TEORIA KATEGORII

DEF. *Kategorią* nazywamy strukturę postaci $\mathcal{C} = \langle \mathcal{O}, \mathcal{A}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ \rangle$, gdzie:

(1) $\mathcal{O}$ jest klasą *obiektów*, $\mathcal{A}$ jest klasą *strzałek* (*morfizmów*).

(2) $\mathrm{dom}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}$, $\mathrm{cod}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}$, przy czym $\mathrm{dom}(f)$ nazywa się *dziedziną* strzałki f, a $\mathrm{cod}(f)$ jest *przeciwdziedziną* f.

(3) $\circ$ jest częściowym działaniem w $\mathcal{A}$, zwanym *składaniem*. Dokładniej, $f \circ g$ jest zdefiniowane $\iff$ $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{cod}(g)$. Ponadto $\mathrm{dom}(f\circ g) = \mathrm{dom}(g)$, $\mathrm{cod}(f \circ g) = \mathrm{cod}(f)$.

(4) Składanie jest łączne, tzn. $(f\circ g)\circ h = f \circ (g \circ h)$, pod warunkiem, że $f\circ g$, $g \circ h$ są zdefiniowane.

(5) Dla każdego obiektu $A \in \mathcal{O}$ istnieje $\mathrm{id}_A \in \mathcal{A}$ taka, że $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{cod}(\mathrm{id}_A) = A$ oraz

$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \qquad \mathrm{id}_A \circ g = g$$

dla każdych strzałek f, g spełniających $\mathrm{dom}(f) = A = \mathrm{cod}(g)$. Strzałka id_A nazywa się *identycznością*.

Nie zakładamy, że $\mathcal{O} \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

PRZYKŁAD 1 Kategoria zbiorów **Set**. Klasa obiektów, to klasa wszystkich zbiorów. Strzałki to odwzorowania, a składanie $\circ$ to składanie odwzorowań. Dla odwzorowania $f: X \longrightarrow Y$ mamy $\mathrm{dom}(f) = X$, $\mathrm{cod}(f) = Y$. Identyczność id_X to odwzorowanie tożsamościowe, tzn. $\mathrm{id}_X(x) = x$ dla $x \in X$.

> Formalnie, odwzorowanie to trójka postaci (f, X, Y), gdzie $f \subseteq X \times Y$ jest funkcją.

Pojęcie kategorii zostało wprowadzone przez Eilenberga i MacLane'a ok. 1945 roku.

FAKT 1 W każdej kategorii identyczność obiektu jest wyznaczona jednoznacznie.

DOWÓD. Ustalmy obiekt A i przypuśćmy, że l_A, p_A spełniają definicję identyczności. Wówczas

$$l_A = l_A \circ p_A = p_A. \quad \blacksquare$$

PRZYKŁAD 2 Każdy monoid jest kategorią z jedynym obiektem. Dokładniej, jeśli $\langle M, \circ, 1\rangle$ jest monoidem, to $\mathcal{M} = \langle \{M\}, M, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ \rangle$ jest kategorią, gdzie $\mathrm{dom}(x) = M = \mathrm{cod}(x)$ dla $x \in M$.

Z drugiej strony, jeśli A jest obiektem kategorii $\mathcal{C}$, to

$$\langle \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(A), \circ, \mathrm{id}_A \rangle, \quad \text{gdzie } \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(A) = \{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{dom}(f) = A = \mathrm{cod}(f)\},$$

jest monoidem.

Tak więc (pomijając dom, cod) monoidy to kategorie z jedynym obiektem.

DEF. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Jej klasę obiektów będziemy oznaczać przez $Ob(\mathcal{C})$.
Dla $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ przyjmujemy oznaczenie

$$\mathcal{C}(A,B) = \{ f \in \mathcal{A} : \ dom(f) = A, \ cod(f) = B \}.$$

Ponadto kategorię $\mathcal{C}$ będziemy utożsamiać z jej klasą strzałek.
Jeśli $f \in \mathcal{C}(A,B)$, to będziemy pisać $f : A \longrightarrow B$ lub $A \xrightarrow{f} B$.

Mamy $End_{\mathcal{C}}(A) = \mathcal{C}(A,A)$.

DEF. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $f : A \longrightarrow B$. Strzałkę f nazywamy odwracalną, jeśli istnieje $g : B \longrightarrow A$ taka, że $f \circ g = id_B$ oraz $g \circ f = id_A$.
Strzałkę odwracalną nazywamy izomorfizmem. Izomorfizm postaci $f : A \longrightarrow A$ nazywamy automorfizmem obiektu A. Zbiór wszystkich automorfizmów obiektu A oznaczamy $Aut(A)$ lub $Aut_{\mathcal{C}}(A)$.

FAKT 2 $\langle Aut(A), \circ \rangle$ jest grupą.

FAKT 3 Niech $f : A \to B$ będzie strzałką. Jeśli $g_1, g_2 : B \to A$ są takie, że

$$g_1 \circ f = id_A \quad \text{oraz} \quad f \circ g_2 = id_B, \quad \text{to} \quad g_1 = g_2.$$

DOWÓD. Mamy $$g_1 = g_1 \circ id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = id_A \circ g_2 = g_2. \ \blacksquare$$

DEF. Strzałkę $g : B \to A$ spełniającą $f \circ g = id_B$ oraz $g \circ f = id_A$ będziemy oznaczać f^{-1} i nazywać odwrotnością strzałki f.

FAKT 4 Jeśli f_0, f_1 są izomorfizmami oraz $dom(f_0) = cod(f_1)$, to $f_0 \circ f_1$ jest izomorfizmem oraz $(f_0 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_0^{-1}$.

PRZYKŁAD 3 Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie zbiorem quasi-uporządkowanym, tzn.

$$(\forall x \in X) \ x \leq x \quad \text{oraz} \quad (\forall x, y, z \in X) \ x \leq y \ i \ y \leq z \Rightarrow x \leq z.$$

Wówczas $\mathcal{X} = \langle X, \leq, dom, cod, \circ \rangle$ jest kategorią, gdzie

$$dom(\langle x, y \rangle) = x, \quad cod(\langle x, y \rangle) = y \quad \text{oraz} \quad \langle y, z \rangle \circ \langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle.$$

Z przechodniości relacji $\leq$ wynika, że składanie $\circ$ jest poprawnie zdefiniowane.
Zwrotność daje strzałki identycznościowe: $id_x = \langle x, x \rangle$.
Izomorfizm to strzałka $\langle x, y \rangle$ taka, że $x \leq y$ oraz $y \leq x$.

PRZYKŁAD 4 Niech $\mathcal{F}$ będzie klasą struktur matematycznych ustalonego typu.
Wówczas $\mathcal{F}$ tworzy kategorię, w której strzałkami są homomorfizmy.

DEF. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Kategorię $\mathcal{D}$ nazywamy podkategorią kategorii $\mathcal{C}$, jeśli

(1) $Ob(\mathcal{D}) \subseteq Ob(\mathcal{C})$, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, $dom_{\mathcal{D}} = dom_{\mathcal{C}}|_{\mathcal{D}}$, $cod_{\mathcal{D}} = dom_{\mathcal{C}}|_{\mathcal{D}}$.

(2) Składanie w $\mathcal{D}$ jest tym samym co składanie w $\mathcal{C}$.

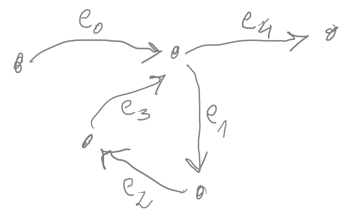
(3) Identyczności w $\mathcal{D}$ są identycznościami w $\mathcal{C}$.

Podkategorię $\mathcal{D}$ nazywamy pełną w $\mathcal{C}$, jeśli $\mathcal{D}(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$ dla każdych $X, Y \in Ob(\mathcal{D})$.
Podkategorię $\mathcal{D}$ nazywamy szeroką w $\mathcal{C}$, jeśli $Ob(\mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C})$.

PRZYKŁAD 5 Kategoria ścieżek. Niech $\mathcal{G} = \langle V, E, p, k \rangle$ będzie grafem skierowanym. To znaczy V jest zbiorem wierzchołków, E jest zbiorem krawędzi (skierowanych), $p, k : E \to V$. Dla $e \in E$ wierzchołek $p(e)$ nazywamy początkiem, a wierzchołek $k(e)$ nazywamy końcem krawędzi e.

Ścieżką w $\mathcal{G}$ nazywamy ciąg krawędzi $\langle e_0, \dots, e_{n-1} \rangle$ taki, że

$$k(e_i) = p(e_{i+1}) \quad \text{dla } i < n-1.$$



Dla ścieżki $f = \langle e_0, \dots, e_{n-1} \rangle$ definiujemy

$$dom(f) := p(e_0), \qquad cod(f) := k(e_{n-1}).$$

Mając dane ścieżki $f = \langle e_0, \dots, e_{n-1} \rangle$ $g = \langle d_0, \dots, d_{m-1} \rangle$ takie, że $cod(f) = dom(g)$ definiujemy ich złożenie

$$g \circ f = \langle e_0, \dots, e_{n-1}, d_0, \dots, d_{m-1} \rangle.$$

Składanie ścieżek jest łączne.
Dla każdego wierzchołka v „dodajemy" pustą ścieżkę id_v taką, że $id_v \circ f = f$, $g \circ id_v = g$ dla każdych ścieżek f, g takich, że $cod(f) = v = dom(g)$.

Wówczas $\mathcal{G}$ staje się kategorią.

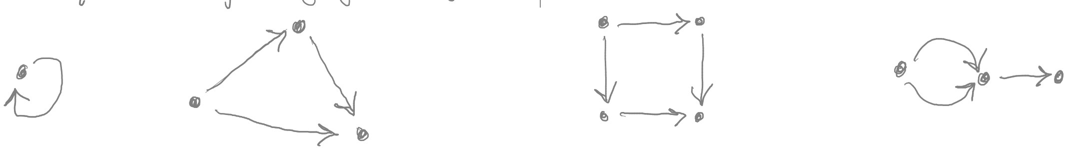
Bardziej formalnie, strzałka od u do v jest trójka postaci

$$f = \langle u, s, v \rangle,$$

gdzie s jest ścieżką od u do v, tzn. $dom(s) = u$, $cod(s) = v$.
W szczególności, $id_v = \langle v, \emptyset, v \rangle$.

Powyżej skonstruowaną kategorię nazywamy kategorią ścieżek nad grafem $\mathcal{G}$.

Nieformalnie, diagram to graf skierowany, w którym każdej krawędzi przypisano strzałkę ustalonej z góry kategorii, przy czym ścieżki odpowiadają złożeniom.



DEF. Niech $\mathcal{G} = \langle V, E, p, k \rangle$ będzie grafem skierowanym, $\mathcal{C}$ kategorią.
Diagramem w $\mathcal{C}$ o kształcie $\mathcal{G}$ nazywamy parę odwzorowań $\Phi = \langle \varphi_V, \varphi_E \rangle$ taką, że
$\varphi_V : V \longrightarrow Ob(\mathcal{C})$, $\varphi_E : E \longrightarrow \mathcal{C}$ oraz dla każdej krawędzi $e \in E$ zachodzi

$$\varphi_E(e) : \varphi_V(p(e)) \longrightarrow \varphi_V(k(e)).$$

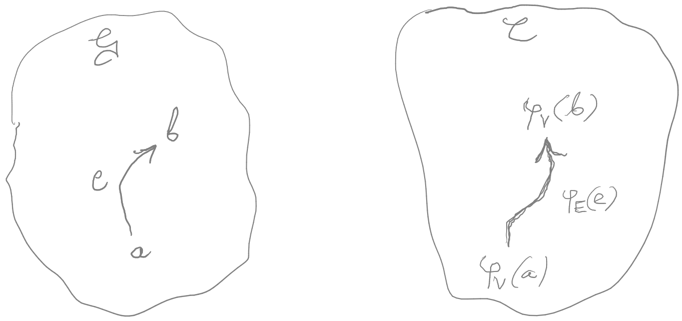


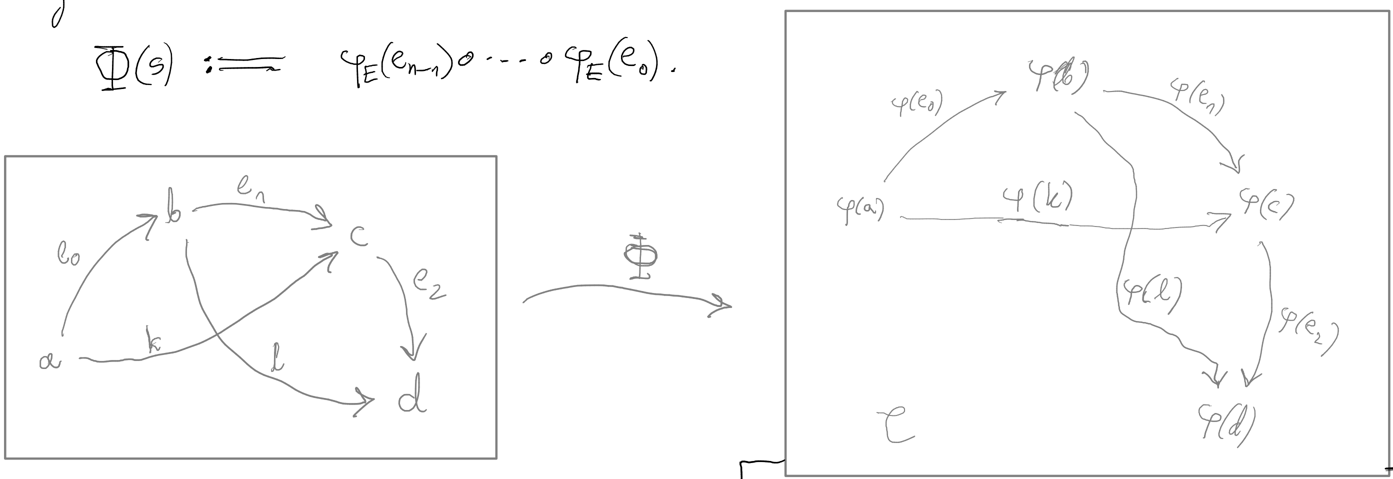
Diagram Φ nazywamy przemiennym, jeśli dla każdych $a, b \in V$, dla każdych dwóch ścieżek s, t takich $dom(s) = a = dom(t)$, $cod(s) = b = cod(t)$ odpowiednie złożenia ich obrazów poprzez φ_E są równe.

Konkretnie, mając daną ścieżkę $s = \langle e_0, \ldots, e_{n-1} \rangle$ w $\mathcal{G}$, jej obraz

$$\varphi_E(s) = \langle \varphi_E(e_0), \ldots, \varphi_E(e_{n-1}) \rangle$$

jest ścieżką w $\mathcal{C}$ (każda kategoria jest w szczególności grafem skierowanym), zatem mamy złożenie

$$\Phi(s) := \varphi_E(e_{n-1}) \circ \cdots \circ \varphi_E(e_0).$$



W praktyce, rozważając diagramy w kategorii $\mathcal{C}$, ich kształt jest oczywisty, a więc możemy ignorować Φ.

Przemienność powyższego diagramu oznacza
(1) $\varphi(k) = \varphi(e_1) \circ \varphi(e_0)$,
(2) $\varphi(l) = \varphi(e_2) \circ \varphi(e_1)$.
(3) $\varphi(e_2) \circ \varphi(e_1) \circ \varphi(e_0) = \varphi(l) \circ \varphi(e_0) = \varphi(e_2) \circ \varphi(k)$
Zauważmy, że (1) & (2) $\Longrightarrow$ (3).

DEF. Mówimy, że kategoria $\mathcal{C}$ ma własność amalgamacji, jeśli dla każdych strzałek $f : Z \longrightarrow X$, $g : Z \longrightarrow Y$ istnieje $W \in Ob(\mathcal{C})$ oraz strzałki $f' : X \longrightarrow W$, $g' : Y \longrightarrow W$ spełniające $f' \circ f = g' \circ g$.

Innymi słowy, każdy diagram postaci

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

można rozszerzyć (dopełnić) do diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "g'"'] & W \end{tikzcd}.$$

DEF. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Ciągiem w $\mathcal{C}$ nazywamy dowolny diagram postaci

$$X_0 \xrightarrow{x_0^1} X_1 \xrightarrow{x_1^2} X_2 \xrightarrow{x_2^3} \cdots$$

Kształt powyższego skierowany prosty, którego zbiorem wierzchołków jest $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$, a krawędziami są pary $\langle n, n+1\rangle$, $n \in \mathbb{N}$.

Ciąg jak powyżej będziemy oznaczali $\vec{x}$. Obiekt X_n to n-ty wyraz ciągu $\vec{x}$.
Dla $n < m$ przyjmujemy

$$x_n^m = x_{m-1}^m \circ \cdots \circ x_n^{n+1} \qquad \text{oraz} \qquad x_n^n = id_{X_n}.$$

Strzałki x_n^m nazywane są strzałkami wiążącymi ciągu $\vec{x}$.
Łatwa indukcja daje

$$(\forall k \leq l \leq m) \qquad x_k^m = x_l^m \circ x_k^l.$$

DEF. Obiekt G kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy końcowym, jeśli

$$\forall X \in Ob(\mathcal{C}) \qquad |\mathcal{C}(X, G)| = 1.$$

FAKT 5 Obiekt końcowy, o ile istnieje, jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

DOWÓD. Załóżmy, że G, H są końcowe w $\mathcal{C}$. Wówczas

$$\mathcal{C}(G, H) = \{g\}, \quad \mathcal{C}(H, G) = \{h\}, \quad \mathcal{C}(G, G) = \{id_G\}, \quad \mathcal{C}(H, H) = \{id_H\}.$$

Z kolei, $g \circ h \in \mathcal{C}(H, H)$, $h \circ g \in \mathcal{C}(G, G)$. Stąd $g \circ h = id_H$, $h \circ g = id_G$.
Tak więc g jest izomorfizmem oraz $h = g^{-1}$. $\blacksquare$

PRZYKŁAD 6 Obiektem końcowym w kategorii zbiorów jest zbiór jednoelementowy.
Izomorfizmy w kategorii zbiorów to bijekcje.

DEF. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Kategorią odwróconą do $\mathcal{C}$ nazywamy kategorię $\mathcal{C}^{op}$, której obiekty i strzałki są takie jak w $\mathcal{C}$, natomiast $dom_{\mathcal{C}^{op}} = cod_{\mathcal{C}}$, $cod_{\mathcal{C}^{op}} = dom$
oraz $f \circ g$ w $\mathcal{C}^{op}$ jest zdefiniowane jako $g \circ f$ w $\mathcal{C}$.

Obiekt końcowy w $\mathcal{C}^{op}$ nazywa się obiektem początkowym w $\mathcal{C}$.

PRZYKŁAD 7 Obiektem początkowym kategorii zbiorów jest zbiór pusty $\emptyset$.
Istotnie, dla dowolnego zbioru X, odwzorowanie $\emptyset : \emptyset \to X$ jest jedynym odwzorowaniem z $\emptyset$ do X.

GRANICA CIĄGU

DEF. Niech $\vec{x}$ będzie ciągiem w kategorii $\mathcal{C}$. Kostożkiem nad $\vec{x}$ nazywamy parę $\langle Y, \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle$, gdzie $Y\in Ob(\mathcal{C})$, $f_n: X_n \longrightarrow Y$ dla $n\in\mathbb{N}$; oraz

$$(\forall n\in\mathbb{N}) \qquad f_n = f_{n+1}\circ x_n^{n+1}.$$

Kostożki nad $\vec{x}$ tworzą kategorię. Mianowicie, strzałką od $\langle Y, \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle$ do $\langle Z, \{g_n\}\rangle$ jest trójka postaci

$$\Big\langle \langle Y, \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle,\ h,\ \langle Z, \{g_n\}\rangle \Big\rangle,$$

$$\begin{tikzcd}
X_n \arrow[r, "x_n^{n+1}"] \arrow[dr, "f_n"] \arrow[ddr, "g_n"'] & X_{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \arrow[dd, bend left, "g_{n+1}"] \\
& Y \arrow[d, dashed, "h"] \\
& Z
\end{tikzcd}$$

gdzie $h: Y \longrightarrow Z$ spełnia $(\forall n\in\mathbb{N})\ h\circ f_n = g_n$.

Obiekt początkowy kategorii kostożków nazywamy (ko-)granicą ciągu $\vec{x}$.

Jeśli ciąg $\vec{x}$ ma granicę w $\mathcal{C}$, to oznaczamy ją $\lim \vec{x} = \langle X_\infty, \{x_n^\infty\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle$.

Tak więc, $\lim\vec{x}$ spełnia warunki:

(G0) $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad x_n^\infty = x_{n+1}^\infty \circ x_n^{n+1}$.

(G1) Jeśli $\{f_n: X_n \to Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia $(\forall n\in\mathbb{N})\ f_n = f_{n+1}\circ x_n^{n+1}$, to istnieje dokładnie jedna strzałka $h: X_\infty \longrightarrow Y$ taka, że $(\forall n\in\mathbb{N})\ h\circ x_n^\infty = f_n$.

PRZYKŁAD 8 Rozważmy kategorię zbiorów. Niech $X_0\subseteq X_1 \subseteq \ldots$ będzie łańcuchem zbiorów. Wówczas mamy ciąg $\vec{x}$ w $\mathbf{Set}$, gdzie $x_n^{n+1} = \subseteq_{X_n}^{X_{n+1}}$ (tzn. $x_n^{n+1}(p) = p$ dla $p\in X_n$).

Jego granicą jest $\langle X_\infty, \{x_n^\infty\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle$, gdzie

$$X_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \quad \text{oraz} \quad x_n^\infty = \subseteq_{X_n}^{X_\infty} \ \text{dla } n\in\mathbb{N}.$$

Istotnie, jeśli $\{f_n: X_n \to Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia $f_n = f_{n+1}|X_n$ dla $n\in\mathbb{N}$, to $f_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ jest jedynym odwzorowaniem spełniającym (G1).

Dla zbiorów $A\subseteq B$, odwzorowanie $\iota: A\to B$, $\iota(a) = a$, $a\in A$, oznaczamy $\subseteq_A^B$.

Zauważmy, że jeśli $f: B\to X$, $A\subseteq B$, to $f\circ \subseteq_A^B = f|A$.

Polecam ciekawą książkę o zastosowaniach teorii kategorii:

Brendan Fong, David I Spivak, Seven Sketches in Compositionality: An Invitation to Applied Category Theory

https://arxiv.org/abs/1803.05316