EXERCISE 1.1(b)

$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ jest izometrią, jeśli spełnia

$$\forall x,y\in\mathbb{R} \qquad |f(x)-f(y)| = |x-y|.$$

Przykłady izometrii: $f(x)=x$ (identyczność),

$f(x)=-x$.

Ogólniej: $f(x)=ax+b$, gdzie $a\in\{-1,1\}$, $b\in\mathbb{R}$.

Mamy $|f(x)-f(y)| = |ax+b-(ay+b)| =$

$$= |a(x-y)| = |a|\cdot|x-y| = |x-y|.$$

Jeśli $a\notin\{-1,1\}$ to $|a|\neq 1$, a więc funkcja $x\longmapsto ax+b$ nie jest izometrią.

Jak opisać wszystkie izometrie $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$?

Załóżmy, że $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ jest izometrią oraz $f(0)=0$. Wówczas

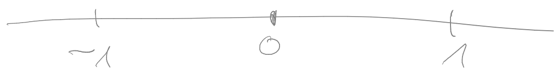
$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad |f(x)| = |f(x)-0| = |f(x)-f(0)| = |x-0| = |x|.$$

Tak więc $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)\in\{-x,x\}$.

Przypuśćmy, że $f(1)=1$. Gdyby dla pewnego $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ było $f(x)=-x$, to

$$|f(x)-f(1)| = |-x-1| = |x+1| \neq |x-1|,$$ sprzeczność.

Stąd $f(x)=x$ dla $x\in\mathbb{R}$.



Podobnie, jeśli $f(1)=-1$, to $f(x)=-x$ dla $x\in\mathbb{R}$.

Pokazaliśmy:

FAKT 1. Jeśli $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ jest izometrią oraz $f(0)=0$, to

$$\left(\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x\right) \text{ albo } \left(\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=-x\right).$$

FAKT 2. Jeśli $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ jest izometrią, to istnieją $a\in\{-1,1\}$ oraz $b\in\mathbb{R}$ takie, że $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$.

DOWÓD. Ustalmy izometrię $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. Niech $b:=f(0)$. Niech $g(x):=x-b$. Wiemy, że $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ jest izometrią. Wiemy też (co łatwo sprawdzić), że złożenie dwóch izometrii jest izometrią. Tak więc $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest izometrią.

Ponadto $(g\circ f)(0) = g(f(0)) = g(b) = b - b = 0$. Z Faktu 1 wnosimy, że $\forall x\in\mathbb{R},\ (g\circ f)(x) = ax$, gdzie $a\in\{-1,1\}$.

Stąd $f(x) = (g^{-1}\circ g\circ f)(x) = g^{-1}\big((g\circ f)(x)\big) = g^{-1}(ax) = ax+b$,

ponieważ $\forall x\in\mathbb{R},\ g^{-1}(x) = x+b$. $\blacksquare$

FAKT 3. Każda izometria $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest odwracalna. Konkretnie, jeśli $f(x) = x+b$, to $f^{-1}(x) = x-b$; jeśli $f(x) = -x+b$, to $f^{-1}(x) = -x+b$.

Dowód. Załóżmy, że $f(x) = -x+b$ i niech $g(x) = -x+b$. Wówczas

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x+b) = -(-x+b)+b = x - b + b = x$$

oraz

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(-x+b) = -(-x+b)+b = x,$$

a zatem $g = f^{-1}$.

Załóżmy teraz, że $f(x) = x+b$ i niech $g(x) = x-b$. Mamy

$$(f\circ g)(x) = f(x-b) = (x-b)+b = x$$

oraz

$$(g\circ f)(x) = g(x+b) = (x+b)-b = x,$$

a zatem $g = f^{-1}$. $\blacksquare$

DEF. 1 Górną półkratą nazywamy poset $\langle X,\le\rangle$ taki, że

$$\forall x,y\in X\ \exists v\in X\quad v = \sup\{x,y\},\ \text{tzn.}$$

$$v\ge x,\ v\ge y \ \text{oraz}\ \forall w\in X\,(w\ge x,\ w\ge y \Rightarrow w\ge v)$$

Piszemy $x\vee y$ zamiast $\sup\{x,y\}$.

DEF. 2 Półkratą nazywamy strukturę typu $\langle X,\vee\rangle$, gdzie $\vee$ jest operacją 2-argumentową na X spełniającą warunki:

(P0) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ (łączność)

(P1) $x \vee y = y \vee x$ (przemienność)

(P2) $x \vee x = x$ (idempotentność)

dla każdych $x, y, z \in X$.

poset = zbiór częściowo uporządkowany

FAKT 4. Powyższe definicje są równoważne.

DOWÓD. 1. Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie posetem spełniającym Def. 1. Niech $x \vee y := \sup\{x, y\}$. Wówczas (P1), (P2) są oczywiste. Łączność: Ustalmy $x, y, z \in X$. Niech $a := x \vee y$, $b := a \vee z$. Pokażemy, że $b = \sup\{x, y, z\}$. Mamy $b \geq a$, $b \geq z$. Stąd $b \geq x$, $b \geq y$, $b \geq z$. Tak więc b jest ograniczeniem górnym zbioru $\{x, y, z\}$. Weźmy dowolne ograniczenie górne w zbioru $\{x, y, z\}$. Tak więc $w \geq x$, $w \geq y$, zatem $w \geq a$. Ponadto $w \geq z$, a więc $w \geq b$. Stąd $b = \sup\{x, y, z\}$. Pokazaliśmy więc, że

$$(x \vee y) \vee z = \sup\{\sup\{x, y\}, z\} = \sup\{x, y, z\}.$$

Symetria daje

$$x \vee (y \vee z) = \sup\{x, \sup\{y, z\}\} = \sup\{x, y, z\},$$

a więc $$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z).$$

Tak więc $\langle X, \vee \rangle$ spełnia Def. 2.

2. Załóżmy, że $\langle X, \vee \rangle$ spełnia Def. 2. Zdefiniujmy

$$x \leq y :\Longleftrightarrow x \vee y = y.$$

Sprawdzimy, że $\leq$ jest relacją częściowego porządku.

Zwrotność: $x \leq x$, bo $x \vee x \overset{(P2)}{=} x$.

Przechodniość: Załóżmy, że $x \leq y$ i $y \leq z$. To znaczy, że $y = x \vee y$, $z = y \vee z$, a więc $x \vee z = x \vee (y \vee z) \overset{(P0)}{=} (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$. Stąd $x \leq z$.

Antysymetria: Jeśli $x \leq y$ i $y \leq x$, to $y = x \vee y \overset{(P1)}{=} y \vee x = x$.

Pozostaje pokazać, że $x \vee y = \sup\{x, y\}$ dla $x, y \in X$.

Niech $v := x \vee y$. Mamy

$$x \vee v = x \vee (x \vee y) \overset{(P0)}{=} (x \vee x) \vee y \overset{(P2)}{=} x \vee y = v,$$

$$y \vee v = y \vee (x \vee y) \overset{(P0),(P1)}{=} (y \vee y) \vee x \overset{(P2),(P1)}{=} x \vee y = v,$$

zatem $v \geq x$, $v \geq y$. Tak więc $v = x \vee y$ jest ograniczeniem górnym zbioru $\{x, y\}$.
Weźmy $w \in X$ takie, że $w \geq x$, $w \geq y$. Wówczas

$$v \vee w = (x \vee y) \vee w \overset{(P0)}{=} x \vee (y \vee w) = x \vee w = w,$$

zatem $v \leq w$. Stąd $v = \sup\{x, y\}$. $\blacksquare$

IZOMORFIZMY

DEF. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Strzałkę $h: X \longrightarrow Y$ w $\mathcal{C}$ nazywamy <u>izomorfizmem</u>, jeśli istnieje $g: Y \longrightarrow X$ w $\mathcal{C}$ taka, że

$$g \circ h = id_X \quad \text{oraz} \quad h \circ g = id_Y.$$

FAKT 5. Przy powyższych założeniach, przypuśćmy, że $g_1 \circ h = id_X$ oraz $h \circ g_2 = id_Y$, gdzie $g_1, g_2 : Y \longrightarrow X$. Wówczas $g_1 = g_2$.

DOWÓD. Mamy

$$g_1 = g_1 \circ id_Y = g_1 \circ (h \circ g_2) = (g_1 \circ h) \circ g_2 = id_X \circ g_2 = g_2. \blacksquare$$

WNIOSEK: Strzałka g spełniająca $g \circ h = id_X$, $h \circ g = id_Y$ jest wyznaczona jednoznacznie, o ile istnieje. Oznaczamy ją h^{-1} i nazywamy <u>odwrotnością</u> h.

FAKT 6. Identyczności są izomorfizmami. Złożenie dwóch izomorfizmów jest izomorfizmem. Ponadto $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$ dla zgodnych izomorfizmów g, h.

PRZYKŁAD 1. Niech **Top** oznacza kategorię przestrzeni topologicznych wraz z odwzorowaniami ciągłymi. Wówczas izomorfizm $=$ homeomorfizm.

PRZYKŁAD 2. W kategoriach struktur algebraicznych, izomorfizmy to homomorfizmy które są jednocześnie bijekcjami.

Istotnie, niech $f: X \longrightarrow Y$ będzie bijektywnym homomorfizmem. Niech D będzie działaniem n-argumentowym. Dla $y_1, \dots, y_n \in Y$ mamy $y_i = f(x_i)$ dla $i \leq n$, a więc

$$f^{-1}(D(y_1,\dots,y_n)) = f^{-1}(D(f(x_1),\dots,f(x_n))) = f^{-1}(f(D(x_1,\dots,x_n))) =$$

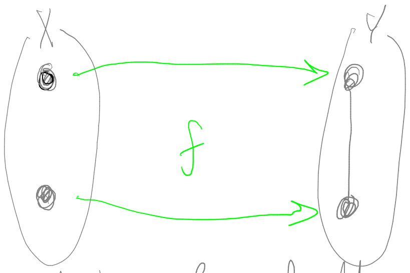
$$= D(x_1,\dots,x_n) = D(f^{-1}(y_1),\dots,f^{-1}(y_n)),$$

zatem f^{-1} zachowuje działanie D.

PRZYKŁAD 3. Niech $\mathcal{G}$ oznacza kategorię grafów prostych (nieskierowanych).
Wówczas $f: X \longrightarrow Y$ jest morfizmem $\iff \forall x_1,x_2 \in X,\ x_1 \sim x_2 \Longrightarrow f(x_1) \sim f(x_2)$, gdzie $\sim$ oznacza relację grafową.

Zauważmy, że $h: X \longrightarrow Y$ jest izomorfizmem $\iff$ h jest bijekcją oraz

$$\left(\forall x_1,x_2 \in X,\quad x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) \sim f(x_2)\right).$$



Przykład homomorfizmu bijektywnego grafów, który nie jest izomorfizmem.

RELACJE RÓWNOWAŻNOŚCI.

FAKT 7. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze X. Wówczas

$$X = \bigcup_{x \in S} [x]_R, \quad \text{gdzie } S \subseteq X \text{ spełnia } \forall s \in S\ \exists x \in X,\ sRx.$$

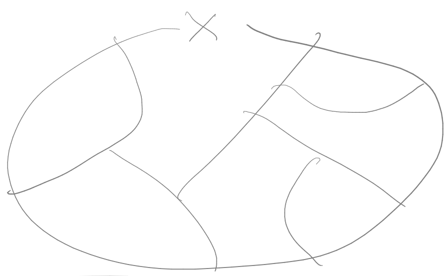
Ponadto, $\{[x]_R\}_{s \in S}$ jest rozbiciem zbioru X.

FAKT 8. Niech $X = \bigcup \mathcal{F}$, przy czym $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ dla $F_1 \neq F_2$ ($F_1, F_2 \in \mathcal{F}$). Wówczas relacja $R_{\mathcal{F}}$ zdefiniowana formułą

$$x_1 R_{\mathcal{F}} x_2 \iff \exists F \in \mathcal{F},\ x_1,x_2 \in F,$$

jest relacją równoważności na X. Ponadto

$$\mathcal{F} = \{[x]_{R_{\mathcal{F}}} : x \in X\}.$$



Dla relacji równoważności R: $[x]_R := \{y : yRx\}$.

FAKT 9. Każda relacja równoważności na X jest indukowana przez surjekcję $f: X \to Y$, poprzez

$$xR_f y \overset{df}{\iff} f(x) = f(y).$$

KATEGORIA LINIOWYCH PORZĄDKÓW

DEF Niech Lin oznacza kategorię której obiektami są zbiory liniowo uporządkowane, strzałkami są odwzorowania zachowujące porządek.

Rozważmy $\mathbb{Q}$ jako zbiór liniowo uporządkowany.

Wiemy, że:

(1) Każdy zbiór przeliczalny liniowo uporządkowany zanurza się w $\mathbb{Q}$.

[DOWÓD: $X \hookrightarrow X \cdot \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$]

(porządek leksykograficzny)

(2) Dla każdych dwóch skończonych $A, B \subseteq \mathbb{Q}$, każdy izomorfizm $f: A \to B$ przedłuża się do automorfizmu $\bar{f}: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.

Tak naprawdę, $\mathbb{Q}$ charakteryzuje się jako zbiór przeliczalny liniowo uporządkowany, spełniający

$$(E) \quad \forall \underset{\text{skończone}}{A \subseteq B} \; \forall e: A \underset{\text{zanurzenie}}{\hookrightarrow} \mathbb{Q} \; \exists f: B \underset{\text{zanurzenie}}{\hookrightarrow} \mathbb{Q}, \; f|A = e.$$

[Wystarczy rozważać $B = A \cup \{v\}$...]

FAKT 10. Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym spełniającym (E). Wówczas (1) każdy przeliczalny zbiór liniowo uporządkowany zanurza się w $\langle X, \leq \rangle$.

(2) Jeśli X jest przeliczalny, to $\langle X, \leq \rangle \simeq \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$.

$\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ jest klasycznym przykładem struktury generycznej.

DOWÓD. (1) Ustalmy zbiór przeliczalny $\langle X, \leq \rangle$, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, gdzie $|X_0| = 1$ oraz $|X_{n+1} \setminus X_n| \leq 1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Stosując (E) indukcyjnie, dostajemy zanurzenie $e: X \hookrightarrow \mathbb{Q}$.

(2) Back-and-forth argument:

$$\begin{tikzcd}
Q_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, leftrightarrow] & Q_1 \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & Q_n \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & Q \arrow[d, shift left, "g"] \\
X_0 \arrow[r, hook] \arrow[rru, phantom] & X_1 \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] \arrow[ru, hook] & X_n \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] \arrow[ru, hook] & X \arrow[u, shift left, "h"]
\end{tikzcd}$$

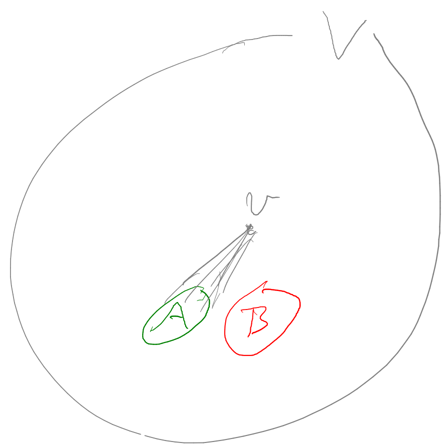
$$h \circ g = id_Q, \qquad g \circ h = id_X.$$

KATEGORIA GRAFÓW

DEF. Graf prosty (nieskierowany) $G=\langle V,E\rangle$ nazywamy losowym, jeśli

$$\forall A,B \subseteq V, \underset{\text{skończone}}{A\cap B=\emptyset} \Rightarrow \exists\, v\in V\setminus(A\cup B), (\forall a\in A,\ vEa) \text{ oraz } (\forall b\in B\ \neg(vEb)).$$

TWIERDZENIE 1 (Erdős–Renyi; Rado, ...) Istnieje dokładnie jeden, z dokładnością do izomorfizmu, przeliczalny graf losowy.



KONSTRUKCJA GRAFU RADO.

Zbiór wierzchołków to $\mathbb{N}$ zbiór liczb naturalnych.
Dla $k<n$ przyjmujemy, że $k \sim n \iff$ w rozwinięciu binarnym liczby n występuje jedynka na miejscu k.