WPROWADZENIE DO TEORII KATEGORII

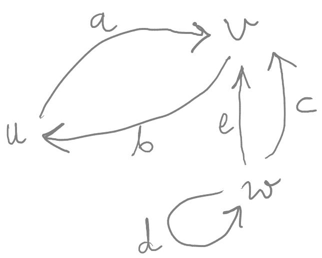
DEF. Grafem skierowanym nazywamy strukturę postaci

$$G = \langle V, A, \mathrm{dom}, \mathrm{cod} \rangle,$$

gdzie V jest zbiorem wierzchołków, A jest zbiorem strzałek, $\mathrm{dom} : A \longrightarrow V$, $\mathrm{cod} : A \longrightarrow V$ są odwzorowaniami.
Dla $a \in A$, wierzchołek $\mathrm{dom}(a)$ nazywamy dziedziną (ang. domain) strzałki a, a wierzchołek $\mathrm{cod}(a)$ nazywamy przeciwdziedziną (ang. codomain) strzałki a.

Mając dane wierzchołki u, v oraz strzałkę a taką, że $u = \mathrm{dom}(a)$, $v = \mathrm{cod}(a)$, będziemy pisać $a : u \longrightarrow v$ lub $u \xrightarrow{a} v$.

PRZYKŁAD 1



$V = \{u, v, w\}$
$A = \{a, b, c, d, e\}$

	a	b	c	d	e
dom	u	v	w	w	w
cod	v	u	v	w	v

Strzałkę x taką, że $\mathrm{dom}(x) = \mathrm{cod}(x)$ nazywa się pętlą.

PRZYKŁAD 2 Grafem skierowanym prostym nazywamy strukturę matematyczną postaci $G = \langle V, S \rangle$, gdzie V jest zbiorem wierzchołków, a $S \subseteq V \times V$ jest zbiorem krawędzi skierowanych.
Dla $\langle x, y \rangle \in S$ przyjmujemy $\mathrm{dom}\langle x, y \rangle := x$ oraz $\mathrm{cod}\langle x, y \rangle := y$.
Zauważmy, że jeśli $\mathrm{dom}(a) = x$, $\mathrm{cod}(a) = y$, to $a = \langle x, y \rangle$.
Tak więc graf skierowany prosty jest grafem skierowanym w sensie naszej definicji.
Każdy zbiór częściowo uporządkowany $\langle X, \leq \rangle$ jest grafem skierowanym.

DEF. Monoidem nazywamy strukturę postaci $\langle M, \bullet, e\rangle$, gdzie $\bullet$ jest działaniem 2-argumentowym łącznym na M oraz e jest jego elementem neutralnym.

Innymi słowy:

(M0) $(\forall x,y,z\in M)$ $\quad x\bullet(y\bullet z) = (x\bullet y)\bullet z$,

(M1) $(\forall x\in M)$ $\quad x\bullet e = x = e\bullet x$.

PRZYKŁAD 3 Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ wraz z dodawaniem tworzy monoid, bo zakładamy, że $0\in\mathbb{N}$. Z kolei $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1\rangle$ jest monoidem.

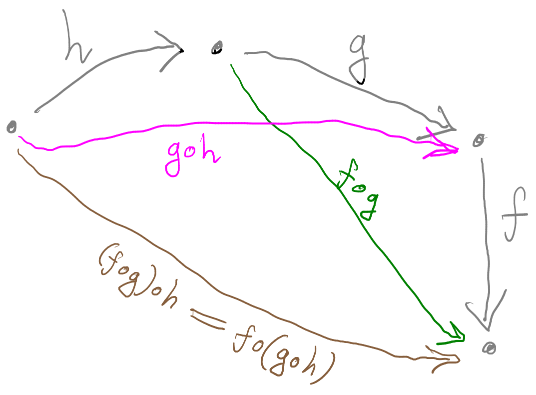
DEF. Kategorią nazywamy strukturę postaci $\mathcal{K} = \langle V, A, dom, cod, \circ\rangle$, gdzie:

(K0) $\langle V, A, dom, cod\rangle$ jest grafem skierowanym.

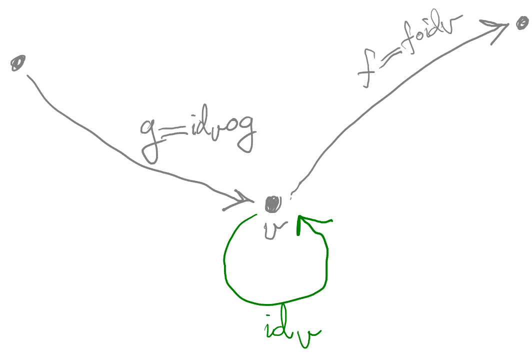
(K1) $\circ$ jest częściowym działaniem 2-argumentowym na A. Dokładniej, $f\circ g$ jest zdefiniowane $\iff$ $dom(f) = cod(g)$. W tym przypadku $dom(f\circ g) = dom(g)$, $\quad cod(f\circ g) = cod(f)$.

(K2) Działanie $\circ$ jest łączne, tzn. $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$ dla strzałek $f,g,h\in A$ takich, że $f\circ g$, $g\circ h$ są zdefiniowane.

(K3) Dla każdego $v\in V$ istnieje pętla $id_v : v \longrightarrow v$, zwana identycznością, spełniająca
$$f\circ id_v = f \quad \text{oraz} \quad id_v\circ g = g$$
dla każdych $f,g\in A$ takich, że $dom(f) = v$, $cod(g) = v$.



Ilustracja łączności (K2)



(K3)

TERMINOLOGIA: Mając daną kategorię $\mathfrak{K} = \langle V, A, dom, cod, \circ \rangle$, elementy zbioru V nazywamy obiektami, a elementy zbioru A nazywamy morfizmami lub strzałkami. Przyjmujemy oznaczenie $Ob(\mathfrak{K}) := V$.

Ponadto, kategorię $\mathfrak{K}$ będziemy czasem utożsamiać z jej rodziną strzałek A.

Działanie częściowe $\circ$ nazywamy składaniem, zaś $f \circ g$ nazywamy złożeniem strzałek f, g.

PRZYKŁAD 4 (Kategoria zbiorów) Kategorią zbiorów jest kategoria, której obiektami są wszystkie zbiory, strzałkami są odwzorowania, a składanie jest zwykłym składaniem odwzorowań. Identycznością to odwzorowania tożsamościowe.

Kategorię zbiorów oznaczamy Set lub Ens.

UWAGA 1, Z powyższego przykładu widać, że kategoria nie musi być zbiorem; takie kategorie nazywamy dużymi. Kategorie będące zbiorami nazywamy małymi.

PRZYKŁAD 5, Każdy monoid tworzy kategorię. Istotnie, niech $\mathbb{M} = \langle M, \cdot, e \rangle$ będzie monoidem. Przyjmijmy $Ob(\mathcal{M}) := \{M\}$, niech M będzie zbiorem strzałek w $\mathcal{M}$. Składaniem jest $\cdot$. Identycznością to e. W szczególności, dla $x \in M$ mamy $dom(x) = M = cod(x)$. W ten sposób $\mathbb{M}$ staje się kategorią.

DEF. Niech $\mathfrak{K}$ będzie kategorią, $v \in Ob(\mathfrak{K})$. Endomorfizmem obiektu v nazywamy każdą strzałkę $f: v \to v$. Endomorfizmem nazywamy każdą strzałkę f spełniającą $dom(f) = cod(f)$.

Dla obiektów u, v przyjmujemy oznaczenie

$$\mathfrak{K}(u,v) := \{ f \in \mathfrak{K} : dom(f) = u, \ cod(f) = v \}.$$

Inne oznaczenia na $\mathfrak{K}(u,v)$: $Mor(u,v)$, $Mor_{\mathfrak{K}}(u,v)$.

Ponadto, zbiór wszystkich endomorfizmów obiektu v oznaczamy $End(v)$ lub $End_{\mathfrak{K}}(v)$.

FAKT 1, Niech $\mathfrak{K}$ będzie kategorią, $v \in Ob(\mathfrak{K})$. Wówczas $\langle End(v), \circ, id_v \rangle$ jest monoidem.

Dowód jest oczywisty.

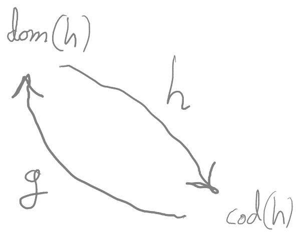
FAKT 2. Niech $\mathbb{K}$ będzie kategorią, $v \in Ob(\mathbb{K})$. Wówczas strzałka id_v spełniająca (K3) jest wyznaczona jednoznacznie.

DOWÓD. Przypuśćmy, że 1_v też spełnia (K3). Wówczas

$$1_v = 1_v \circ id_v = id_v. \blacksquare$$

DEF. Niech $\mathbb{K}$ będzie kategorią. Strzałkę h nazywamy izomorfizmem, jeśli istnieje strzałka g taka, że $h \circ g = id_{cod(h)}$ oraz $g \circ h = id_{dom(h)}$.

FAKT 3. Przy powyższych założeniach, strzałka g jest wyznaczona jednoznacznie.



DOWÓD. Niech $h: x \to y$. Przypuśćmy, że $h \circ g = id_y = h \circ g'$ oraz $g \circ h = id_x = g' \circ h$. Wówczas

$$g = g \circ id_y = g \circ (h \circ g') = (g \circ h) \circ g' = id_x \circ g' = g'. \blacksquare$$

Strzałkę g spełniającą definicję nazywamy odwrotnością h i oznaczamy h^{-1}.

DEF. Automorfizmem nazywamy izomorfizm będący jednocześnie endomorfizmem.

Dla obiektu v kategorii $\mathbb{K}$ przyjmujemy oznaczenie

endomorfizm = pętla

$$Aut_{\mathbb{K}}(v) := \{ h \in \mathbb{K} : h \text{ jest automorfizmem, } dom(h) = v = cod(h) \}.$$

FAKT 4. Niech $\mathbb{K}$ będzie kategorią.

(1) Jeśli g, h są izomorfizmami w $\mathbb{K}$ oraz $dom(g) = cod(h)$, to $g \circ h$ jest izomorfizmem oraz $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$.

(2) Dla każdego $v \in Ob(\mathbb{K})$ struktura $\langle Aut_{\mathbb{K}}(v), \circ \rangle$ jest grupą.

DOWÓD. Jasne jest, że (1) $\Rightarrow$ (2). Aby uzasadnić (1), wystarczy pokazać, że $h^{-1} \circ g^{-1}$ jest odwrotnością $g \circ h$. Mamy

$$(g \circ h) \circ (h^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (h \circ h^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ id_{dom(g)} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_{cod(g)},$$

$$(h^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ h) = h^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ h = h^{-1} \circ id_{cod(h)} \circ h = h^{-1} \circ h = id_{dom(h)}.$$

Tak więc $h^{-1} \circ g^{-1}$ jest odwrotnością strzałki $g \circ h$. $\blacksquare$

DEF. *Grupoidem* nazywamy kategorię, w której każda strzałka jest izomorfizmem.
Obiekty u, v kategorii $\mathbb{K}$ nazywamy *izomorficznymi*, jeśli istnieje izomorfizm $h : u \longrightarrow v$. Piszemy wtedy $u \approx v$.

FAKT 5 Relacja $\approx$ jest równoważnością na klasie obiektów ustalonej kategorii.
To znaczy: $u \approx u$, $\quad u \approx v \Rightarrow v \approx u$ oraz
$(u \approx v$ i $v \approx w) \Rightarrow u \approx w$.

W kategorii zbiorów, izomorfizm to bijekcja. Zbiory izomorficzne to nic innego jak zbiory równoliczne.

PRZYKŁAD 6. *Quasi-porządkiem* na zbiorze X nazywamy relację $\preccurlyeq$ spełniającą

(Q0) $(\forall x \in X) \quad x \preccurlyeq x$; (zwrotność)

(Q1) $(\forall x, y, z \in X) \quad x \preccurlyeq y \ \& \ y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z$. (przechodniość)

Strukturę $\mathfrak{X} = \langle X, \preccurlyeq \rangle$ nazywamy *zbiorem quasi-uporządkowanym*.
Wówczas $\mathfrak{X}$ staje się kategorią, przyjmując $Ob(\mathfrak{X}) = X$ oraz $\preccurlyeq$ jako klasę strzałek. Dla $\langle x, y \rangle \in \preccurlyeq$ [tzn. $x \preccurlyeq y$] definiujemy $dom\langle x, y\rangle := x$, $cod\langle x, y \rangle := y$. Dla $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in \preccurlyeq$ definiujemy

$$\langle y, z \rangle \circ \langle x, y \rangle := \langle x, z \rangle.$$

Jest to poprawne na mocy (Q1).
Działanie to jest łączne, bo

$$\langle y, z \rangle \circ (\langle x, y \rangle \circ \langle w, x \rangle) = \langle y, z \rangle \circ \langle w, y \rangle = \langle w, z \rangle,$$

$$(\langle y, z \rangle \circ \langle x, y \rangle) \circ \langle w, x \rangle = \langle x, z \rangle \circ \langle w, x \rangle = \langle w, z \rangle.$$

Dla $x \in X$ mamy $id_x := \langle x, x \rangle \in \preccurlyeq$, na mocy (Q0).
Oczywiście $\langle x, x \rangle \circ \langle y, x \rangle = \langle y, x \rangle$ oraz $\langle x, z \rangle \circ \langle x, x \rangle = \langle x, z \rangle$ dla $y \preccurlyeq x$, $x \preccurlyeq z$.

DEF. Kategorię $\mathbb{K}$ nazwiemy *quasi-uporządkowaną*, jeśli dla każdych $u, v \in Ob(\mathbb{K})$ zachodzi $|\mathbb{K}(u, v)| \leqslant 1$.

Każda kategoria quasi-uporządkowana „pochodzi" od quasi-porządku na jej klasie obiektów.

DEF. Niech $\mathbb{K}$ będzie kategorią. Dla $x, y \in Ob(\mathbb{K})$ definiujemy

$$x \precsim y \;:\Longleftrightarrow\; \mathbb{K}(x,y) \neq \emptyset.$$

FAKT 6. $\precsim$ jest quasi-porządkiem na $Ob(\mathbb{K})$.

DOWÓD. Relacja $\precsim$ jest zwrotna, bo $id_x \in \mathbb{K}(x,x) \neq \emptyset$.
Relacja $\precsim$ jest przechodnia, bo jeśli $f \in \mathbb{K}(x,y)$ i $g \in \mathbb{K}(y,z)$, to $g \circ f \in \mathbb{K}(x,z)$. $\blacksquare$

Zauważmy, że $x \simeq y \implies x \precsim y$ i $y \precsim x$. Implikacja przeciwna jest zazwyczaj fałszywa.
Przykładowo, w kategorii zbiorów mamy

$$\{0\} \precsim \{0,1\} \text{ oraz } \{0,1\} \precsim \{0\}, \text{ ale } \{0\} \not\simeq \{0,1\}.$$

Ogólniej, jeśli X, Y są zbiorami oraz $Y \neq \emptyset$, to $X \precsim Y$, bo istnieje odwzorowanie $f: X \to Y$ takie, że $(\forall x \in X)\ f(x) = y_0$, gdzie $y_0 \in Y$ jest ustalone. Z kolei $X \precsim \emptyset \iff X = \emptyset$.

$\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ jest odwzorowaniem!

PRZYKŁAD 7. Niech $\mathcal{E}ns_{1-1}$ będzie kategorią zbiorów wraz z odwzorowaniami 1–1 (różnowartościowymi). Wówczas dla zbiorów X, Y zachodzi

$$X \precsim Y \iff |X| \leq |Y|.$$

$|S|$ oznacza moc zbioru S.

Twierdzenie Schrödera–Bernsteina mówi, że jeśli $X \precsim Y$ i $Y \precsim X$, to $X \simeq Y$ (tzn. $|X| = |Y|$).

DEF. Niech $\mathbb{K}$ będzie kategorią. Podkategorią kategorii $\mathbb{K}$ nazywamy kategorię $\mathcal{C}$ spełniającą:

(PK0) $Ob(\mathcal{C}) \subseteq Ob(\mathbb{K})$, strzałki w $\mathcal{C}$ są strzałkami w $\mathbb{K}$;
(PK1) dom, cod oraz składanie strzałek w $\mathcal{C}$ są takie same jak w $\mathbb{K}$;
(PK2) $\forall x \in Ob(\mathcal{C})$ id_x w $\mathcal{C}$ jest taka sama jak w $\mathbb{K}$.

Piszemy wtedy $\mathcal{C} \leq \mathbb{K}$.

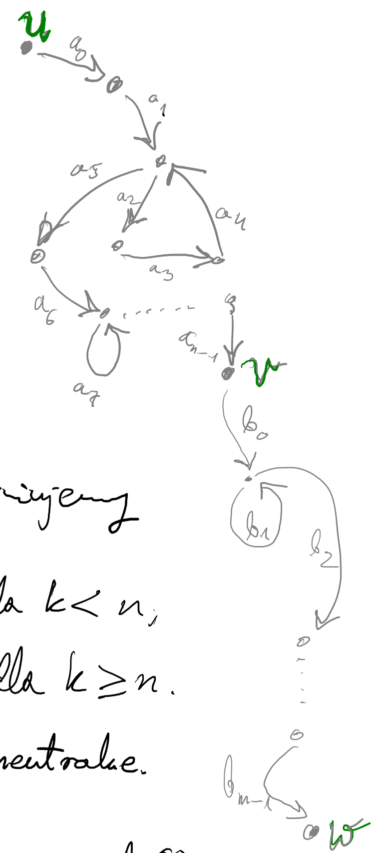
PRZYKŁAD 8. $2 = \{0,1\}$ ma strukturę grupy $\mathbb{Z}_2$, jest to też ciało. Biorąc $\langle 2, \cdot, 1\rangle$ mamy monoid, ale $\{0\}$ nie jest podmonoidem ($=$ podkategorią), bo nie spełnia (PK2).
Tak więc (PK2) nie wynika z (PK0)+(PK1).

DEF. Niech $\mathcal{C}$ będzie podkategorią kategorii $\mathbb{K}$. Wówczas $\mathcal{C}$ nazywamy pełną w $\mathbb{K}$, jeśli $\mathcal{C}(x,y) = \mathbb{K}(x,y)$ dla każdych $x, y \in Ob(\mathcal{C})$.

$\mathcal{C}$ nazywamy szeroką, jeśli $Ob(\mathcal{C}) = Ob(\mathbb{K})$.

PRZYKŁAD 9 (Kategoria ścieżek) Niech $G = \langle V, A, dom, cod \rangle$ będzie grafem skierowanym. Ścieżką od $u \in V$ do $v \in V$ nazywamy trójkę postaci

$$f = \langle u, \langle a_i \rangle_{i<n}, v \rangle,$$



gdzie $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$ dla $i < n$, $dom(a_0) = u$, $cod(a_{n-1}) = v$ oraz

$$(\forall i < n-1) \quad cod(a_i) = dom(a_{i+1}).$$

Ponadto, jeśli $n = 0$ to wymagamy, aby $u = v$.

Mając ścieżki $f = \langle u, \langle a_i \rangle_{i<n}, v \rangle$, $g = \langle v, \langle b_j \rangle_{j<m}, w \rangle$, definiujemy ich złożenie

$$g \circ f = \langle u, \langle c_k \rangle_{k<n+m}, w \rangle, \text{ gdzie } \quad c_k = \begin{cases} a_k, & \text{dla } k < n, \\ b_{k-n}, & \text{dla } k \geq n. \end{cases}$$

FAKT 7. Składanie ścieżek jest łączne. Ścieżki postaci $\langle u, \emptyset, u \rangle$ są neutralne.

Dla ścieżki $f = \langle u, \langle a_i \rangle_{i<n}, v \rangle$ definiujemy $dom(f) = u$, $cod(f) = v$.

FAKT 8. Przy powyższych założeniach, rodzina wszystkich ścieżek w G tworzy kategorię.

DEF. Kategorię ścieżek w G oznaczamy $\acute{S}(G)$. Dokładniej, obiektami są wierzchołki grafu G, strzałkami są ścieżki, a składanie jest zdefiniowane jak wyżej.

PRZYKŁAD 9a. Rozważmy graf z jedną pętlą:

G: 

Wówczas ścieżki są postaci

$$\langle 0, \underbrace{\langle p, p, \ldots, p \rangle}_{n \text{ razy}}, 0 \rangle. \quad \text{Stąd } \acute{S}(G) \cong \langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle.$$

DEF. Niech $\mathbb{K}$ będzie kategorią. Kategorią odwróconą do $\mathbb{K}$ nazywamy kategorię $\mathbb{K}^{op}$ zdefiniowaną następująco:

(OP0) $Ob(\mathbb{K}^{op}) = Ob(\mathbb{K})$; strzałki w $\mathbb{K}^{op}$ są takie same jak w $\mathbb{K}$.

(OP1) Dla strzałki f, $dom_{\mathbb{K}^{op}}(f) := cod_{\mathbb{K}}(f)$ oraz $cod_{\mathbb{K}^{op}}(f) := dom_{\mathbb{K}}(f)$.

(OP2) Składanie strzałek: $f \circ_{\mathbb{K}^{op}} g := g \circ_{\mathbb{K}} f$.

PRZYKŁAD 10 (1) Niech $\mathcal{X} = \langle X, \lesssim \rangle$ będzie zbiorem quasi-uporządkowanym, traktowanym jako kategoria. Wówczas $\mathcal{X}^{op} = \langle X, \gtrsim \rangle$.

(2) Niech $\mathcal{M} = \langle M, \cdot, e \rangle$ będzie monoidem. Wówczas $\mathcal{M}^{op} = \langle M, \tilde{\cdot}, e \rangle$, gdzie $x \,\tilde{\cdot}\, y := y \cdot x$.

OBIEKTY UNIVERSALNE

DEF. Niech $\mathbb{K}$ będzie kategorią. Obiekt a nazywamy początkowym w $\mathbb{K}$, jeśli $(\forall x \in Ob(\mathbb{K}))\ |\mathbb{K}(a,x)| = 1$.

Obiekt z nazywamy końcowym w $\mathbb{K}$, jeśli jest początkowy w $\mathbb{K}^{op}$, tzn. $(\forall x \in Ob(\mathbb{K}))\ |\mathbb{K}(x,z)| = 1$.

Obiekt, który jest jednocześnie początkowy i końcowy nazywamy zerowym.

FAKT 9. Obiekt początkowy / końcowy jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do (jednoznacznie wyznaczonego) izomorfizmu.

DOWÓD. Przypuśćmy, że a, a' są początkowe w $\mathbb{K}$. Wówczas $\mathbb{K}(a,a') = \{f\}$ oraz $\mathbb{K}(a',a) = \{g\}$. Ponadto $\mathbb{K}(a,a) = \{id_a\}$ oraz $\mathbb{K}(a',a') = \{id_{a'}\}$. Stąd

$f \circ g \in \mathbb{K}(a',a')$, zatem $f \circ g = id_{a'}$

oraz

$g \circ f \in \mathbb{K}(a,a)$, zatem $g \circ f = id_a$.

Tak więc $g = f^{-1}$. ∎

PRZYKŁAD 11. (1) Niech $\mathcal{M} = \langle M, \circ, e \rangle$ będzie monoidem. Wówczas jedynym obiektem jest M; jest on początkowy $\iff M = \{e\}$.

(2) Niech $\mathcal{X} = \langle X, \leqslant \rangle$ będzie zbiorem quasi-uporządkowanym. Wówczas $a \in X$ jest obiektem początkowym $\iff$ a jest elementem najmniejszym.

(3) W kategorii zbiorów obiektem początkowym jest $\emptyset$, zaś obiektem końcowym jest każdy zbiór 1-elementowy.

PRZYKŁAD 12. Kategoria grup $\mathcal{G}rp$, to kategoria, której obiektami są wszystkie grupy, a strzałkami są homomorfizmy grup. Obiektem zerowym jest grupa trywialna.