ABSTRAKCYJNE SYSTEMY EWOLUCYJNE

DEF. Systemem ewolucyjnym nazywamy trójkę postaci

$$\mathcal{E} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{T}, \Theta \rangle,$$

gdzie

(1) $\mathcal{V}$ jest kategorią (nasze „uniwersum");

(2) $\mathcal{T}$ jest klasą strzałek kategorii $\mathcal{V}$, zwanych tranzycjami;

(3) Θ jest ustalonym obiektem kategorii $\mathcal{V}$, zwanym początkiem.

Ponadto, spełnione są następujące aksjomaty:

(E0) Identyczności są tranzycjami.

(E1) $\forall t \in \mathcal{T} \ \forall h \in \mathcal{V} \ \big(h \text{ izomorfizm } \& \ \mathrm{dom}(h) = \mathrm{cod}(t) \implies h \circ t \in \mathcal{T} \big)$

(E2) $\mathcal{V}$ jest zamknięta na kogranice ciągów.

ciąg = funktor z $\mathbb{N}$.

Dla $X \in Ob(\mathcal{V})$ przyjmujemy oznaczenie

$$\mathcal{T}(X) := \{ t \in \mathcal{T} : \mathrm{dom}(t) = X \}.$$

(E0) mówi, że $id_X \in \mathcal{T}(X)$.

(E1) mówi, że $\forall t \in \mathcal{T}(X) \ \forall h : \mathrm{cod}(t) \xrightarrow{\approx} Y, \quad h \circ t \in \mathcal{T}(X)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "h\circ t"] & \\ \bullet \arrow[r, "h", "\approx"'] & Y \end{tikzcd}$$

Niech $X, Y \in Ob(\mathcal{V})$. Ścieżką od X do Y będziemy nazywać każdą strzałkę $f : X \longrightarrow Y$ postaci $f = t_{n-1} \circ \dots \circ t_1 \circ t_0$, gdzie $t_0, \dots, t_{n-1} \in \mathcal{T}$.

Długością ścieżki f będziemy nazywać najmniejsze możliwe n w powyższym rozkładzie na tranzycje.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "t_0"] \arrow[rrrr, bend right, "f"'] & \bullet \arrow[r, "t_1"] & \bullet \arrow[r] & \cdots \bullet \arrow[r, "t_{n-1}"] & Y \end{tikzcd}$$

Obiekt X będziemy nazywać skończonym w $\mathcal{E}$, jeśli istnieje ścieżka od Θ do X. Oznaczenie:

$\mathcal{E}^{fin} :=$ kategoria wszystkich obiektów skończonych wraz ze ścieżkami.

FAKT 0 Złożenie dwóch ścieżek jest ścieżką.

Rozmiarem obiektu $X \in Ob(\mathcal{E}^{fin})$ nazywamy długość najkrótszej ścieżki od Θ do X, oznaczany $\mathrm{size}(X)$.

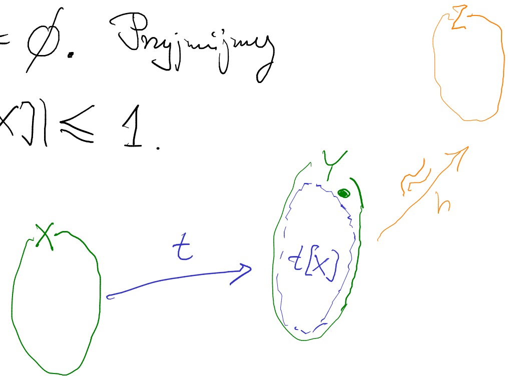
PRZYKŁAD 1 (a) Niech $\mathcal{V}$ będzie dowolną kategorią, $\Theta \in Ob(\mathcal{V})$, $\mathcal{T} := \mathcal{V}$.
Wówczas $\mathcal{E} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{T}, \Theta \rangle$ jest systemem ewolucyjnym, o ile tylko $\mathcal{V}$ jest zamknięte na kogranice ciągów.

Każdy obiekt $\mathcal{V}$ jest skończony w $\mathcal{E}$ i ma rozmiar ≤ 1.

(b) Niech $\mathcal{V}$ będzie dowolną kategorią spełniającą (E2), $\Theta \in Ob(\mathcal{V})$.
Przyjmujemy $\mathcal{T} := Iso(\mathcal{V}) := \{ h \in \mathcal{V} : h$ jest izomorfizmem$\}$.
Wówczas $\mathcal{E} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{T}, \Theta \rangle$ jest systemem ewolucyjnym.
Obiekt $X \in Ob(\mathcal{V})$ jest skończony $\iff X \approx \Theta$.

(c) Niech $\mathcal{V} = Set$ (kategoria zbiorów), $\Theta := \emptyset$. Przyjmujemy

$$t \in \mathcal{T} \iff t : X \xrightarrow{1-1} Y \text{ oraz } |Y \setminus t[X]| \leq 1.$$



Wówczas $\mathcal{E} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{T}, \Theta \rangle$ jest systemem ewolucyjnym. Istotnie, identyczności spełniają powyższy warunek, co daje (E0).
Jeśli $t : X \to Y$ należy do $\mathcal{T}$, $h : Y \to Z$ jest bijekcją, to $h \circ t : X \to Z$ jest 1–1 oraz $Z \setminus h[t[X]] =$

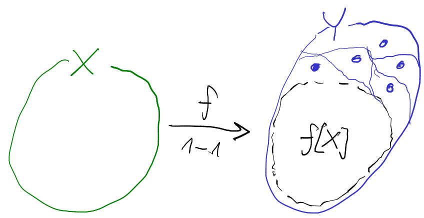
$$= h[Y] \setminus h[t[X]] = h[\underbrace{Y \setminus t[X]}_{\text{zbiór co najwyżej 1-elementowy}}], \text{ zatem } |Z \setminus (h \circ t)[X]| \leq 1,$$

czyli $h \circ t \in \mathcal{T}$.

Obiekty skończone w $\mathcal{E}$ to wszystkie zbiory skończone.
Istotnie, jeśli $t : X \to Y$ jest tranzycją, to $|Y| \leq |X| + 1$.
Tak więc, jeśli $f : \emptyset \to Y$ jest ścieżką długości n, to $|Y| \leq n$.
Z drugiej strony, jeśli $|Y| = n \in \mathbb{N}$, to mamy ścieżkę $f : \emptyset \to Y$ taką, że
$f = t_{n-1} \circ \dots \circ t_0$, $t_i : Y_i \overset{\subseteq}{\to} Y_{i+1}$, gdzie $Y_i = \{y_0, \dots, y_{i-1}\}$ oraz
$Y = \{y_0, \dots, y_{n-1}\}$. $\emptyset = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_{n-1} \subseteq Y_n = Y$.

Ponadto $size(X) = |X|$.

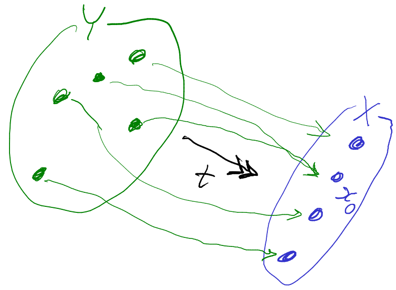
Zauważmy, że $\mathcal{E}^{fin}$ to kategoria (wszystkich) zbiorów skończonych z odwzorowaniami różnowartościowymi.



(d) Niech $\mathcal{V} = \mathcal{S}et^{op}$, $\Theta = \{0\} = 1$. Przyjmujemy

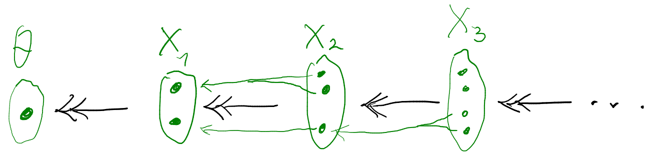
$$t \in \mathcal{T} \iff t : Y \xrightarrow[\text{„na"}]{} X \text{ oraz } \exists x_0 \in X \left(|t^{-1}(x_0)| \leq 2 \ \& \ \forall x \in X \setminus \{x_0\} \ |t^{-1}(x)| = 1 \right)$$

$\mathcal{S}et^{op}$ to kategoria odwrócona do $\mathcal{S}et$, czyli strzałka od X do Y jest odwzorowanie z Y do X.



Wówczas $\mathcal{E} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{T}, \Theta \rangle$ jest systemem ewolucyjnym.

Obiekty skończone w $\mathcal{E}$ to zbiory skończone niepuste.



$\mathcal{E}^{fin}$ jest kategorią zbiorów skończonych niepustych z wszystkimi surjekcjami.

PRZYKŁAD 2 Niech $\mathcal{V}$ będzie kategorią, której obiektami są struktury matematyczne ustalonego (niekoniecznie wszystkie). Strzałkami są homomorfizmy. Zał., że $Ob(\mathcal{V})$ jest zamknięta na podstruktury.

Ustalmy strukturę Θ, generowaną przez zbiór pusty. Jeśli mamy do czynienia ze strukturami relacyjnymi, to $\Theta = \emptyset$. Przyjmijmy

$$t \in \mathcal{T} \iff t : X \to Y \text{ jest zanurzeniem oraz } Y \text{ jest generowana przez } t[X] \cup \{y_0\} \text{ dla jakiegoś } y_0 \in Y, \text{ lub } Y = \emptyset.$$

Wówczas $\mathcal{E} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{T}, \Theta \rangle$ jest systemem ewolucyjnym, pod warunkiem, że nasza klasa struktur jest zamknięta na kogranice ciągów.

Obiekty skończone w $\mathcal{E}$ są strukturami skończenie generowanymi.

Jeśli Θ zanurza się w każdą strukturę klasy $Ob(\mathcal{V})$, to

$$Ob(\mathcal{E}^{fin}) = \{ X \in Ob(\mathcal{E}) : X \text{ jest skończenie generowana} \}.$$

Istotnie, jeśli $X = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle$ oraz $\Theta \subseteq X$, to mamy ścieżkę

$$\Theta = \langle \emptyset \rangle \subseteq \langle a_0 \rangle \subseteq \langle a_0, a_1 \rangle \subseteq \dots \subseteq \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle = X,$$

przy czym $\langle x_0, \dots, x_{k-1} \rangle$ oznacza strukturę generowaną przez $\{x_0, \dots, x_{k-1}\} \subseteq X$.

Konkretne przykłady:

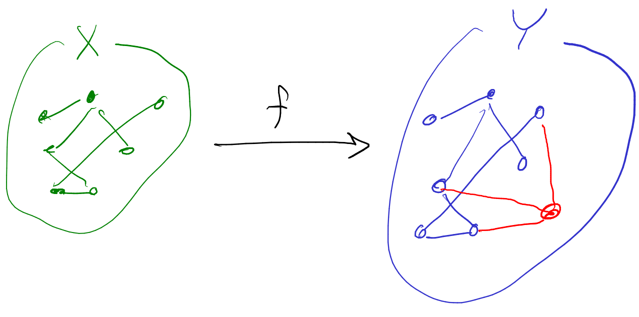
(a) $\mathcal{V}$ — kategoria grup, $\Theta = \{0\}$ (grupa trywialna), $\mathcal{E} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{T}, \Theta \rangle$.
Wówczas $\mathcal{E}^{fin}$ to kategoria grup skończenie generowanych wraz z zanurzeniami.

(b) Niech $\mathcal{V}$ będzie kategorią pierścieni (z jedynką). Niektórzy autorzy nie zakładają, że $0 \neq 1$ w pierścieniu, zatem mamy dwa (pierwsze naturalne) systemy ewolucyjne:

$$\mathcal{E}_0 = \langle \mathcal{V}, \mathcal{T}, \Theta_0 \rangle, \qquad \mathcal{E}_1 = \langle \mathcal{V}, \mathcal{T}, \Theta_1 \rangle,$$

gdzie $\Theta_0 = \{0\}$ (pierścień zdegenerowany, $0=1$), $\Theta_1 = \mathbb{Z}_2$.
Pierścień zdegenerowany Θ_0 nie homomorfizmu na żaden inny pierścień, zatem $Ob(\mathcal{E}_0^{fin}) = \{P \in Ob(\mathcal{V}) : P \simeq \{0\}\}$.
Z kolei obiekty skończone w $\mathcal{E}_1$ to pierścienie skończenie generowane nad $\mathbb{Z}_2$, na przykład: $\mathbb{F}_{2^n}$ oraz $\mathbb{Z}_2[X_1, \dots, X_k]$.
Inna możliwość wyboru Θ, to pierścień $\mathbb{Z}_n$ $(n>1)$ lub $\mathbb{Z}$.

(c) Niech $\mathcal{V}$ będzie kategorią grafów, $\Theta = \emptyset$, $\mathcal{E} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{T}, \Theta \rangle$.
Wówczas $\mathcal{E}^{fin}$ jest kategorią grafów skończonych z zanurzeniami.
Homomorfizm grafów $f: X \to Y$ jest tranzycją $\iff$ f jest izomorfizmem lub $Y = f[X] \cup \{v\}$ oraz $f: X \to f[X]$ jest izomorfizmem, $f[X]$ jest podgrafem indukowanym w Y.



PRZYKŁAD 3 Niech $\mathcal{V}$ będzie kategorią przestrzeni metrycznych zupełnych, z odwzorowaniami nierozszerzającymi.
Odwzorowanie $f: \langle X, \rho_X \rangle \longrightarrow \langle Y, \rho_Y \rangle$ nazywa się zanurzeniem (izometrycznym), jeśli

$$\forall_{x_0, x_1 \in X}, \qquad \rho_Y(f(x_0), f(x_1)) = \rho_X(x_0, x_1).$$

Ponadto, f jest izometrią, jeśli $f[X] = Y$.
Zauważmy, że izometrie to (dokładnie) izomorfizmy w $\mathcal{V}$.
Istotnie, f izometria $\Rightarrow$ f^{-1} izometria $\Longrightarrow$ $f \in Iso(\mathcal{V})$.
Z drugiej strony, jeśli $f \in Iso(\mathcal{V})$, to $f^{-1} \in Iso(\mathcal{V})$, zatem dla $x_0, x_1 \in X$ mamy

$$\rho_Y(f(x_0), f(x_1)) \leqslant \rho_X(x_0, x_1) = \rho_X(f^{-1}f(x_0), f^{-1}f(x_1)) \leqslant \rho_Y(f(x_0), f(x_1)).$$

Mamy więc równość.

Przyjmijmy $\Theta = \{0\} = 1$ (z oczywistą metryką) oraz

$t \in \mathcal{T} \iff t: X \to Y$ jest zanurzeniem oraz $Y = t[X] \cup \{v_0\}$, gdzie $v_0 \in Y$, lub $Y = \emptyset$.

Wówczas $\mathcal{E} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{T}, \Theta \rangle$ jest systemem ewolucyjnym.
$\mathcal{E}^{fin}$ to kategoria przestrzeni metrycznych skończonych z zanurzeniami.

EWOLUCJE

DEF. Niech $\mathcal{E} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{T}, \Theta \rangle$ będzie systemem ewolucyjnym.
Ewolucją w $\mathcal{E}$ będziemy nazywać ciąg postaci

$$\Theta = E_0 \xrightarrow{t_0} E_1 \xrightarrow{t_1} E_2 \xrightarrow{t_2} \cdots \longrightarrow E_n \xrightarrow{t_n} E_{n+1} \longrightarrow \cdots,$$

gdzie $t_n \in \mathcal{T}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Innymi słowy, ewolucja to funktor (kowariantny) $\vec{e}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{E}^{fin}$ taki, że $\vec{e}(0) = \Theta$ oraz $\vec{e}(n, n+1) = e_n^{n+1} \in \mathcal{T}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Zauważmy, że każdy funktor $\vec{x}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{E}^{fin}$, spełniający $\vec{x}(0) = \Theta$, indukuje ewolucję.

Możemy teraz poprawić (ulepszyć) aksjomat (E2), mianowicie:

(E2') Każda ewolucja w $\mathcal{E}$ ma kogranicę w $\mathcal{E}$.

Wynikiem ewolucji $\vec{e}$ będziemy nazywać $\varinjlim \vec{e}$.

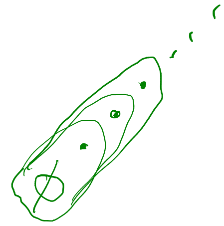
WŁASNOŚĆ POCHŁANIANIA

DEF. Niech $\vec{e}$ będzie ewolucją w systemie $\mathcal{E} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{T}, \Theta \rangle$.
Mówimy, że $\vec{e}$ ma własność pochłaniania, jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$, dla każdej tranzycji $t: E_n \longrightarrow Y$ istnieje $m \geq n$ oraz ścieżka $g: Y \longrightarrow E_m$ taka, że $g \circ f = e_n^m$.

$$\begin{tikzcd}
\vec{e}: \Theta = E_0 \arrow[r, "e_0^1"] & E_1 \arrow[r, "e_1^2"] & \cdots \arrow[r] & E_n \arrow[rr, "e_n^m"] \arrow[dr, "t"'] & & E_m \arrow[r, "e_m^{m+1}"] & \cdots \\
& & & & Y \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

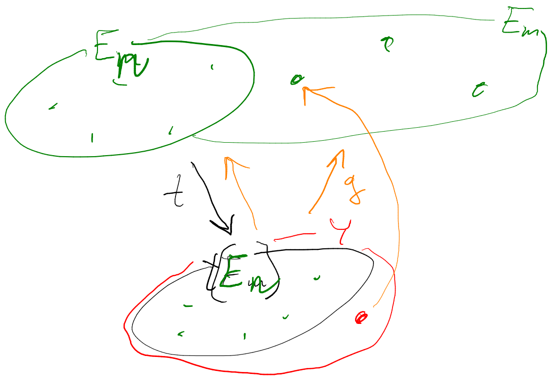
PRZYKŁAD 4 Niech $\mathcal{E} = \langle Set, \mathcal{T}, \emptyset \rangle$ będzie systemem z przykładu 1(c), to znaczy tranzycje są odwzorowaniami 1–1 „dodającymi" co najwyżej jeden element.
Typowa ewolucja w $\mathcal{E}$ to łańcuch zbiorów skończonych

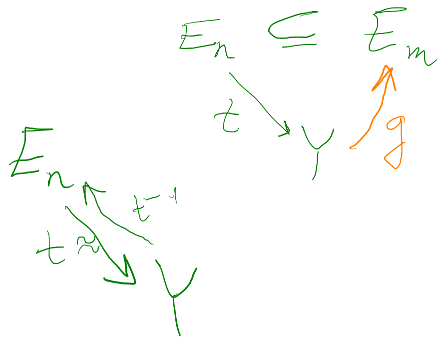
$$\emptyset = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \dots,$$



gdzie $|E_{n+1} \setminus E_n| \leq 1$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Kiedy powyższa ewolucja ma własność pochłaniania?

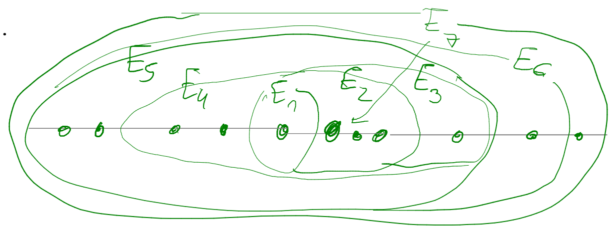




PRZYKŁAD 5 Niech $\mathcal{V}$ będzie kategorią zbiorów liniowo uporządkowanych, $\Theta = \emptyset$, tranzycje jak w Przykładzie 2. Typowa ewolucja w $\mathcal{E} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{T}, \Theta \rangle$ to łańcuch zbiorów liniowo uporządkowanych

$$\vec{e}: \Theta = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq \dots$$

Załóżmy, że $|E_{n+1} \setminus E_n| = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Kiedy $\vec{e}$ ma własność pochłaniania?



Załóżmy, że $E_n = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$, gdzie $a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1}$. Ustalmy tranzycję $t: E_n \to Y$. Zamieniając t z $h \circ t$ dla odpowiedniego izomorfizmu h, możemy założyć, że $t: E_n \subseteq Y$.
Tak więc $Y = E_n \cup \{v\}$, gdzie

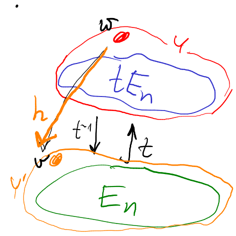
$$(\exists\, i < n-1) \quad a_i < v < a_{i+1}$$

albo

$$v < a_0$$

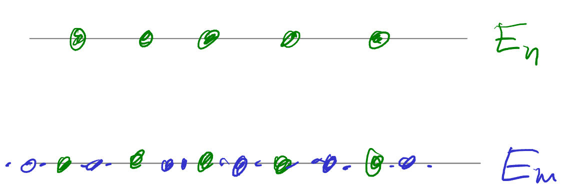
albo

$$a_{n-1} < v.$$



Istnieje ścieżka $g: Y \to E_m$ spełniająca $g \circ t = e_n^m: E_n \subseteq E_m \iff$ istnieje $\tilde{v} \in E_m$ spełniający ten sam warunek co v.

Tak więc, $\vec{e}$ ma własność absorpcji $\iff \forall n\in\mathbb{N}\ \exists m\in\mathbb{N}\ E_m = E_n \cup W$,



gdzie $E_n=\{a_0<a_1<\dots<a_{n-1}\}$,
$\forall i<n-1\ \exists w\in W\quad a_i<w<a_{i+1}$,
$\exists w_0\in W\quad w_0<a_0$,
$\exists w_1\in W\quad a_{n-1}<w_1$.

WNIOSEK: Ewolucja $\vec{e}$ w systemie $\mathcal{E}$ ma własność pochłaniania $\iff$
$\iff \varinjlim \vec{e} \approx \langle \mathbb{Q},<\rangle$.

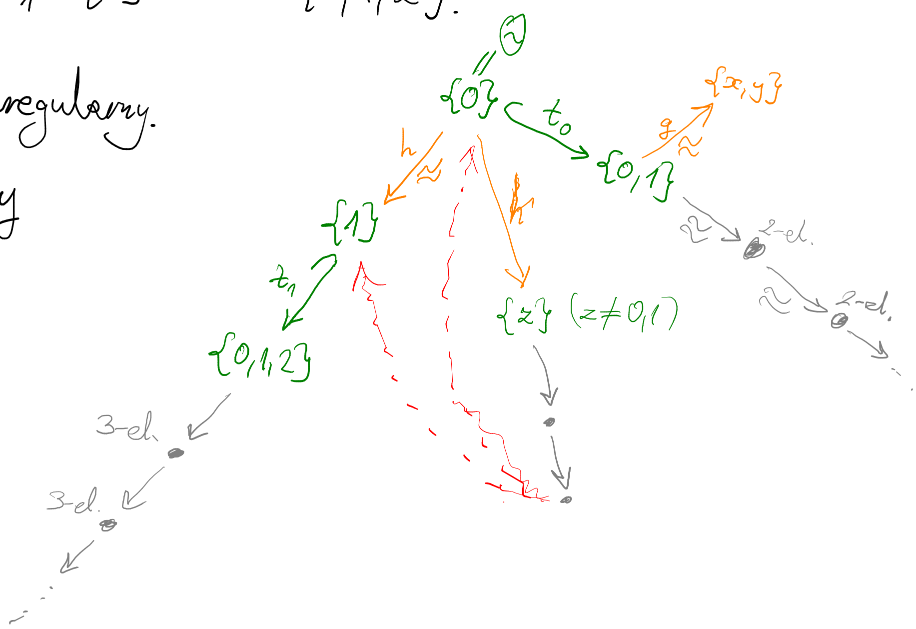
Wynik ewolucji z własnością pochłaniania jest nazywany *obiektem generycznym*.

SYSTEMY TERMINUJĄCE

DEF. System ewolucyjny $\mathcal{E}$ nazywamy *regularnym*, jeśli
$$\forall t\in\mathcal{T}\quad \forall h\in Iso(\mathcal{V})\quad \big(cod(h)=dom(t) \Rightarrow t\circ h\in\mathcal{T}\big).$$

PRZYKŁAD 6 Niech $\mathcal{E}=\langle Set, \mathcal{T}, \{0\}\rangle$, gdzie
$$\mathcal{T} = Iso(Set)\cup\{h\circ t_0 : h\in Iso(\mathcal{V})\}\cup\{h\circ t_1 : h\in Iso(\mathcal{V})\},$$
gdzie $t_0:\{0\}\xrightarrow{\subseteq}\{0,1\}$, $\quad t_1:\{1\}\xrightarrow{\subseteq}\{0,1,2\}$.

Jak widać, jest to system nieregularny.
System ten jest terminujący (patrz def. poniżej).



DEF. Tranzycję $t\in\mathcal{T}$ nazywamy *trywialną*, jeśli jest izomorfizmem, w przeciwnym razie nazywamy ją *nietrywialną*. Przyjmujemy oznaczenie:
$$\mathcal{T}^+ = \mathcal{T}\setminus Iso(\mathcal{V}),$$
$$\mathcal{T}^+(X) = \mathcal{T}(X)\cap \mathcal{T}^+.$$

DEF. System ewolucyjny nazywamy **terminującym**, jeśli dla każdej ewolucji

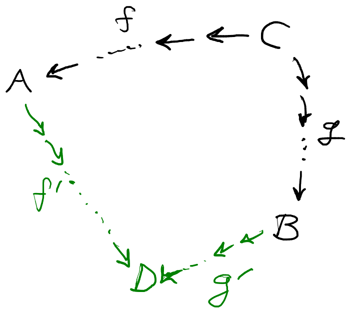
$$\mathcal{O} = E_0 \xrightarrow{t_0} E_1 \xrightarrow{t_1} E_2 \to \dots \to E_n \to \dots$$

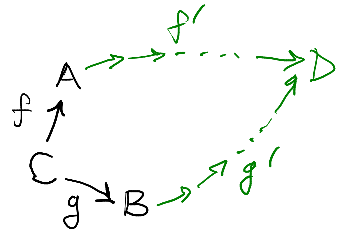
istnieje n_0 taki, że $t_n \in Iso(\mathcal{V})$ dla $n \geq n_0$.

Obiekt $Z \in Ob(\mathcal{E}^{fin})$ nazywamy **znormalizowanym**, jeśli każda ścieżka od Z (do jakiegokolwiek innego obiektu) składa się z izomorfizmów.

DEF. System ewolucyjny $\mathcal{E}$ nazywamy **konfluentnym**, jeśli $\mathcal{E}^{fin}$ ma własność amalgamacji, tzn. dla każdych ścieżek $f: C \to A$, $g: C \to B$, $C \in Ob(\mathcal{E}^{fin})$, istnieje D oraz ścieżki $f': A \to D$, $g': B \to D$ takie, że $f' \circ f = g' \circ g$.

System $\mathcal{E}$ nazywamy **lokalnie konfluentnym**, jeśli dla każdych tranzycji $f: C \to A$, $g: C \to B$, $C \in Ob(\mathcal{E}^{fin})$, istnieje D oraz ścieżki $f': A \to D$, $g': B \to D$ spełniające $f' \circ f = g' \circ g$.





UWAGA. Przykład 6 pokazuje, że lokalna konfluencja $\not\Rightarrow$ konfluencja.

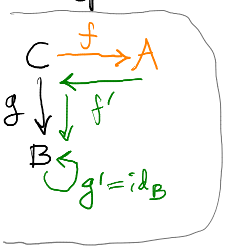
FAKT 1 Załóżmy, że $\mathcal{E}$ jest systemem ewolucyjnym **zdeterminowanym**, tzn.

$$\forall X \in Ob(\mathcal{T}) \ \forall t_0, t_1 \in \mathcal{T}^+(X) \ \exists h \in Iso(\mathcal{V}) \ t_1 = h \circ t_0 .$$

Wówczas $\mathcal{E}$ jest lokalnie konfluentny.

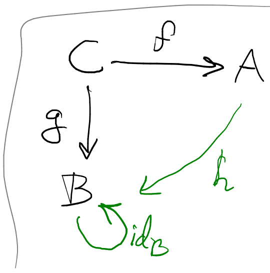
DOWÓD. Ustalmy tranzycje $f: C \to A$, $g: C \to B$, $C \in Ob(\mathcal{E}^{fin})$.

Przypadek 1: $f \in Iso(\mathcal{V})$. Wówczas przyjmijmy $f' := g \circ f^{-1}$, $g' = id_B$.



Wówczas $f' \circ f = g \circ f^{-1} \circ f = g = id_B \circ g = g' \circ g$.

Przypadek 2: $f, g \in \mathcal{T}^+(C)$. Przyjmijmy $f' = h \in Iso(\mathcal{V})$, gdzie $h \circ f = g$, $g' = id_B$. Wówczas $f' \circ f = g = g' \circ g$. ∎



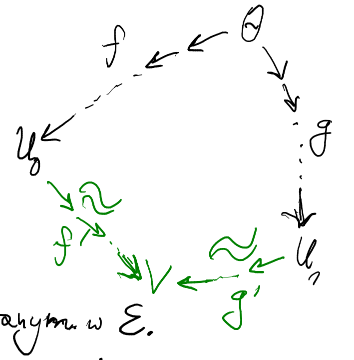
Fakt 2 Niech $\mathcal{E}$ będzie systemem ewolucyjnym terminującym i konfluentnym. Wówczas istnieje dokładnie jeden, z dokładnością do izomorfizmu, obiekt znormalizowany w $\mathcal{E}$.

Dowód. Istnienie: Przypuśćmy, że obiekt znormalizowany nie istnieje. Wówczas dla każdego $X \in Ob(\mathcal{E}^{fin})$. Wówczas istnieje izomorfizm $X \xrightarrow{h_X} \tilde{X}$ taki, że $\mathcal{T}^+(\tilde{X}) \neq \emptyset$. Stąd dostajemy ewolucję

$$\Theta = E_0 \xrightarrow[\approx]{h_{E_0}} \tilde{E}_0 \xhookrightarrow{t_0} E_1 \xrightarrow[\approx]{h_{E_1}} \tilde{E}_1 \xhookrightarrow{t_1} E_2 \xrightarrow[\approx]{} \tilde{E}_2 \hookrightarrow \dots,$$

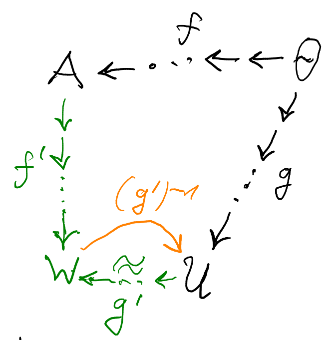
gdzie $t_0, t_1, \dots$ są nietrywialne, sprzeczność.

Jedyność: Załóżmy, że $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ są znormalizowane. Istnieją ścieżki $f: \Theta \to \mathcal{U}_0$, $g: \Theta \to \mathcal{U}_1$. Konfluencja daje nam ścieżki $f': \mathcal{U}_0 \to V$, $g': \mathcal{U}_1 \to V$ takie, że $f' \circ f = g' \circ g$. Wówczas $f', g' \in Iso(\mathcal{V})$ oraz $(g')^{-1} \circ f' : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_1$ jest izomorfizmem. ■



Fakt 3 Niech $\mathcal{E}$ będzie systemem ewolucyjnym (terminującym) konfluentnym, niech $\mathcal{U}$ będzie obiektem znormalizowanym w $\mathcal{E}$. Wówczas dla każdego $A \in Ob(\mathcal{E}^{fin})$ istnieje ścieżka od A do $\mathcal{U}$.

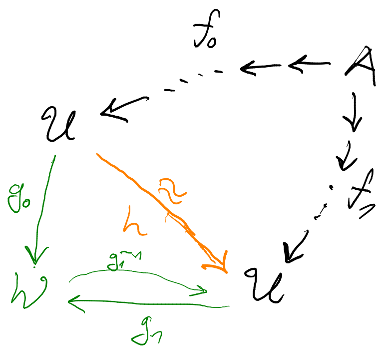
Dowód. Niech $f: \Theta \to A$, $g: \Theta \to \mathcal{U}$ będą ścieżkami. Z własności konfluencji dostajemy ścieżki $f': A \to W$, $g': \mathcal{U} \to W$ spełniające $f' \circ f = g' \circ g$. Wówczas $(g')^{-1} \circ f'$ jest ścieżką od A do $\mathcal{U}$. ■



Fakt 4 Niech $\mathcal{E}$ będzie systemem ewolucyjnym (terminującym) konfluentnym, niech $\mathcal{U}$ będzie obiektem znormalizowanym. Wówczas dla każdych ścieżek $f_0: A \to \mathcal{U}$, $f_1: A \to \mathcal{U}$, $A \in Ob(\mathcal{E}^{fin})$, istnieje $h \in Aut(\mathcal{U})$ taki, że

$$f_1 = h \circ f_0.$$

Dowód. Konfluencja daje ścieżki $g_0: \mathcal{U} \to W$, $g_1: \mathcal{U} \to W$ takie, że $g_0 \circ f_0 = g_1 \circ f_1$. Wówczas $g_0, g_1 \in Iso(\mathcal{V})$, bo $\mathcal{U}$ jest znormalizowany, zatem $f_1 = (g_1^{-1} \circ g_0) \circ f_0$ oraz $g_1^{-1} \circ g_0 \in Aut(\mathcal{U})$. ■



Twierdzenie 1 Niech $\mathcal{E}$ będzie systemem ewolucyjnym terminującym, konfluentnym. Wówczas istnieje jedyny (z dokładnością do izomorfizmu) obiekt $\mathcal{U} \in Ob(\mathcal{E}^{fin})$ spełniający

Uniwersalność (U) $\forall A \in Ob(\mathcal{E}^{fin})$ $\exists$ ścieżka od A do $\mathcal{U}$.

Jednorodność (J) $\forall A, B \in Ob(\mathcal{E}^{fin})$ $\forall i \in \mathcal{E}^{fin}(A, \mathcal{U})$ $\forall j \in \mathcal{E}^{fin}(B, \mathcal{U})$ $\forall k \in Iso(A, B)$
$\exists h \in Aut(\mathcal{U})$ $h \circ i = j \circ k$.

Ponadto, $\mathcal{U}$ jest znormalizowany w $\mathcal{E}$.

Dowód. 1. Niech $\mathcal{U}$ będzie obiektem znormalizowanym. Wówczas $\mathcal{U}$ spełnia (U) na mocy Faktu 3.

Sprawdźmy, że $\mathcal{U}$ spełnia (J).

Zastosujmy Fakt 4 dla ścieżek i, $j \circ k$.

Dostajemy $h \in Aut(\mathcal{U})$, $h \circ i = j \circ k$.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dashed, "i"'] \arrow[dr, "k", "\cong"'] & \\ \mathcal{U} \arrow[dr, "h", "\cong"'] & & B \arrow[dl, dashed, "j"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

2. Załóżmy teraz, że W spełnia (U).
Wówczas istnieje ścieżka $f : \mathcal{U} \longrightarrow W$.
Skoro $\mathcal{U}$ jest znormalizowany, f jest izomorfizmem, czyli $W \simeq \mathcal{U}$. ■

DEF. Obiekt $V \in Ob(\mathcal{E}^{fin})$ nazywamy jednorodnym (w systemie $\mathcal{E}$), jeśli dla każdego $A \in Ob(\mathcal{E}^{fin})$, dla każdych ścieżek $f_i : A \to V$, $i = 0, 1$, istnieje $h \in Aut(V)$ taki, że $f_1 = h \circ f_0$.

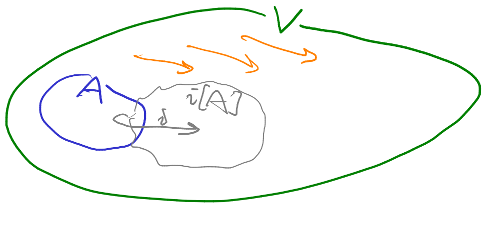
$$\begin{tikzcd} & V \\ A \arrow[ur, dashed, "f_1"] \arrow[dr, dashed, "f_0"'] & \\ & V \arrow[uu, "h"', "\cong"] \end{tikzcd}$$

Przykład 7 Załóżmy, że $\mathcal{E} = \langle \mathcal{V}, \tau, \Theta \rangle$, gdzie obiektami są struktury relacyjne, $\Theta = \emptyset$, klasa $Ob(\mathcal{E})$ jest zamknięta na podstruktury, nietrywialne tranzycje to zanurzenia dodające jeden element. Załóżmy, że $V \in Ob(\mathcal{E}^{fin})$ jest jednorodny.

Wówczas dla każdej podstruktury $A \subseteq V$, każde zanurzenie $i : A \hookrightarrow V$ przedłuża się do automorfizmu struktury V.

Istotnie, mamy dwie ścieżki

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "i"'] & \subseteq & V \arrow[d, "h", "\cong"'] \\ i[A] & \subseteq & V \end{tikzcd}$$



PRZYKŁAD 8 (a) Niech $\mathcal{E} = \langle Set, \mathcal{T}, \emptyset \rangle$, gdzie $\mathcal{T}^+$ to zanurzenia „dodające" jeden element. Wówczas każdy zbiór skończony jest jednorodny.

Ustalmy $N \in \mathbb{N}$, $N > 0$. Niech $\mathcal{E}_N$ będzie modyfikacją powyższego systemu zdefiniowaną następująco:

$$\mathcal{T}_N^+(X) := \begin{cases} \mathcal{T}^+(X), & \text{jeśli } |X| < N, \\ Iso(X), & \text{jeśli } |X| \geq N. \end{cases}$$

Wówczas $\mathcal{E}_N = \langle Set, \mathcal{T}_N, \emptyset \rangle$ jest systemem terminującym.

Zbiór N-elementowy jest znormalizowany w $\mathcal{E}_N$.

System $\mathcal{E}_N$ jest konfluentny.

Istotnie, załóżmy, że $f: C \to A$, $g: C \to B$ są ściśleniami, $|A| \leq N$, $|B| \leq N$.

Niech $A = f[C] \cup \{a_0, \dots, a_{k-1}\}$,

$B = g[C] \cup \{b_0, \dots, b_{l-1}\}$.

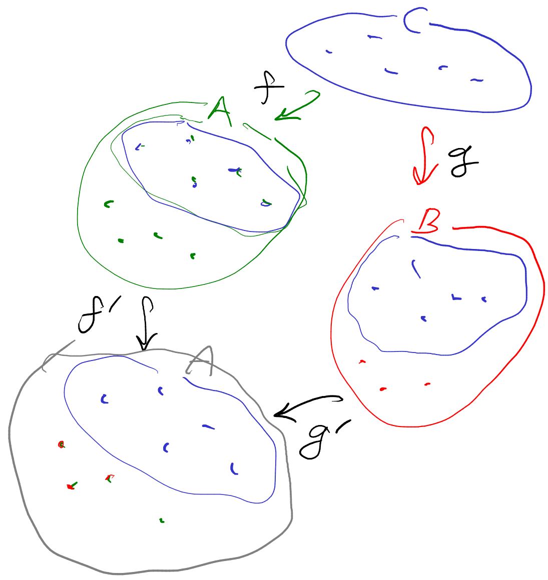
Zał., że $k \geq l$.

Przyjmijmy $f' := id_A$,

$g' = (f \circ g^{-1}) \cup p$,

gdzie $p(b_i) = a_i$, $i < k$.

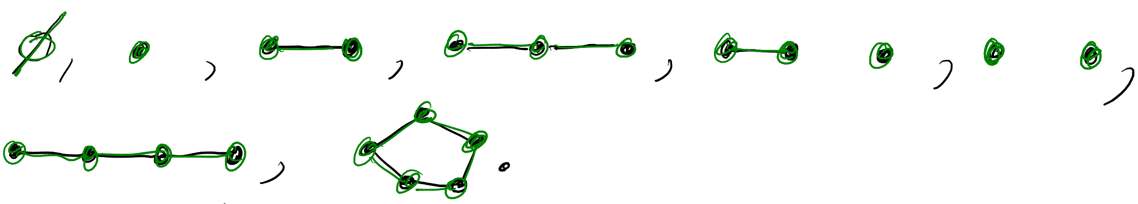
To dowodzi konfluencji w $\mathcal{E}_N$.

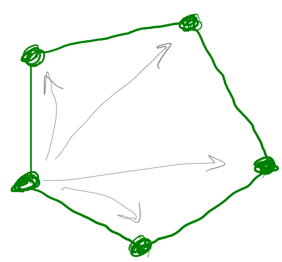


Wniosek: Zbiór N-elementowy jest jednorodny.

ZADANIE 1 Pokaż, że cykl 5-elementowy C_5 jest jednorodny.

WSKAZÓWKA: Rozważmy system ewolucyjny, którego obiektami są podgrafy indukowane cyklu C_5:





Wystarczy pokazać (lokalną) konfluentność.

ZADANIE 2 Sprawdź, że cykl C_N nie jest jednorodny dla $N > 5$.