TWIERDZENIE CANTORA Zbiór liczb wymiernych $\langle \mathbb{Q}, \leqslant \rangle$ jest jedynym, z dokładnością do izomorfizmu, zbiorem liniowo uporządkowanym $\langle X, \leqslant \rangle$ spełniającym warunki:

(Q0) X jest przeliczalny;

(Q1) $\forall a,b \in X \ \big(a < b \implies \exists x \in X \ (a < x < b)\big)$;

(Q2) $\forall c \in X \ \exists x_0, x_1 \in X \ (x_0 < c < x_1)$.

Przypomnienie z poprzedniego wykładu: Zbiór $\langle X, \leqslant \rangle$ spełnia warunek (E), jeśli

$$\underset{\substack{\text{skończone}\\ \text{liniowo uporządkowane}}}{\forall A \subseteq B} \qquad \forall e: A \underset{\text{zanurzenie}}{\hookrightarrow} X \quad \exists f: B \underset{\text{zanurzenie}}{\hookrightarrow} X, \quad f|A = e.$$

Oznaczmy przez (E_1) warunek powstały z (E) poprzez zamianę B na $A \cup \{p\}$.

FAKT 1 Dla zbioru liniowo uporządkowanego X następujące warunki są równoważne.

(a) X spełnia (Q1) i (Q2).

(b) X spełnia (E_1).

(c) X spełnia (E).

DOWÓD. (a) $\Rightarrow$ (b) Ustalmy $A \subseteq A \cup \{p\}$ skończone, oraz zanurzenie $e: A \hookrightarrow X$. Możemy założyć, że $p \notin A$. Niech $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, gdzie $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Mamy następujące przypadki:

1° $p < a_1$. Wówczas (Q2) $\Rightarrow \exists q < e(a_1)$, zatem możemy przyjąć $f(p) = q$.

2° $a_n < p$. Tak samo, (Q2) $\Rightarrow \exists q > e(a_n)$, a więc $f(p) = q$ będzie dobre.

3° $(\exists i)\ a_i < p < a_{i+1}$. Wówczas (Q1) $\Rightarrow (\exists q)\ e(a_i) < q < e(a_{i+1})$, a więc możemy przyjąć $f(p) = q$.

Ostatecznie, we wszystkich przypadkach f daje przedłużenie e do zanurzenia $A \cup \{p\} \hookrightarrow X$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Indukcja. Ustalmy $B \supseteq A$ i niech $B \setminus A = \{p_1, \dots, p_k\}$. Ustalmy $e: A \hookrightarrow X$. Zastosujemy indukcję względem k. Jeśli $k = 1$, to wykorzystujemy (E_1). Załóżmy, że $k > 1$.

Niech $B' = B \setminus \{p_k\}$. Z założenia indukcyjnego, istnieje zanurzenie $f': B' \hookrightarrow X$ takie, że $f'|A = e$. Mamy $B' = B \cup \{p_k\}$, zatem z (E_1) dostajemy zanurzenie $f: B \hookrightarrow X$ przedłużające f'. W szczególności, $f|A = f'|A = e$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Pokażemy najpierw (Q1). Ustalmy $a < b$ w X.

Niech $A = \{0, 2\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, ze zwykłym porządkiem.

Niech $e: A \hookrightarrow X$ będzie dane wzorem $e(0) = a$, $e(2) = b$.

(E) $\implies \exists f: B \hookrightarrow X$, $f|A = e$. Wówczas

$$f(0) = e(0) = a < f(1) < b = e(2) = f(2).$$

Pozostaje pokazać (Q2). Ustalmy $c \in X$. Niech $A = \{1\} \subseteq \{0,1,2\} = B$, ze zwykłym porządkiem. Niech $e : A \hookrightarrow X$ będzie dane wzorem $e(1) = c$.
(E) $\Longrightarrow$ $\exists f : B \hookrightarrow X$, $f|A = e$. Wówczas

$$f(0) < f(1) = e(1) = c < f(2).$$

To kończy dowód. $\blacksquare$

GRAF LOSOWY

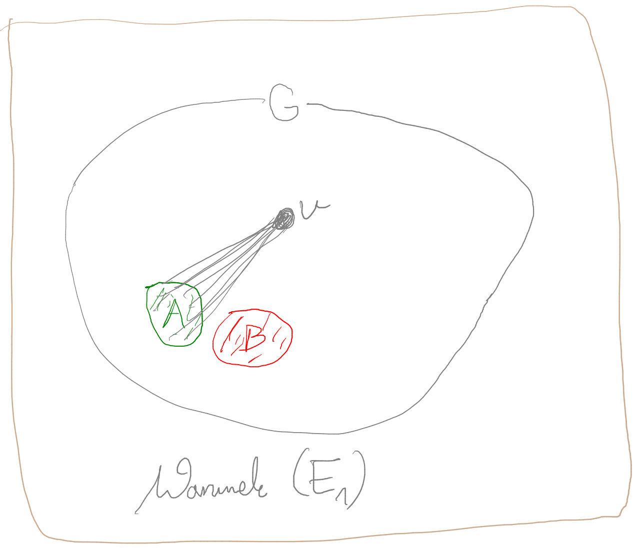
Rozważamy teraz kategorię grafów prostych nieskierowanych. Przypomnijmy, że graf G nazywamy losowym, jeśli dla każdych podzbiorów skończonych $A, B \subseteq G$ takich, że $A \cap B = \emptyset$, istnieje $v \in G \setminus (A \cup B)$ spełniający

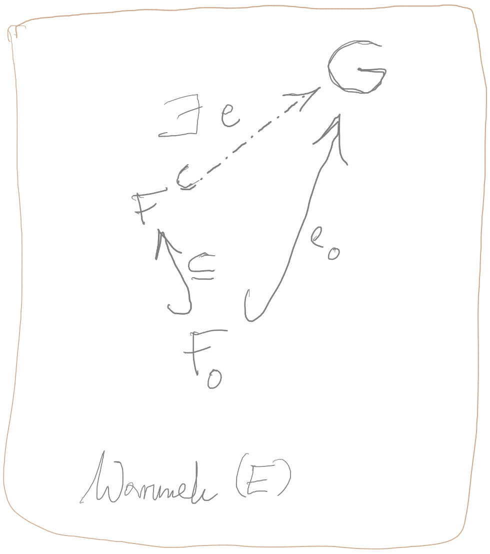
$$\forall a \in A \ (a \sim v) \quad \text{oraz} \quad \forall b \in B \ (b \not\sim v),$$

gdzie $\sim$ oznacza relację krawędziową w G.

Oznaczmy powyższy warunek przez (E_1).

DOWÓD. Powiemy, że graf G spełnia warunek (E), jeśli dla każdego grafu skończonego F, podgrafu indukowanego $F_0 \subseteq F$, każde zanurzenie $e_0 : F_0 \hookrightarrow G$ przedłuża się do zanurzenia $e : F \hookrightarrow G$ (tzn. $e|F_0 = e_0$).

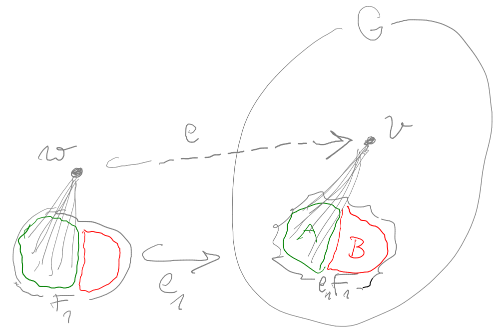




FAKT 2 Dla każdego grafu G, warunki (E_1) i (E) są równoważne.

DOWÓD. $(E_1) \Longrightarrow (E)$. Ustalmy $F_0 \leq F$ (podgraf indukowany), skończone, oraz zanurzenie $e_0 : F_0 \hookrightarrow G$.
Zastosujemy indukcję względem $k := |F \setminus F_0|$. Jeśli $k = 0$, to nie ma co dowodzić.
Załóżmy, że e_0 jest przedłużalne do zanurzenia $e : F \hookrightarrow G$ o ile $|F \setminus F_0| < k$.
Załóżmy, że $k > 0$ i ustalmy $w \in F \setminus F_0$.

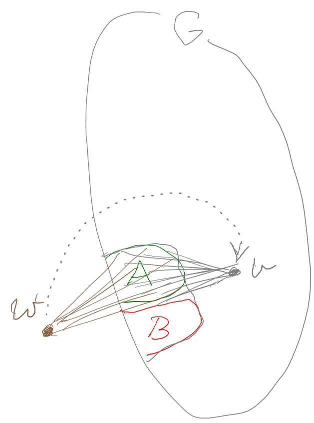
Niech $F_1 = F \setminus \{w\}$. Wówczas $F_0 \leq F_1$ oraz $|F_1 \setminus F_0| = k-1$.
Z założenia indukcyjnego, istnieje zanurzenie $e_1 : F_1 \hookrightarrow G$ takie, że $e_1|F_1 = e_0$.
Mamy teraz $F_1 \leq F_1 \cup \{w\} = F$ oraz zanurzenie $e_1 : F_1 \hookrightarrow G$.
Niech
$$A_1 = \{x \in F_1 : w \sim x\},$$
$$B_1 = \{x \in F_1 : w \not\sim x\}.$$



Wówczas $\{A_1, B_1\}$ jest rozbiciem zbioru F_1,
zatem $\{e_1[A_1], e_1[B_1]\}$ jest rozbiciem $e_1[F_1]$.
$$(E_1) \Longrightarrow \exists v \in G \setminus e_1[F_1]\ \forall a \in e_1[A_1]\ (v \sim a)$$
$$\text{oraz}\ \forall b \in e_1[B_1]\ (v \not\sim b).$$

Przyjmując $e(w) = v$ oraz $e|F_1 = e_1$, dostajemy zanurzenie $e : F \hookrightarrow G$ przedłużające e_1, a zatem także e_0.

$(E) \Longrightarrow (E_1)$ Ustalmy zbiory skończone rozłączne $A, B \subseteq G$. Niech $F_0 = A \cup B$ i rozważmy F_0 jako podgraf indukowany grafu G. Wówczas inkluzja $e_0 : F_0 \overset{\subseteq}{\hookrightarrow} G$ jest zanurzeniem. Niech $F = F_0 \cup \{w\}$, gdzie $w \notin F_0$ oraz
$$\forall a \in A\ (w \sim a) \quad \text{i} \quad \forall b \in B\ (w \not\sim b).$$
$$(E) \Longrightarrow \exists e : F \hookrightarrow G, \quad e|F_0 = e_0.$$
Wówczas $v := e(w)$ spełnia
$$\forall a \in A\ (v \sim a) \quad \text{i} \quad \forall b \in B\ (w \not\sim b).$$

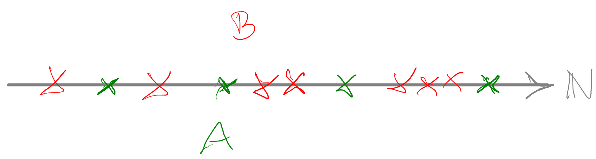


To kończy dowód. $\blacksquare$

TWIERDZENIE RADO Niech $\sim$ będzie relacją krawędziową na $\mathbb{N}$ zdefiniowaną warunkiem $k < n \Rightarrow (k \sim n \Leftrightarrow n$ ma jedynkę na k-tym miejscu w swoim rozwinięciu binarnym$)$.
Wówczas $\langle \mathbb{N}, \sim \rangle$ jest jedynym, z dokładnością do izomorfizmu, grafem losowym przeliczalnym.

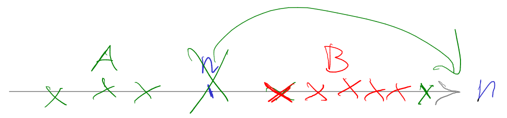
$$n = \sum_{i=0}^{\log n + 1} \varepsilon_i 2^i, \quad \varepsilon_i \in \{0,1\}$$
$$k < n \Rightarrow (k \sim n \Leftrightarrow \varepsilon_k = 1)$$

Dowód. Pokażemy, że $\langle \mathbb{N}, \sim \rangle$ jest grafem losowym, tzn. spełnia (E_1).
Ustalmy zbiory skończone rozłączne $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Powiększając zbiór A w razie potrzeby, możemy założyć, że $\max A > \max B$.
Niech $n = \sum_{a \in A} 2^a$. Wówczas $a \sim n$ dla $a \in A$.



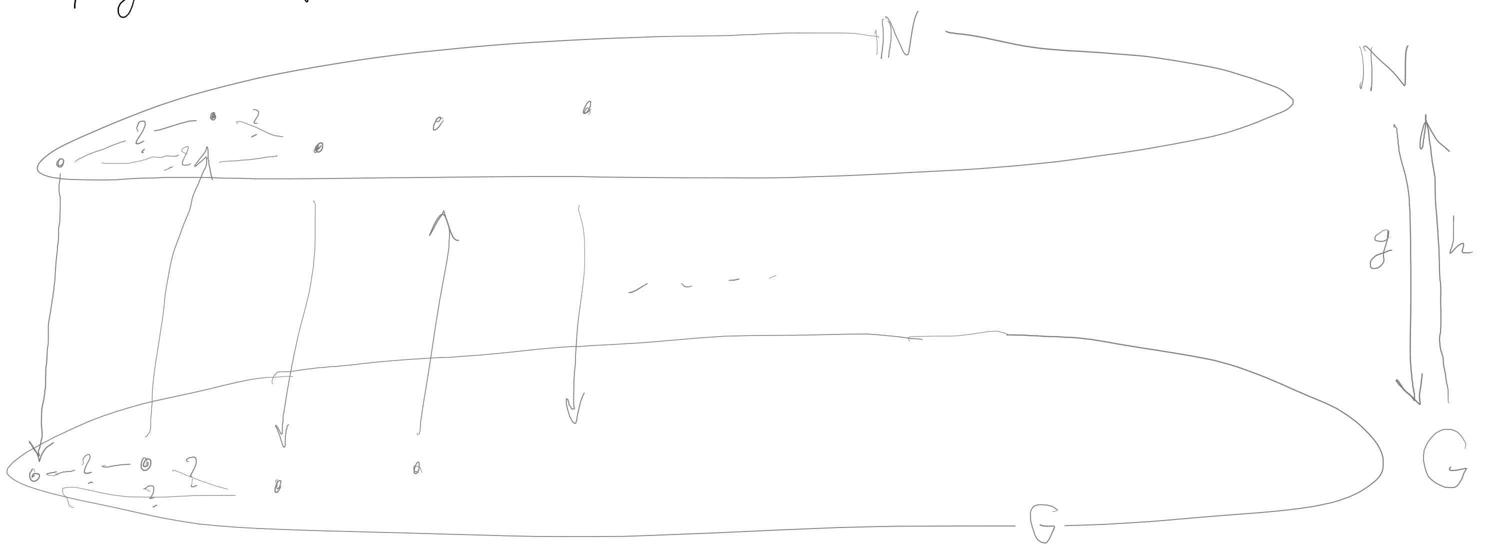
Ustalmy $b \in B$. Skoro $B \cap A = \emptyset$, to n ma cyfrę zero na b-tym miejscu w swoim rozwinięciu binarnym. Ponadto $n > b$, ponieważ $a := \max A > b$, a zatem $n \geq 2^a > a > b$.

Tak więc $\langle \mathbb{N}, \sim \rangle$ jest przeliczalnym grafem losowym.



Pozostaje pokazać jedyność, z dokładnością do izomorfizmu.

Ustalmy przeliczalny graf losowy G. Stosując back-and-forth (tam i z powrotem), dostajemy izomorfizm $\mathbb{N} \sim G$.



$g \circ h = id_G$,
$h \circ g = id_{\mathbb{N}}$.

To kończy (trochę szkicowy) dowód. $\blacksquare$

FAKT 3 Niech G będzie grafem losowym. Wówczas:

(1) Jeśli $G = G_0 \cup G_1$, to G_0 lub G_1 są losowe (jako podgrafy indukowane).

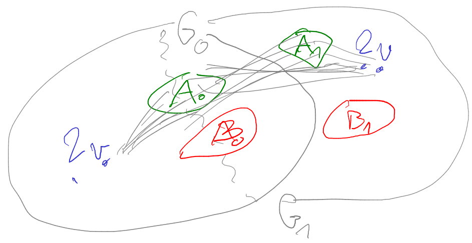
(2) Jeśli $S \subseteq G$ jest skończony, to $G \setminus S$ jest grafem losowym.

Dowód. Ad (1). Przypuśćmy, że G_0, G_1 nie są losowe. Ustalmy zbiory skończone $A_0, B_0 \subseteq G_0$, $A_1, B_1 \subseteq G_1$ takie, że $A_i \cap B_i = \emptyset$ dla $i = 0,1$ oraz

$$\neg \exists v_0 \in G_0 \Big(\forall a \in A_0 (v_0 \sim a) \text{ i } \forall b \in B_0 (v_0 \not\sim b)\Big)$$

oraz

$$\neg \exists v_1 \in G_1 \Big(\forall a \in A_1 (v_1 \sim a) \text{ i } \forall b \in B_1 (v_1 \not\sim b)\Big).$$



Możemy założyć, że $A_1 \cup B_1 \subseteq G_1 \setminus G_0$, bo $G_1 \setminus G_0$ również nie jest losowy. Tak więc $A_0 \cup A_1$ oraz $B_0 \cup B_1$ są rozłączne. Skoro G jest losowy, istnieje $v \in G$ połączony z wszystkimi elementami zbioru $A_0 \cup A_1$ oraz z żadnym elementem zbioru $B_0 \cup B_1$. To daje sprzeczność, bo $v \in G_0$ lub $v \in G_1$.

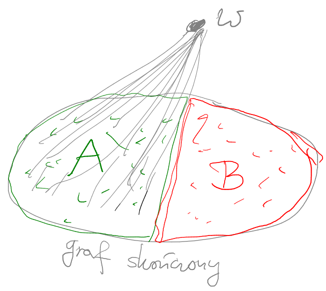
Ad (2). Graf losowy musi być nieskończony, zatem (2) wynika z (1). $\blacksquare$

Uzasadnienie losowości. Rozważmy proces losowy budujący łańcuch grafów skończonych

$$G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n \leq \dots$$

takich, że $G_n \setminus G_{n-1} = \{v_n\}$, $G_0 = \{v_0\}$, oraz
$\forall n \in \mathbb{N}^+$ wierzchołek v_n jest połączony losowo z wierzchołkami grafu G_{n-1}.
Formalnie, $|G_{n-1}| = n$ i rozważamy prawdopodobieństwo jednostajne na $\mathcal{P}(G_{n-1})$.
To znaczy, każdy $A \in \mathcal{P}(G_{n-1})$ ma prawdopodobieństwo 2^{-n}.
Każdy $A \in \mathcal{P}(G_{n-1})$ odpowiada rozszerzeniu $G_{n-1} \leq G_{n-1} \cup \{w\}$, gdzie

$$\forall x \in G_{n-1} \left(x \sim w \iff x \in A \right).$$

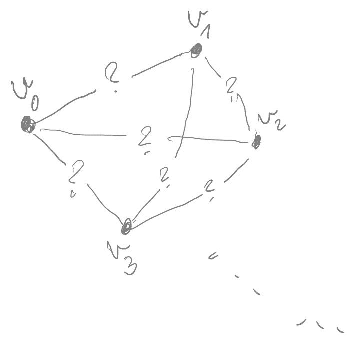


W wyniku powyższego procesu otrzymujemy graf przeliczalny

$$G_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n .$$

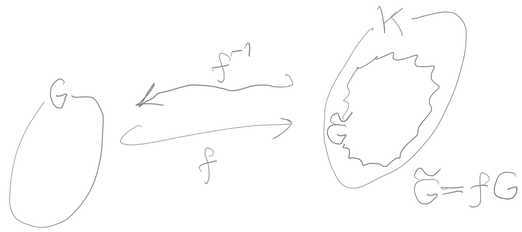
FAKT 4 (Erdős – Renyi) Przy powyższych założeniach, z prawdopodobieństwem 1 graf G_∞ jest losowy.

Dowód — zadanie domowe.



LEMAT 1 (WŁASNOŚĆ AMALGAMACJI) Niech G, K, L będą grafami (skończonymi) i niech $f : G \hookrightarrow K$, $g : G \hookrightarrow L$ będą zanurzeniami. Wówczas istnieje graf (skończony) M oraz zanurzenia $f' : K \hookrightarrow M$, $g' : L \hookrightarrow M$ takie, że $f' \circ f = g' \circ g$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, hook, "g"'] & K \arrow[d, hook, dashed, "f'"] \\ L \arrow[r, hook, dashed, "g'"'] & M \end{tikzcd}$$



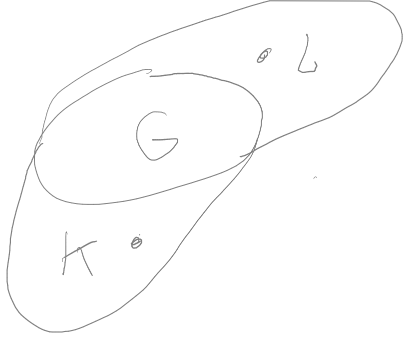
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook, "f"] \arrow[rr, bend right, hook, "\subseteq"'] & K \arrow[r, hook, "\tilde{f}"] & \tilde{K} \end{tikzcd}$$

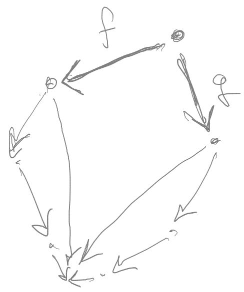
$\tilde{K} = G \cup (K \setminus fG)$

$v \in K \setminus fG$, $w \in G$

$v \sim w \overset{df}{\iff} v \sim f(w)$

Zastępując f na odpowiednie złożenie $\tilde{f} \circ f$, możemy założyć, że f jest inkluzją $G \subseteq K$, a więc $G \leq K$. Podobnie $G \leq L$.
Możemy też założyć, że $K \cap L = G$, w razie



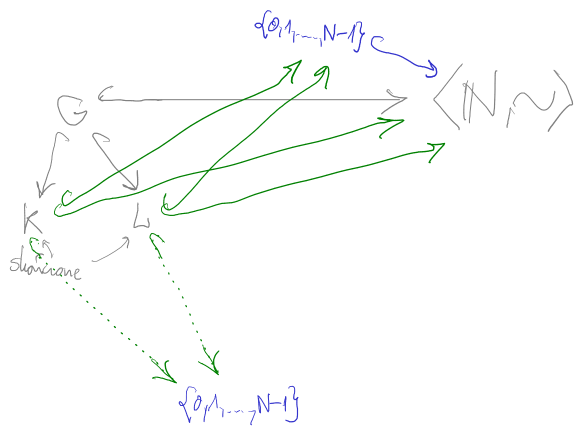


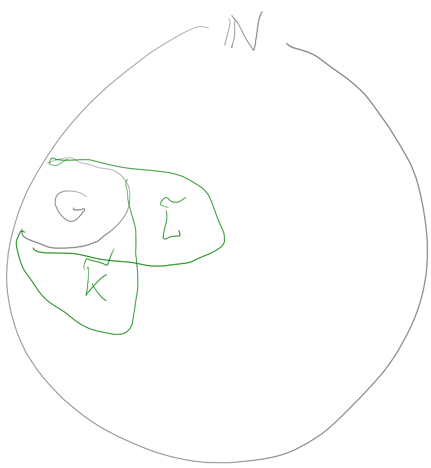
potrzeby zamieniając $L \setminus G$ na zbiór rozłączny z K, zachowując takie same położenia. Wówczas $K \cup L$ jest grafem (nie musimy dodawać nowych krawędzi) takim, że $G \leqslant K \cup L$. Ponadto, $K \leqslant K \cup L$, $L \leqslant K \cup L$, zatem inkluzje $f' : K \hookrightarrow K \cup L$, $g' : L \hookrightarrow K \cup L$ dają amalgamację f i g, tzn. $f' \circ f = g' \circ g$. ■

Zanurzenie $f : X \hookrightarrow Y$ możemy nazwać kanonicznym, jeśli $X \subseteq Y$ oraz $f(x) = x$ dla $x \in X$. Powyższy dowód upraszcza się bardzo, zauważając, że dla każdego zanurzenia $f : X \hookrightarrow Y$ istnieje izomorfizm $h : Y \xrightarrow{\cong} \tilde{Y}$ taki, że $h \circ f$ jest kanoniczne.

FAKT 5. Niech G będzie losowym. Wówczas każdy graf przeliczalny zanurza się w G.

Dowód. Ustalmy graf przeliczalny $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, gdzie $X_0 = \emptyset$, $|X_{n+1} \setminus X_n| \leqslant 1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Mamy zanurzenie $e_0 : X_0 \hookrightarrow G$. Mając dane zanurzenie $e_n : X_n \hookrightarrow G$ takie, że $\forall k < n,\ e_n|X_k = e_k$, korzystając z (E) dostajemy zanurzenie $e_{n+1} : X_{n+1} \hookrightarrow G$ takie, że $e_{n+1}|X_n = e_n$.
Ostatecznie $e_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} e_n$ jest zanurzeniem grafu X w graf G. ■





Graf Rado jest przykładem struktury generycznej.