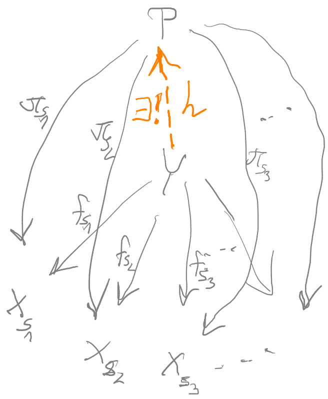
PRODUKTY I KOPRODUKTY

DEF. Niech $\mathcal{K}$ będzie kategorią, niech $S \neq \emptyset$ będzie zbiorem. Niech $\mathcal{X} = (X_s)_{s\in S} \subseteq Ob(\mathcal{K})$.
Stożkiem nad $\mathcal{X}$ nazywamy każdą parę postaci

$$(Y, (f_s)_{s\in S}), \quad \text{gdzie } Y \in Ob(\mathcal{K}) \text{ oraz } f_s : Y \longrightarrow X_s \text{ dla } s \in S.$$

Formalnie, $\mathcal{X} : S \longrightarrow Ob(\mathcal{K})$.

Produktem rodziny $\mathcal{X}$ nazywamy stożek $(P, (\pi_s)_{s\in S})$ o następującej własności:



(Π) Dla każdego stożka $(Y, (f_s)_{s\in S})$ nad $\mathcal{X}$ istnieje dokładnie jedna strzałka $h : Y \longrightarrow P$ spełniająca

$$(\forall s\in S) \quad \pi_s \circ h = f_s.$$

Produkt rodziny $\mathcal{X}$, o ile istnieje, oznaczamy zwykle symbolem $\prod_{s\in S} X_s$ lub $\prod \mathcal{X}$. Jeśli $X_s = X$ dla każdego $s \in S$, to produkt oznaczamy symbolem X^S.

FAKT 1 Produkt ustalonej rodziny obiektów, o ile istnieje, jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

DOWÓD. Niech $\mathcal{X} = (X_s)_{s\in S} \subseteq Ob(\mathcal{K})$. Zauważmy, że wszystkie nad $\mathcal{X}$ tworzą kategorię.
Strzałką od stożka $(Y, (f_s)_{s\in S})$ do stożka $(Z, (g_s)_{s\in S})$ jest każda strzałka $h : Y \longrightarrow Z$ kategorii $\mathcal{K}$ spełniająca $(\forall s\in S)\ g_s \circ h = f_s$.
Składanie strzałek oraz identyczności są takie jak w $\mathcal{K}$.
Może się zdarzyć, że ta sama strzałka h spełnia warunek $(\forall s\in S)\ g_s' \circ h = f_s'$, gdzie $(Y, (f_s')_{s\in S})$, $(Z, (g_s')_{s\in S})$ są stożkami nad $\mathcal{X}$.
Formalnie, powinniśmy jako strzałkę zdefiniować trójkę $((Y, (f_s)_{s\in S}), h, (Z, (g_s)_{s\in S}))$.
Produkt to obiekt końcowy w kategorii stożków nad $\mathcal{X}$. $\square$

Jedyność produktu oznacza, że jeśli $(P, (\pi_s)_{s\in S})$, $(P', (\pi_s')_{s\in S})$ są produktami rodziny $\mathcal{X}$, to istnieje dokładnie jeden izomorfizm $h : P \longrightarrow P'$ taki, że

$$\pi_s' \circ h = \pi_s \quad \text{dla każdego } s \in S.$$

PRZYKŁAD 1 Niech $(X, \leq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, traktowanym jako kategoria. Ustalmy $\emptyset \neq S \subseteq X$. Stożkiem nad S jest $(x, (f_s)_{s\in S})$, gdzie $f_s : x \longrightarrow s$ dla $s \in S$, co oznacza, że $x \leq s$ dla każdego $s \in S$. Tak więc stożek nad S jest jednoznacznie wyznaczony przez element x, będący ograniczeniem dolnym zbioru S.

Tak więc produktem jest element p spełniający warunki

(P1) $\forall s \in S \ (p \leq s)$

(P2) $\forall x \in X \left(\forall s \in S \ (x \leq s) \Rightarrow x \leq p \right)$.

Stąd $\prod S = \inf S$, kres dolny zbioru S.

Ogólniej, jeśli $\mathcal{X} = (x_s)_{s \in S}$, to $\prod \mathcal{X} = \inf\{x_s : s \in S\}$.

Mając dany produkt $(P, (\pi_s)_{s\in S})$ rodziny $\mathcal{X} = (X_s)_{s \in S}$, strzałki $\pi_s : P \to X_s$ nazywamy rzutowaniami kanonicznymi.

Mając dwa obiekty X_1, X_2 ustalonej kategorii, ich produkt oznaczamy $X_1 \times X_2$.

Podobnie dla ciągu obiektów $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Łatwo sprawdzić, że $X_1 \times X_2 \approx X_2 \times X_1$ oraz $(X_1 \times X_2) \times X_3 \approx X_1 \times (X_2 \times X_3)$.

FAKT 2 W kategorii zbiorów produktem jest iloczyn kartezjański, wraz z rzutowaniami na współrzędne.

Dowód. Ustalmy indeksowaną rodzinę zbiorów $\mathcal{X} = (X_s)_{s\in S}$ i weźmy

$$P = \prod_{s \in S} X_s := \left\{ x \in \left(\bigcup_{s\in S} X_s \right)^S : (\forall s \in S) \ x(s) \in X_s \right\}.$$

Ustalmy stożek $(Y, (f_s)_{s \in S})$ nad $\mathcal{X}$. Niech $\pi_s : P \to X_s$ będzie rzutowaniem kanonicznym, tzn. $\pi_s(x) = x(s)$ dla $x \in P$.

Jeśli $h : Y \to P$ spełnia

$$(\forall s \in S) \quad \pi_s \circ h = f_s,$$

to $(\forall s \in S)(y \in Y) \quad \pi_s(h(y)) = f_s(y)$.

Stąd $h(y)(s) = f_s(y)$ dla $y \in Y$, $s \in S$.

To daje wzór na odwzorowanie h, z czego wynika zarówno istnienie jak i jednoznaczność. $\square$

DEF. Niech $\mathfrak{K}$ będzie kategorią, $\mathcal{X} = (X_s)_{s\in S} \subseteq Ob(\mathfrak{K})$. Kostożkiem nad $\mathcal{X}$ nazywamy parę $(Y, (f_s)_{s\in S})$, gdzie $f_s : X_s \to Y$.

Koproduktem rodziny $\mathcal{X}$ nazywamy kostożek $(K, (\varepsilon_s)_{s\in S})$ spełniający warunek:

($\amalg$) Dla każdego kostożka $(Y, (f_s)_{s\in S})$ istnieje dokładnie jedna strzałka $h : K \to Y$ taka, że $(\forall s \in S) \quad h \circ \varepsilon_s = f_s$.

Koprodukt rodziny $\mathcal{X}$ oznaczamy zwykle $\coprod \mathcal{X}$ lub $\coprod_{s\in S} X_s$ lub $\bigoplus_{s\in S} X_s$.
Koprodukt bywa też nazywany sumą prostą.

FAKT 3 Koprodukt rodziny $\mathcal{X}$ w kategorii $\mathfrak{K}$ jest produktem tej rodziny w kategorii odwróconej $\mathfrak{K}^{op}$. Koprodukt, o ile istnieje, jest wyznaczony jednoznacznie, z dokładnością do izomorfizmu.

PRZYKŁAD 2 Niech $(X,\leq)$ będzie zbiorem uporządkowanym, $\emptyset \neq S \subseteq X$.
Wówczas $\coprod S = \sup S$. Ogólniej, dla $\mathcal{X} = (x_s)_{s\in S} \subseteq X$ mamy

$$\coprod \mathcal{X} = \sup\{x_s : s\in S\}.$$

FAKT 4 W kategorii zbiorów, koproduktem rodziny $\mathcal{X} = (X_s)_{s\in S}$ jest jej suma rozłączna, tzn. $\coprod \mathcal{X} = \bigcup_{s\in S} (X_s \times \{s\})$.
Jeśli $X_s \cap X_{s'} = \emptyset$ dla $s\neq s'$, to $\coprod \mathcal{X} = \bigcup \mathcal{X}$.

DOWÓD. Niech $K = \bigcup_{s\in S} (X_s \times \{s\})$. Ustalmy kostożek $(Y, (f_s)_{s\in S})$ nad $\mathcal{X}$.
Niech $\varepsilon_t : X_t \longrightarrow K$ będzie dane wzorem $\varepsilon_t(x) = (x,t)$, $x\in X_t$.
Przypuśćmy, że $h : K \longrightarrow Y$ spełnia warunek

$$(\forall s\in S) \quad h\circ \varepsilon_s = f_s.$$

Wówczas $h(x,s) = h(\varepsilon_s(x)) = f_s(x)$, zatem h jest zdefiniowane wzorem

$$h(x,s) = f_s(x), \quad s\in S,\ x\in X_s.$$

To daje jedyność. Powyższy wzór definiuje funkcję, ponieważ zbiory $X_s \times \{s\}$ są parami rozłączne. $\square$

FUNKTORY I ICH (KO-)GRANICE

DEF. Niech $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{K}$ będą kategoriami. Funktorem kowariantnym z $\mathfrak{C}$ do $\mathfrak{K}$ nazywamy odwzorowanie F przypisujące każdemu obiektowi $C\in Ob(\mathfrak{C})$ obiekt $F(C)\in Ob(\mathfrak{K})$ oraz każdej strzałce $f : C_1 \longrightarrow C_2$ kategorii $\mathfrak{C}$ strzałkę $F(f) : F(C_1) \longrightarrow F(C_2)$. Ponadto, F spełnia warunki:

$$(F0) \quad F(id_C) = id_{F(C)} \quad \text{dla } C\in Ob(\mathfrak{C}).$$

(F1) $\quad F(f\circ g) = F(f)\circ F(g)$

Piszemy wtedy $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{K}$.

PRZYKŁAD 3 Niech $(X,\leqslant_X)$, $(Y,\leqslant_Y)$ będą zbiorami uporządkowanymi, traktowanymi jako kategorie. Wówczas $F: X\longrightarrow Y$ jest funktorem kowariantnym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall x_0,x_1\in X \ \left(x_0\leqslant_X x_1 \implies F(x_0)\leqslant_Y F(x_1)\right).$$

Tak więc funktory kowariantne z $(X,\leqslant_X)$ do $(Y,\leqslant_Y)$ to odwzorowania zachowujące porządek.

PRZYKŁAD 4 Niech $(M,\cdot,1_M)$, $(N,*,1_N)$ będą monoidami, traktowanymi jako kategorie. Wówczas funktor kowariantny z $(M,\cdot,1_M)$ do $(N,*,1_N)$ to po prostu homomorfizm monoidów, czyli odwzorowanie $F: M\to N$ spełniające

$$F(1_M)=1_N \quad \text{oraz} \quad F(x_0\cdot x_1) = F(x_0)*F(x_1) \text{ dla } x_0,x_1\in M.$$

PRZYKŁAD 5 Dla zbioru X niech $\mathcal{P}(X)$ oznacza jego zbiór potęgowy, czyli rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X. Dla odwzorowania $f:X\to Y$ zdefiniujmy odwzorowanie
$\mathcal{P}(f): \mathcal{P}(X)\longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ wzorem $\mathcal{P}(f)(A) := f[A]$, $A\in\mathcal{P}(X)$.

$f[A] := \{f(a): a\in A\}$ (obraz zbioru A)
$f^{-1}[B] := \{x\in X: f(x)\in B\}$ (przeciwobraz zbioru B)
dla $f:X\to Y$, $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$.

Zauważmy, że

$$\mathcal{P}(id_X)(A) = id_X[A] = A \quad \text{dla } A\in\mathcal{P}(X),$$

zatem $\mathcal{P}(id_X) = id_{\mathcal{P}(X)}$.

Ponadto, dla $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ mamy

$$\mathcal{P}(g\circ f)(A) = (g\circ f)[A] = g[f[A]] = g[\mathcal{P}(f)(A)] = \mathcal{P}(g)\left(\mathcal{P}(f)(A)\right) =$$
$$= \left(\mathcal{P}(g)\circ\mathcal{P}(f)\right)(A),$$

zatem $\mathcal{P}(g\circ f) = \mathcal{P}(g)\circ\mathcal{P}(f)$.

Tak więc $\mathcal{P}: \mathfrak{Ens}\longrightarrow\mathfrak{Ens}$ jest funktorem kowariantnym z kategorii zbiorów w siebie.

DEF. Funktorem kontrawariantnym z kategorii $\mathfrak{C}$ w kategorię $\mathfrak{K}$ nazywamy każdy funktor kowariantny postaci $F:\mathfrak{C}\longrightarrow\mathfrak{K}^{op}$.

Tak więc, funktor kontrawariantny F przypisuje każdej strzałce $f: C_1\to C_2$ strzałkę

$F(f) : F(C_2) \longrightarrow F(C_1)$ oraz spełnia warunki

(F0) $\quad F(id_C) = id_{F(C)}$,

(F1') $\quad F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

NOTACJA: W dalszym ciągu słowo „funktor" będzie oznaczać „funktor kowariantny".

PRZYKŁAD 6 Niech S będzie zbiorem. Kategorią dyskretną nad S nazywamy kategorię, której S jest zbiorem obiektów, a strzałkami są pary (s,s), gdzie $s \in S$. Jest to kategoria uporządkowana, ponieważ $(S, =)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym. Wszystkie strzałki kategorii dyskretnej to identyczności.

Mając daną kategorię $\mathcal{K}$, każde odwzorowanie $\mathcal{X} : S \longrightarrow Ob(\mathcal{K})$ jest funktorem, zarówno kowariantnym jak i kontrawariantnym.

DEF. Kategorią liczb naturalnych nazywamy kategorię $(\omega, \leqslant)$, gdzie $\omega = \{0,1,2,\ldots\}$ to zbiór liczb naturalnych, $\leqslant$ to zwykły porządek.

Ciągiem w kategorii $\mathcal{K}$ nazywamy dowolny funktor z $(\omega, \leqslant)$ w $\mathcal{K}$.

Notacja: Ciągi będziemy oznaczać symbolami $\vec{x}, \vec{a}, \vec{v}$, itp.

Mając dany ciąg $\vec{x} : \omega \longrightarrow \mathcal{K}$ będziemy pisać X_n zamiast $\vec{x}(n)$ oraz x_n^m zamiast $\vec{x}(n,m)$, $n \leqslant m$.

Para (n,m) jest jedyną strzałką w ω z obiektu n do obiektu m, o ile $n \leqslant m$.

$id_n = (n,n)$.

$\vec{x}(k,m) = \vec{x}((l,m) \circ (k,l)) = \vec{x}(l,m) \circ \vec{x}(k,l)$.

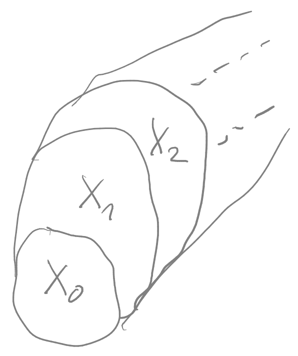
Tak więc ciąg $\vec{x}$ spełnia

(C0) $\quad x_n^n = id_{X_n}$ dla $n \in \omega$,

(C1) $\quad x_l^m \circ x_k^l = x_k^m$ dla $k \leqslant l \leqslant m$.

PRZYKŁAD 7 Niech $\{X_n\}_{n\in\omega}$ będzie łańcuchem zbiorów, tzn.

$$n \leqslant m \Rightarrow X_n \subseteq X_m \quad \text{dla } n,m \in \omega.$$



Wówczas mamy ciąg $\vec{x} : \omega \longrightarrow \mathfrak{Ens}$, gdzie $\vec{x}(n) = X_n$ oraz x_n^m to odwzorowanie tożsamościowe ze zbioru X_n w $X_m \supseteq X_n$. Innymi słowy $x_n^m = \subseteq_{X_n}^{X_m}$.

Dowolny ciąg w kategorii można zilustrować diagramem

$$X_0 \xrightarrow{x_0^1} X_1 \xrightarrow{x_1^2} \cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{x_n^{n+1}} X_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

gdzie $\quad x_n^m = x_{m-1}^m \circ \cdots \circ x_n^{n+1}$

Jeśli $A \subseteq B$, to $\subseteq_A^B$ oznacza odwzorowanie z A do B dane wzorem $\subseteq_A^B(x) = x$ dla $x \in A$.

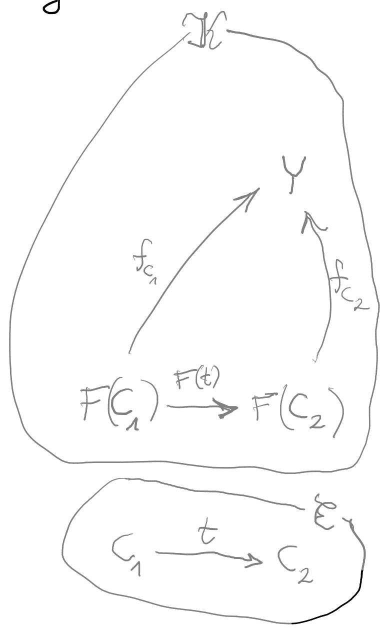
DEF. Niech $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathbb{K}$ będzie funktorem. Kostożkiem nad F nazywamy parę $\left(Y, (f_C)_{C\in Ob(\mathcal{C})}\right)$ spełniającą

(0) $f_C: F(C)\longrightarrow Y$ w kategorii $\mathbb{K}$, dla każdego $C\in Ob(\mathcal{C})$;

(1) dla każdej strzałki $t: C_1\longrightarrow C_2$ w kategorii $\mathcal{C}$ zachodzi

$$f_{C_2}\circ F(t) = f_{C_1}.$$

Ten warunek jest zawsze spełniony dla $t = id_C$.



Kogranicą funktora F nazywamy kostożek $\left(\varinjlim F, (\varphi_C)_{C\in Ob(\mathcal{C})}\right)$ spełniający warunek:

(KG) Dla każdego kostożka $\left(Y, (f_C)_{C\in Ob(\mathcal{C})}\right)$ nad F istnieje dokładnie jedna strzałka $h:\varinjlim F\longrightarrow Y$ taka, że

$$\forall C\in Ob(\mathcal{C}),\ h\circ\varphi_C = f_C.$$

$$\begin{tikzcd} & Y \\ & \varinjlim F \arrow[u, dashed, "h"'] \\ F(C) \arrow[uur, bend left, "f_C"] \arrow[ur, "\varphi_C"'] & \end{tikzcd}$$

FAKT 5 Kogranica funktora, o ile istnieje, jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

Dowód. Kostożki nad F tworzą kategorię, a kogranica jest jej obiektem początkowym. □

FAKT 6 Niech $\{X_n\}_{n\in\omega}$ będzie łańcuchem zbiorów, tzn. $X_n\subseteq X_{n+1}$ dla $n\in\omega$. Niech $\vec{x}$ będzie ciągiem w kategorii zbiorów odpowiadającym temu łańcuchowi. Wówczas $\varinjlim \vec{x} = \bigcup_{n\in\omega} X_n$, wraz z odwzorowaniami tożsamościowymi $\varphi_n: X_n\longrightarrow\bigcup_{k\in\omega}X_k$, $\varphi_n(x)=x$ dla $x\in X_n$.

Dowód. Ustalmy kostożek $\left(Y, (f_n)_{n\in\omega}\right)$ nad $\vec{x}$. To oznacza, że $f_n: X_n\longrightarrow Y$ oraz

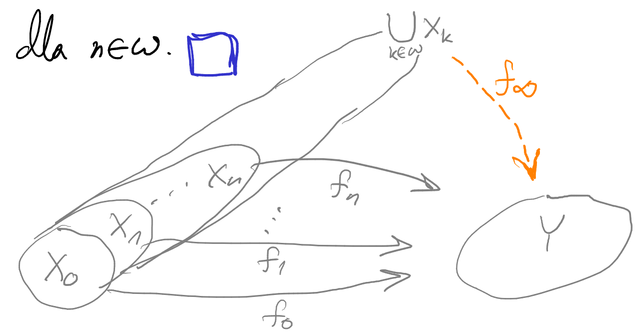
$$n\leq m \Longrightarrow f_n = f_m\circ x_n^m.$$

Z kolei $x_n^m = \subseteq_{X_n}^{X_m}$, zatem równość $f_n = f_m\circ x_n^m$ oznacza $f_n = f_m|X_n$.

$x_n^m(p) = p$ dla $p\in X_n$.
$f_n(p) = f_m\left(x_n^m(p)\right) = f_m(p)$ dla $p\in X_n$,
czyli $f_n = f_m|X_n$.

Z tego wynika, że funkcje f_n są parami zgodne, a więc $f_\infty := \bigcup_{n\in\omega} f_n$ jest funkcją. To daje jedyne odwzorowanie $f_\infty:\bigcup_{n\in\omega}X_n\longrightarrow Y$ spełniające

$$f_\infty\circ\varphi_n = f_\infty|X_n = f_n \quad \text{dla } n\in\omega. \ \square$$



UWAGA. Jeśli $\{X_n\}_{n\in\omega}$ jest łańcuchem struktur algebraicznych (np. grup, pierścieni, przestrzeni wektorowych, itp.), to jego suma $\bigcup_{k\in\omega}X_k$ jest kogranicą w odpowiedniej kategorii z homomorfizmami jako strzałkami.

PRZYKŁAD 8 Niech $\mathcal{G}rp$ oznacza kategorię grup, strzałkami są wszystkie homomorfizmy.
Niech $\vec{z} : \omega \longrightarrow \mathcal{G}rp$ będzie dane poprzez warunki

$$Z_n := (\mathbb{Z}, +) \quad \text{oraz} \quad z_n^{n+1} := e_2,$$

gdzie $e_2(k) := 2k$ dla $k \in \mathbb{Z}$.
Wówczas

$$\varinjlim \vec{Z} \approx \left\{ \frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \leqslant (\mathbb{Q}, +).$$

Mamy przy tym $\varphi_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \varinjlim \vec{z}$, $\varphi_n(k) = \frac{k}{2^n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

PRZYKŁAD 9 Niech $\mathcal{X} = (X_s)_{s \in S}$ będzie indeksowaną rodziną obiektów kategorii $\mathfrak{K}$.
Traktując S jako kategorię dyskretną, $\mathcal{X}$ staje się funktorem.
Mamy wówczas

$$\varinjlim \mathcal{X} = \coprod \mathcal{X}.$$

PRZESTRZENIE METRYCZNE

Przypomnijmy, że metryka na X to funkcja $\varrho : X^2 \longrightarrow [0, +\infty)$ spełniająca

(M0) $\quad \varrho(x,y) = 0 \iff x = y$;

(M1) $\quad \varrho(x,y) = \varrho(y,x)$;

(M2) $\quad \varrho(x,z) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho(y,z)$

dla $x,y,z \in X$. Parę (X, ϱ) nazywamy przestrzenią metryczną.

Niech (X, ϱ_X), (Y, ϱ_Y) będą przestrzeniami metrycznymi.
Odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy L-lipschitzowskim, jeśli spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L \geqslant 0$, tzn.
(w skrócie: L-lip)

$$(\forall x_1, x_2 \in X) \quad \varrho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant L \cdot \varrho(x_1, x_2).$$

Odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy zanurzeniem (izometrycznym), jeśli

$$(\forall x_1, x_2 \in X) \quad \varrho_Y(f(x_1), f(x_2)) = \varrho(x_1, x_2).$$

Piszemy wtedy $f : (X, \varrho_X) \hookrightarrow (Y, \varrho_Y)$.
Odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ jest izometrią, jeśli jest zanurzeniem oraz bijekcją.

Dla odwzorowania $f : X \longrightarrow Y$ definiujemy

$$\operatorname{Lip}(f) := \inf \{ L \geqslant 0 : f \text{ jest } L\text{-lip.} \},$$

przy czym przyjmujemy $\operatorname{Lip}(f) = \infty$, jeśli f nie jest lipschitzowskie.

Zauważmy, że
$$\mathrm{Lip}(f) = \sup\left\{ \frac{\varrho_Y(f(x_1), f(x_2))}{\varrho_X(x_1, x_2)} : x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \right\},$$
pod warunkiem, że X zawiera co najmniej 2 punkty.

Istotnie, jeśli $\varrho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant L\varrho_X(x_1, x_2)$ dla $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, to $L \geqslant \frac{\varrho_Y(f(x_1), f(x_2))}{\varrho_X(x_1, x_2)}$. Ponadto $(\forall x_1, x_2 \in X)\quad \varrho_Y(x_1, x_2) \leqslant \mathrm{Lip}(f)\,\varrho_X(x_1, x_2)$.

Zauważmy, że $\mathrm{Lip}(f) = 0 \iff f$ jest stałe.

FAKT 7 Niech X, Y, Z będą przestrzeniami metrycznymi, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Wówczas $\mathrm{Lip}(g \circ f) \leqslant \mathrm{Lip}(g) \cdot \mathrm{Lip}(f)$.

DOWÓD. Dla $x_1, x_2 \in X$ mamy
$$\varrho_Z((g\circ f)(x_1), (g\circ f)(x_2)) = \varrho_Z(g(f(x_1)), g(f(x_2))) \leqslant \mathrm{Lip}(g) \cdot \varrho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{Lip}(g) \cdot \mathrm{Lip}(f) \cdot \varrho_X(x_1, x_2). \quad \square$$

DEF. Przez $\mathbf{Met}_1$ będziemy oznaczać kategorię przestrzeni metrycznych z odwzorowaniami 1-lip.

Zauważmy, że izomorfizmy w $\mathbf{Met}_1$ to izometrie.

Istotnie, każda izometria jest izomorfizmem w $\mathbf{Met}_1$, bo jej odwrotność jest izometrią.
Z kolei, jeśli $h: X \to Y$ jest izomorfizmem w $\mathbf{Met}_1$, to istnieje $g: Y \to X$ taki, że $g \circ h = \mathrm{id}_X$, $h \circ g = \mathrm{id}_Y$, a więc $g = h^{-1}$ (odwzorowanie odwrotne do h).
Ponadto, h oraz h^{-1} są 1-lip, a więc
$$(\forall x_1, x_2 \in X) \quad \varrho_Y(h(x_1), h(x_2)) \leqslant \varrho_X(x_1, x_2) = \varrho_X(h^{-1}(h(x_1)), h^{-1}(h(x_2))) \leqslant$$
$$\leqslant \varrho_Y(h(x_1), h(x_2)).$$
Stąd $(\forall x_1, x_2 \in X) \quad \varrho_Y(h(x_1), h(x_2)) = \varrho_X(x_1, x_2)$.

DEF. Przez $\mathbf{CMet}_1$ będziemy podkategorię pełną kategorii $\mathbf{Met}_1$, złożoną z wszystkich przestrzeni metrycznych zupełnych.

FAKT 8 Niech $\vec{\mathcal{X}} = \{X_n\}_{n\in\omega}$ będzie łańcuchem przestrzeni metrycznych zupełnych. Wówczas uzupełnienie sumy $\bigcup_{n\in\omega} X_n$ jest kogranicą łańcucha $\vec{\mathcal{X}}$.

DOWÓD. Analogicznie jak w dowodzie Faktu 6, przy czym wykorzystujemy fakt, że każde odwzorowanie lipschitzowskie przedłuża się jednoznacznie na uzupełnienie. $\square$

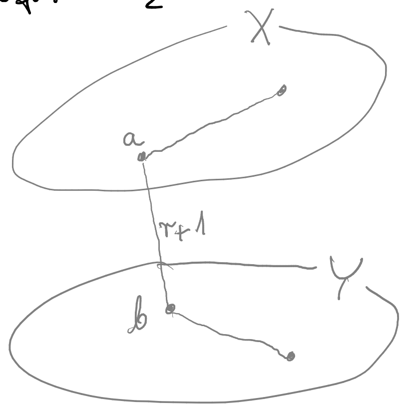
Korzystamy przy tym z poniższego faktu:

FAKT 9 Niech (X,ϱ_X), (Y,ϱ_Y) będą przestrzeniami metrycznymi zupełnymi, niech $D\subseteq X$ będzie zbiorem gęstym, niech $f: D\to Y$ będzie odwzorowaniem L-lip. Wówczas f przedłuża się jednoznacznie do odwzorowania L-lip $\tilde{f}: X\to Y$.

FAKT 10 W kategorii Met_1 nie istnieje koprodukt dwóch przestrzeni niepustych.

DOWÓD. Ustalmy przestrzenie metryczne X, Y, $a\in X$, $b\in Y$ i przypuśćmy, że $(K,\{e_X,e_Y\})$ jest koproduktem i rozważmy $a'=e_X(a)$, $b'=e_Y(b)$.
Niech $r=\varrho_K(a',b')$. Dla uproszczenia załóżmy, że $X\cap Y=\emptyset$.
Rozważmy $W=X\cup Y$ wraz z metryką zdefiniowaną ϱ_W zdefiniowaną

$$\varrho_W(p,q)=\begin{cases}\varrho_X(p,q), & p,q\in X,\\ \varrho_Y(p,q), & p,q\in Y,\\ \varrho_X(p,a)+r+1+\varrho_Y(b,q), & p\in X,\ q\in Y,\\ \varrho(p,b)+r+1+\varrho_X(a,q), & p\in Y,\ q\in X.\end{cases}$$



Mamy zanurzenia tożsamościowe $f_X: X\to W$, $f_Y: Y\to W$,
a więc mamy kostożek $(W,\{f_X,f_Y\})$.
Z definicji koproduktu mamy jedyne odwzorowanie 1-lip $h: K\to W$
spełniające $h\circ e_X=f_X$, $h\circ e_Y=f_Y$. Wówczas

$$h(a')=h(e_X(a))=f_X(a)=a,\qquad h(b')=h(e_Y(b))=f_Y(b)=b,$$

a więc $\varrho_W(h(a'),h(b'))=\varrho_W(a,b)=r+1>r=\varrho(a',b')$, sprzeczność. □

ZADANIE Pokaż, że dla każdych dwóch niepustych przestrzeni metrycznych X, Y istnieje produkt $X\times Y$ w kategorii Met_1.