Struktury generyczne

Nieformalnie struktura „generyczna" to taka, która jest najbardziej typowa wśród danej klasy struktur.

Nieformalnie, struktura matematyczna, to zbiór wraz z jakimiś działaniami, relacjami lub z wyróżnionymi rodzinami podzbiorów.

Przykłady:

1. Zbiór.
2. Grupa.
3. Graf.
4. Przestrzeń topologiczna.
5. Przestrzeń z miarą.
6. Przestrzeń wektorowa.

Konkretny zbiór może mieć kilka naturalnych struktur. Przykładowo, zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest liniowo uporządkowany; jest ciałem; jest też przestrzenią topologiczną oraz przestrzenią z miarą Lebesgue'a.

Grafy

DEF. Grafem skierowanym nazywamy strukturę postaci

$$\mathbb{G} = \langle V, A, \mathrm{dom}, \mathrm{cod} \rangle,$$

gdzie V, A są zbiorami oraz $\mathrm{dom}: A \longrightarrow V$, $\mathrm{cod}: A \longrightarrow V$ są odwzorowaniami.

Elementy zbioru V nazywamy wierzchołkami.

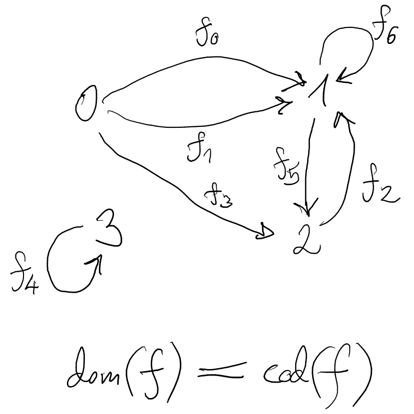
Elementy zbioru A nazywamy strzałkami lub krawędziami skierowanymi.

Dla strzałki $f \in A$ wierzchołek $\mathrm{dom}(f)$ nazywamy jej dziedziną lub początkiem, zaś wierzchołek $\mathrm{cod}(f)$ nazywamy jej przeciwdziedziną lub końcem.

PRZYKŁADY 1 (1) Graf skończony o małej liczbie wierzchołków można zazwyczaj narysować: strzałkę f o dziedzinie a, przeciwdziedzinie b rysujemy w zwykły sposób, tzn.

$$a \xrightarrow{f} b$$

Konkretny przykład:



Strzałka f taka, że $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{cod}(f)$ nazywa się pętlą.

(2) Niech V będzie ustaloną rodziną zbiorów, niech A będzie zbiorem wszystkich odwzorowań pomiędzy zbiorami rodziny V. Ponadto, niech $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}$ będą odpowiednio dziedziną i przeciwdziedziną odwzorowania.

DEF. Grafem skierowanym prostym nazywamy nazywamy strukturę postaci

$$G = \langle V, E\rangle, \qquad \text{gdzie } E \subseteq V\times V.$$

Elementy zbioru V nazywamy wierzchołkami.
Elementy zbioru E nazywamy krawędziami skierowanymi.

Dla $\langle a,b\rangle \in E$ możemy zdefiniować $\mathrm{dom}\langle a,b\rangle := a$, $\mathrm{cod}\langle a,b\rangle := b$.
W ten sposób graf skierowany prosty staje się grafem skierowanym w sensie poprzedniej definicji.

Tak więc graf skierowany prosty różni się od ogólnego grafu skierowanego tym, że nie ma strzałek wielokrotnych, tzn. od wierzchołka a do wierzchołka b istnieje co najwyżej jedna strzałka.

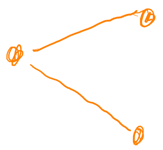
PRZYKŁAD 2 Każdy zbiór częściowo uporządkowany jest grafem skierowanym prostym.

DEF. Grafem prostym nazywamy strukturę postaci

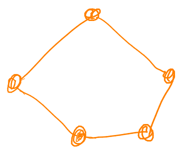
$$G = \langle V, E\rangle,$$

gdzie E jest rodziną podzbiorów 2-elementowych zbioru V.
Elementy zbioru V nazywamy wierzchołkami.
Elementy zbioru E nazywamy krawędziami.

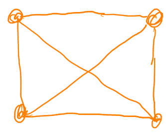
PRZYKŁADY 3



(ścieżka długości 3)



(cykl 5-elementowy) C_5



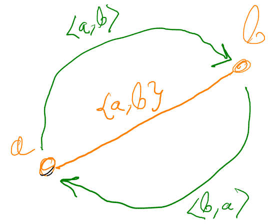
(graf pełny K_4)

(graf dyskretny)

Zauważmy, że graf prosty nie posiada pętli.

Ustalmy graf prosty $G = \langle V, E\rangle$ i zdefiniujmy

$$\tilde{E} := \{\langle a,b\rangle : \{a,b\}\in E\}.$$



Wówczas $\tilde{G} := \langle V, \tilde{E}\rangle$ jest grafem skierowanym prostym.
Ponadto, relacja $\tilde{E}$ jest symetryczna i antyzwrotna (tzn. $\langle a,a\rangle \notin \tilde{E}$ dla $a\in V$).

Z drugiej strony, mając dany graf skierowany prosty $H = \langle W, F\rangle$ taki, że F jest symetryczna i antyzwrotna, definiując $E := \{\{a,b\} : \langle a,b\rangle \in F\}$ dostajemy graf prosty $G = \langle W, E\rangle$ taki, że $F = \tilde{E}$.

Monoidy

DEF. Monoidem nazywamy strukturę postaci
$$\mathbb{M} = \langle M, \bullet, e \rangle,$$
gdzie M jest zbiorem, $\bullet$ jest działaniem 2-argumentowym na M, $e \in M$, oraz spełnione są warunki:

$$\text{(M0)} \quad (\forall x,y,z \in M) \quad x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z, \qquad \text{(łączność)}$$

$$\text{(M1)} \quad (\forall x \in M) \quad x \bullet e = x = e \bullet x. \qquad (e \text{ jest elementem neutralnym})$$

Monoid $\mathbb{M}$ jest przemienny, jeśli działanie $\bullet$ jest przemienne, tzn. $(\forall x,y)\ x \bullet y = y \bullet x$.

PRZYKŁADY (1) Każda grupa jest monoidem, pod warunkiem, że wyróżnimy element neutralny.

$\langle G, \cdot \rangle$ grupa z jedynką
$\Downarrow$
$\langle G, \cdot, 1 \rangle$ monoid

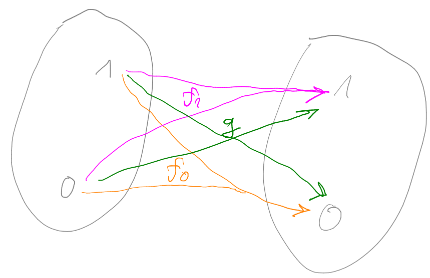
(2) Ustalmy zbiór X i niech ${}^X X$ oznacza zbiór wszystkich funkcji z X do X. Wówczas
$$\mathrm{M}(X) := \langle {}^X X, \circ, \mathrm{id}_X \rangle$$
jest monoidem, gdzie $\circ$ oznacza składanie funkcji, a id_X to funkcja tożsamościowa, tzn. $\mathrm{id}_X(x) = x$ dla $x \in X$. (Wiemy, że $\circ$ jest łączne oraz id_X jest neutralna.)

Zauważmy, że $\quad \mathrm{M}(\emptyset) = \langle \{\emptyset\}, \circ, \emptyset \rangle, \quad \mathrm{M}(\{0\}) = \langle \{\mathrm{id}_{\{0\}}\}, \circ, \mathrm{id}_{\{0\}} \rangle,$

zatem $\mathrm{M}(\emptyset) \cong \mathrm{M}(\{0\})$ są monoidami trywialnymi. Z kolei

$(2 = \{0,1\})$

$$\mathrm{M}(\{0,1\}) = \langle \{\mathrm{id}_2, f_0, f_1, g\}, \circ, \mathrm{id}_2 \rangle, \text{ gdzie}$$



$\mathrm{id}_2 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$,
$f_0 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle\}$, $\qquad f_1 = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}$,
$g = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}$.

Pytanie: Czy $\mathrm{M}(\{0,1\})$ jest przemienny?

(3) Niech X będzie zbiorem niepustym. Wówczas $\langle \mathcal{P}(X), \cap, X \rangle$ jest monoidem przemiennym. Istotnie $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ oraz $A \cap X = A = X \cap A$ dla $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$.

UWAGI O TERMINOLOGII (1) Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}=\omega$. Liczby naturalne traktujemy jako zbiory wszystkich poprzedników, tzn.

$$0=\emptyset,\quad 1=\{\emptyset\},\quad 2=\{0,1\}=\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \dots,\quad n=\{0,1,\dots,n-1\},\dots$$

(2) Pary (ciągi) uporządkowane oznaczamy przy pomocy nawiasów ukośnych $\langle \dots, \dots \rangle$.

$\langle$ \langle

$\rangle$ \rangle

(3) Przypomnijmy, że funkcja to relacja 2-argumentowa f spełniająca warunek

$$(\forall x,y_1,y_2)\quad \langle x,y_1\rangle\in f \ \text{ i } \ \langle x,y_2\rangle\in f \implies y_1=y_2.$$

Definiujemy $\mathrm{dom}(f):=\{x:(\exists y)\ \langle x,y\rangle\in f\}$ $\leftarrow$ dziedzina f.

Jeśli f jest funkcją to piszemy $y=f(x)$ zamiast $\langle x,y\rangle\in f$ czy też xfy.

Definiujemy też zbiór wartości

$$\mathrm{rng}(f):=\{y:(\exists x)\ \langle x,y\rangle\in f\}.$$

(4) Mając dane zbiory X,Y, przyjmujemy oznaczenie

$${}^XY:=\{f\subseteq X\times Y:\ f \text{ jest funkcją},\ \mathrm{dom}(f)=X\}.$$

Zauważmy, że jeśli $k,n\in\mathbb{N}$, to $k^n=\underbrace{k\cdot\ldots\cdot k}_{n\text{ razy}}$, a ${}^nk$ to zbiór wszystkich funkcji z n do k.

(5) Jeśli f jest funkcją, $X=\mathrm{dom}(f)$ oraz $Y\supseteq\mathrm{rng}(f)$, to piszemy

$$f:X\longrightarrow Y \qquad \text{lub} \qquad X\xrightarrow{\ f\ }Y.$$

Odwzorowaniem nazywamy trójkę postaci $\mathfrak{f}=\langle X,f,Y\rangle$, gdzie f jest funkcją, $X=\mathrm{dom}(f)$ oraz $\mathrm{rng}(f)\subseteq Y$. Piszemy wtedy $\mathfrak{f}:X\to Y$ lub $X\xrightarrow{\mathfrak{f}}Y$.
Zbiór X nazywamy dziedziną odwzorowania $\mathfrak{f}$ i piszemy $X=\mathrm{dom}(\mathfrak{f})$.
Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną odwzorowania $\mathfrak{f}$ i piszemy $Y=\mathrm{cod}(\mathfrak{f})$.

Przykładowo, $\langle\mathbb{R},\sin,\mathbb{R}\rangle$ oraz $\langle\mathbb{R},\sin,[-1,1]\rangle$ są różnymi odwzorowaniami.

(6) Funkcja f jest injekcją lub 1–1 lub różnowartościowa, jeśli

$$(\forall x_0,x_1\in\mathrm{dom}(f))\quad f(x_0)=f(x_1)\implies x_0=x_1.$$

Wówczas każde odwzorowanie postaci $\langle\mathrm{dom}(f),f,Y\rangle$ też nazywamy injekcją / 1–1 / różnowartościowe.

(7) Odwzorowanie $\langle X,f,Y\rangle$ nazywamy surjekcją / „na", jeśli $Y=\mathrm{rng}(f)$.

(8) Odwzorowanie $\langle X,f,Y\rangle$ nazywamy bijekcją, jeśli jest jednocześnie 1–1 oraz „na".

(9) Mając dane relacje 2-argumentowe R, S, definiujemy ich złożenie

$$R \circ S := \{\langle x, z\rangle : (\exists y)\ \langle x, y\rangle \in S \text{ i } \langle y, z\rangle \in R\}.$$

Może się zdarzyć, że $R \circ S = \emptyset$ nawet jeśli $R \neq \emptyset \neq S$.

Jeśli R, S są funkcjami takimi, że $\mathrm{rng}(S) \subseteq \mathrm{dom}(R)$, to $R \circ S$ jest funkcją spełniającą

$$(R \circ S)(x) = R(S(x)) \quad \text{dla } x \in \mathrm{dom}(S).$$

Fakt: Składanie relacji / funkcji jest łączne.

(10) Dla odwzorowań $\mathfrak{f} = \langle X, f, Y\rangle$, $\mathfrak{g} = \langle Z, g, W\rangle$ definiujemy ich złożenie $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f} := \langle X, g \circ f, W\rangle$, ale tylko i wyłącznie w przypadku $Y = Z$.

(11) Dla zbioru X, odwzorowanie $\mathrm{id}_X = \langle X, \mathrm{id}_X, X\rangle$ nazywamy identycznością zbioru X, przy czym $\mathrm{id}_X = \{\langle x, x\rangle : x \in X\}$.

Kategorie

Kategoria to struktura matematyczna złożona z klasy obiektów oraz z klasy strzałek/morfizmów pomiędzy nimi. Ponadto, strzałki można składać (pod warunkiem, że początek jednej jest końcem drugiej), przy czym składanie jest łączne. Ponadto, każdy obiekt ma wyróżnioną pętlę, zwaną identycznością, która jest neutralna dla składania strzałek.

Poniżej formalna definicja.

DEF. Kategorią nazywamy strukturę postaci $\langle \mathcal{O}, \mathcal{K}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ, \{\mathrm{id}_x\}_{x \in \mathcal{O}}\rangle$ spełniającą następujące aksjomaty.

(K0) $\langle \mathcal{O}, \mathcal{K}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}\rangle$ jest grafem skierowanym.

(K1) $\circ$ jest częściową operacją 2-argumentową na $\mathcal{K}$. Dokładniej, $f \circ g \in \mathcal{K}$ jest zdefiniowane $\iff$ $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{cod}(g)$; wówczas $\mathrm{dom}(f \circ g) = \mathrm{dom}(g)$, $\mathrm{cod}(f \circ g) = \mathrm{cod}(f)$.

(K2) Działanie $\circ$, zwane składaniem, jest łączne, tzn.

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),$$

o ile tylko $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{cod}(g)$ oraz $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(h)$.

(K3) Dla każdego $x \in \mathcal{O}$, $\mathrm{id}_x \in \mathcal{K}$ oraz $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_x) = x = \mathrm{cod}(\mathrm{id}_x)$. Ponadto

$$f \circ \mathrm{id}_x = f \quad \text{oraz} \quad \mathrm{id}_x \circ g = g$$

dla każdych $f, g \in \mathcal{K}$ takich, że $\mathrm{dom}(f) = x = \mathrm{cod}(g)$.

Elementy klasy $\mathcal{O}$ będziemy nazywać obiektami, zaś elementy $\mathcal{K}$ strzałkami lub morfizmami. Strzałki id_x nazywamy identycznościami.

Przyjmujemy oznaczenie

$$\mathcal{K}(x,y) := \{ f\in \mathcal{K} : x = dom(f) \ \text{ i } \ y = cod(f) \}.$$

Przyjmujemy też oznaczenie $\quad Ob(\mathcal{K}) := \mathcal{O}.$

W dalszym ciągu, kategorię będziemy utożsamiać z jej klasą strzałek $\mathcal{K}$.

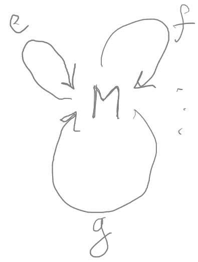
FAKT 1 Identyczności są wyznaczone jednoznacznie. Dokładniej, jeśli $i, j \in \mathcal{K}(x,x)$ są takie, że $\quad f\circ j = f \quad$ oraz $\quad i\circ g = g \quad$ dla każdych $f, g\in \mathcal{K}$ takich, że $dom(f) = x = cod(g)$, $\quad$ to $\quad i = id_x = j$.

Dowód. Mamy $\quad i = i\circ j = j. \quad \blacksquare$

Teoria kategorii została stworzona przez Eilenberga i Mac Lane'a (1945).
Motywującym przykładem była kategoria zbiorów:

PRZYKŁAD 5 Kategoria zbiorów Set, to kategoria której obiektami są wszystkie zbiory, a strzałkami są (wszystkie możliwe) odwzorowania.

PRZYKŁAD 6 Każdy monoid jest kategorią. Istotnie, mając dany monoid $M = \langle M, \bullet, e\rangle$, możemy zdefiniować $\quad \mathcal{K}_M := M, \quad Ob(\mathcal{K}_M) := \{M\}, \quad dom(f) = M = cod(f)$ dla $f\in M$, składanie to działanie $\bullet$, $\quad id_M = e$.



Z drugiej strony, jeśli $\mathcal{K}$ jest kategorią z jednym obiektem M, to $\langle \mathcal{K}, \circ, id_M\rangle$ jest oczywiście monoidem.

Ogólniej, jeśli $\mathcal{K}$ jest kategorią, $X\in Ob(\mathcal{K})$, to $\quad \langle \mathcal{K}(X,X), \circ, id_X\rangle \quad$ jest monoidem.

Podsumowując: monoidy odpowiadają (wzajemnie jednoznacznie) kategoriom z jednym obiektem.

PRZYKŁAD 7 Zbiory quasi-uporządkowane jako kategorie. Quasi-porządkiem na X nazywamy relację 2-argumentową $\preccurlyeq$ która jest zwrotna i przechodnia.

$x\preccurlyeq x$ (zwrotność)

$x\preccurlyeq y$ i $y\preccurlyeq z$ $\Downarrow$ $x\preccurlyeq z$ (przechodniość)

Zdefiniujmy kategorię $\mathcal{X}$ przyjmując

$$Ob(\mathcal{X}) := X,$$

$$\mathcal{X}(x,y) = \begin{cases} \{\langle x,y\rangle\}, & \text{jeśli } x \preccurlyeq y, \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Innymi słowy, klasą strzałek jest relacja $\preccurlyeq$. Dla $x \preccurlyeq y$ mamy $\mathrm{dom}\langle x,y\rangle = x$, $\mathrm{cod}\langle x,y\rangle = y$. Dalej, przyjmujemy

$$\langle y,z\rangle \circ \langle x,y\rangle := \langle x,z\rangle.$$

Jest to poprawne na mocy przechodniości $\preccurlyeq$.

$$\left[(y \preccurlyeq z) \text{ i } (x \preccurlyeq y) \Rightarrow (x \preccurlyeq z) \right]$$

Zauważmy, że $\langle x,y\rangle \circ \langle x,x\rangle = \langle x,y\rangle$, $\langle x,x\rangle \circ \langle z,x\rangle = \langle z,x\rangle$ dla $z \preccurlyeq x \preccurlyeq y$, zatem $\langle x,x\rangle = id_x$. Zwrotność $\preccurlyeq$ daje $\langle x,x\rangle \in \mathcal{X}(x,x)$.

DEF. Kategorię $\mathbb{K}$ nazywamy quasi-uporządkowaną, jeśli

$$\forall x,y \in Ob(\mathbb{K}) \quad |\mathbb{K}(x,y)| \leq 1.$$

$|S|$ oznacza moc zbioru S.

FAKT 2 Kategorie quasi-uporządkowane odpowiadają (wzajemnie jednoznacznie) zbiorom quasi-uporządkowanym.

[Przyjmujemy $\quad x \preccurlyeq y \overset{df}{\iff} \mathbb{K}(x,y) \neq \emptyset$.]