (v, w), (w, b).

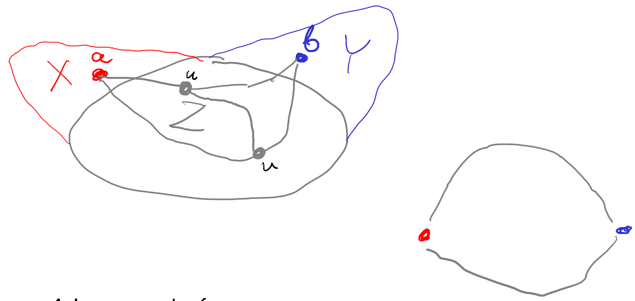
Jeśli $f':X\to W$, $g':Y\to W$ są zanurzeniami, to w grafie W mamy ścieżkę długości 2 od a do b oraz ścieżkę długości 3 od a do b. Tak więc W zawiera cykl przechodzący przez a, b, zatem $W\notin\mathcal{T}$.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $Z\in\mathcal{T}$ jest spójny. Rozważmy $X,Y\in\mathcal{T}$ takie, że

$Z = X\cap Y$ oraz Z jest podgrafem indukowanym w X i Y.

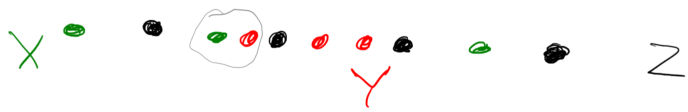
Rozważmy $X\cup Y$ jako graf bez „nowych" krawędzi.

Przypuśćmy, że $C\subseteq X\cup Y$ jest cyklem.



Istnieją $a\in C\cap X\setminus Z$ oraz $b\in C\cap Y\setminus Z$.
Istnieją $u,v\in Z$ na dwóch rozłącznych ścieżkach tworzących cykl C. Istnieje ścieżka S od u do v zawarta w Z, bo Z jest spójna. Ścieżka S wraz z kawałkiem cyklu C od a do u daje cykl w X, sprzeczność.

(4) Klasa wszystkich skończonych zbiorów liniowo uporządkowanych ma własność amalgamacji.
Ustalmy X,Y oraz $Z=X\cap Y$, z relacjami liniowego porządku na X i Y,



które się zgadzają na Z. Mamy relację $<$ na $X\cup Y$ taką, że $<|X^2$, $<|Y^2$ są liniowymi porządkami. Ustalmy $x\in X\setminus Z$, $y\in Y\setminus Z$. Przyjmujemy

$x<y$, jeśli $\exists z\in Z$ takie, że $x<z<y$.

$y<x$, jeśli $\exists u\in Z$ takie, że $y<u<x$.

Jeżeli nie istnieje $z\in Z$ „rozdzielającego" x,y, to definiujemy $x<y$.

(5) Klasa wszystkich skończonych porządków częściowych ma własność amalgamacji.

(6) Klasa wszystkich grup skończenie generowanych ma własność amalgamacji.

(7) Klasa wszystkich grup skończonych ma własność amalgamacji (P. Hall).

PRZYKŁAD 7 Niech $\mathcal{M}=(M,\cdot,e)$ będzie monoidem. Wówczas $\mathcal{M}$ ma własność amalgamacji $\iff (\forall x,y\in M)(\exists x',y')\quad x'\cdot x = y'\cdot y$.
W szczególności, każdy monoid przemienny ma własność amalgamacji.

PRZYKŁAD 8 Klasa przestrzeni wektorowych skończenie wymiarowych nad ustalonym ciałem K ma własność amalgamacji.

Ustalmy zanurzenia $f: Z \longrightarrow X$, $g: Z \longrightarrow Y$. Przyjmijmy

$$W = (X \oplus Y)/M, \quad \text{gdzie} \quad M = \{(f(z), -g(z)) : z \in Z\}$$

Zauważmy, że M jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $X \oplus Y$, ponieważ

$$\lambda(f(z_1), -g(z_1)) + (f(z_2), -g(z_2)) = (f(\lambda z_1 + z_2), -g(\lambda z_1 + z_2)).$$

Zdefiniujmy $f': X \longrightarrow W$, $g': Y \longrightarrow W$ wzorami

$$f'(x) = (x, 0) + M, \qquad g'(y) = (0, y) + M.$$

Są to odwzorowania liniowe.

Mamy
$$f' \circ f(z) = (f(z), 0) + M,$$
$$g' \circ g(z) = (0, g(z)) + M,$$

$$\boxed{\begin{gathered} u + M = v + M \\ \Updownarrow \\ u - v \in M \end{gathered}}$$

zatem $f' \circ f(z) = g' \circ g(z)$, ponieważ $(f(z), 0) - (0, g(z)) = (f(z), -g(z)) \in M$.

Pozostaje pokazać, że f', g' są zanurzeniami.

Mamy

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "g'"'] & (X \oplus Y)/M \end{tikzcd}$$

$$x \in \ker f' \iff (x, 0) + M = M \iff (x, 0) \in M.$$

Z kolei $(x, 0) \in M \iff x = f(z),\ 0 = -g(z)$,

zatem $g(z) = 0 \implies z = 0$ (g jest zanurzeniem),

a więc $x = f(0) = 0$. Stąd $\ker f' = \{0\}$.

Analogicznie $\ker g' = \{0\}$.

FAKT 3 Niech $\mathcal{F}$ będzie klasą struktur relacyjnych skończonych, zamkniętą na podstruktury.

Wówczas $\mathcal{F}$ ma własność amalgamacji $\iff$ dla każdych zanurzeń $f: Z \longrightarrow X$, $g: Z \longrightarrow Y$ takich, że $Z, X, Y \in \mathcal{F}$, $|X \setminus f[Z]| \leq 1$, $|Y \setminus g[Z]| \leq 1$, istnieją zanurzenia $f': X \longrightarrow W$, $g': Y \longrightarrow W$ takie, że $W \in \mathcal{F}$ oraz $f' \circ f = g' \circ g$.

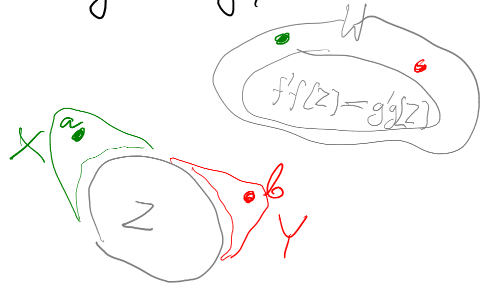
DOWÓD. 1. Mając dane zanurzenie $h: A \longrightarrow B$, $A, B \in \mathcal{F}$, zdefiniujmy $d(h) = |B \setminus h[A]|$.

Wówczas h jest izomorfizmem $\iff d(h) = 0$.

Nasze założenia mówią, że zanurzenia $f: Z \longrightarrow X$, $g: Z \longrightarrow Y$ takie, że $d(f) \leq 1$, $d(g) \leq 1$, można zamalgamować poprzez zanurzenia $f': X \longrightarrow W$, $g': Y \longrightarrow W$ (tzn. $f' \circ f = g' \circ g$).

Korzystając z tego, że $\mathcal{F}$ jest zamknięta na podstruktury, możemy założyć, że

$$W = f'[X]\cup g'[Y].$$



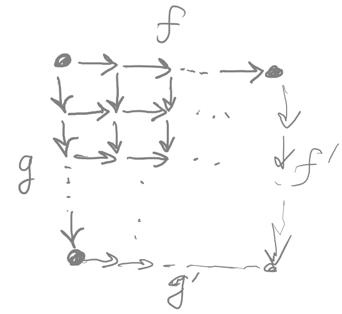
Wówczas $W\setminus f'[X] \subseteq \overbrace{g'[Y\setminus g[Z]]}^{\{g'(b)\}}$.

Istotnie, mamy $X = f[Z]\cup\{a\}$, zatem

$$f'[X] = f'f[Z]\cup\{f'(a)\} = g'g[Z]\cup\{f'(a)\},$$ zatem

jeśli $w\in W\setminus f'[X]$, to $w\notin g'g[Z]$, $w\neq f'(a)$, a więc $w\in g'[Y]\setminus g'g[Z]\subseteq\{g'(b)\}$. Tak więc $d(f')\leq 1$.
Tak samo $d(g')\leq 1$.

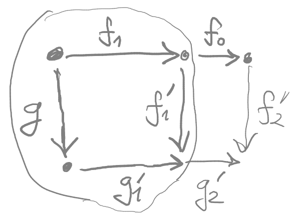
2. Indukcja ze względu na $d(f), d(g)$.



Dowodzimy, że

(A) $\forall f: Z\to X\ \forall g: Z\to Y$ zanurzenia, $Z,X,Y\in\mathcal{F}$,
$\exists W\in\mathcal{F}\ \exists f': X\to W\ \exists g': Y\to W$ zanurzenia,
takie, że $f'\circ f = g'\circ g$ oraz $d(f')\leq d(g)$ i $d(g')\leq d(f)$.

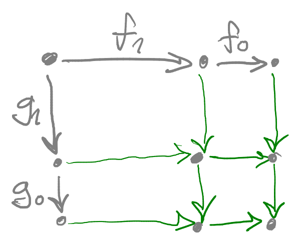
Pierwsza część dowodu mówi, że (A) zachodzi, o ile $\max\{d(f), d(g)\}\leq 1$.
Załóżmy, że $n>1$ oraz (A) jest prawdą dla wszystkich f,g spełniających $\max\{d(f),d(g)\}<n$.
Ustalmy zanurzenia $f: Z\to X$, $g: Z\to Y$ takie, że $d(f)=n$, $d(g)\leq n$.
Przypuśćmy, że $d(g)<n$. Mamy $f=f_0\circ f_1$, gdzie $d(f_0)=1$, $d(f_1)=n-1$. Z założenia indukcyjnego, istnieją zanurzenia f_1', g_1' takie, że $f_1'\circ f_1 = g_1'\circ g$ oraz $d(f_1')\leq d(g)$, $d(g_1')\leq d(f_1)=n-1$. Korzystając ponownie z założenia indukcyjnego, dostajemy zanurzenia f_2', g_2' takie, że $f_2'\circ f_0 = g_2'\circ f_1'$ oraz $d(g_2')\leq d(f_0)=1$, $d(f_2')\leq d(g)$. Niech $g' = g_2'\circ g_1'$. Wówczas



$$f_2'\circ f = \underline{f_2'\circ f_0}\circ f_1 = g_2'\circ \underline{f_1'\circ f_1} = g_2'\circ g_1'\circ g = g'\circ g$$

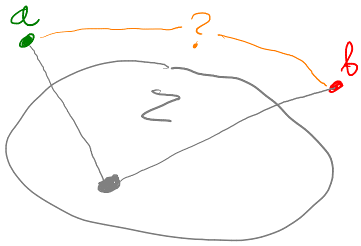
oraz $d(g')\leq d(g_2')+d(g_1')\leq 1+n-1=n$, $d(f_2')\leq d(g)$.

Jeśli $d(g)=n$, to $g=g_0\circ g_1$, $d(g_1)=n-1$, $d(g)=1$ i korzystamy z założenia indukcyjnego trzy razy, reszta dowodu jest praktycznie taka sama. ∎



ZADANIE 1

Pokaż, że klasa wszystkich skończonych przestrzeni metrycznych ma własność amalgamacji.

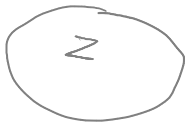


PRZYKŁAD 9

Niech $N>1$ będzie liczbą naturalną. Wówczas klasa wszystkich zbiorów mocy $\leq N$ ma własność amalgamacji.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "?"] & W \end{tikzcd}$$

Ustalmy zanurzenia $f: Z \to X$, $g: Z \to Y$ (funkcje 1–1). Na mocy Faktu 3, możemy założyć, że $|X \setminus f[Z]| \leq 1$, $|Y \setminus g[Z]| \leq 1$.



Jeśli np. f jest bijekcją, to $g \circ f^{-1}$, id_Y dają amalgamację.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "id_Z"] & X \arrow[d, "f^{-1}"] \\ Y \arrow[ddr, "id_Y"'] & Z \arrow[dd, "g"] \\ & \\ & Y \end{tikzcd}$$

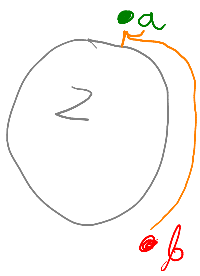
Możemy więc założyć, że $X = Z \cup \{a\}$, $Y = Z \cup \{b\}$, f, g są inkluzjami.

Jeśli $|Z| < N-1$, to $X \cup Y$ daje amalgamację, bo

$$|X \cup Y| \leq |Z| + 2 < N+1.$$

Jeśli $|Z| = N-1$, to musimy utożsamić a, b, aby dostać zbiór mocy N.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f", "\subseteq"'] \arrow[d, "g"', "\subseteq"] & Z \cup \{a\} \arrow[d, "id_{Z \cup \{a\}}"] \\ Z \cup \{b\} \arrow[r, "g'"'] & Z \cup \{a\} \end{tikzcd}$$



$g'|Z = id_Z$, $g'(b) = a$.