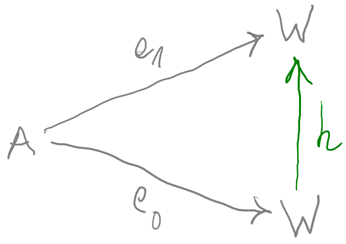
OBIEKTY JEDNORODNE

DEF. Niech $\mathcal{L}$ będzie kategorią, $\mathbb{K}$ jej podkategorią. Obiekt $W \in Ob(\mathcal{L})$ nazywamy $\mathbb{K}$-jednorodnym, jeśli $\forall A \in Ob(\mathbb{K})$ $\forall e_0, e_1 : A \to W$, $e_0, e_1 \in \mathcal{L}$, $\exists h \in Aut(W)$ taki, że $e_1 = h \circ e_0$.

Pojęcie jednorodności rozważa się zazwyczaj przy założeniu, że wszystkie strzałki są monomorfizmami. Przypadek $\mathbb{K} = \mathcal{L}$ też ma sens.



DEF. Strzałkę $e \in \mathcal{L}$ nazywamy monomorfizmem, jeśli

$$(\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}) \quad e \circ f_1 = e \circ f_2 \implies f_1 = f_2.$$

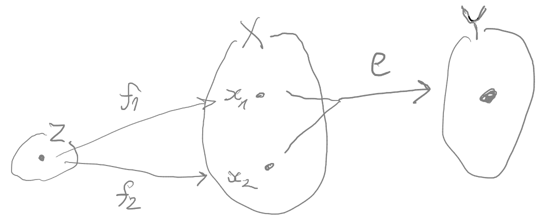
PRZYKŁAD 1 W kategorii zbiorów, monomorfizmy to odwzorowania różnowartościowe.

Istotnie, załóżmy, że $e : X \to Y$ jest 1-1. Ustalmy $f_1, f_2 : Z \to X$ i przypuśćmy, że $f_1 \neq f_2$, tzn. $f_1(z) \neq f_2(z)$ dla pewnego $z \in Z$. Wówczas $e(f_1(z)) \neq e(f_2(z))$, bo e jest 1-1. Stąd $(e \circ f_1)(z) \neq (e \circ f_2)(z)$, a więc $e \circ f_1 \neq e \circ f_2$.

Pokazaliśmy, że e jest 1-1 $\implies$ e jest monomorfizmem.

Załóżmy teraz, że e nie jest 1-1. Wybierzmy $x_1, x_2 \in X$ takie, że $x_1 \neq x_2$ oraz $e(x_1) = e(x_2)$. Niech $Z = 1 = \{0\}$, niech $f_i : Z \to X$ będą dane wzorem $f_i(0) = x_i$, $i = 1, 2$.

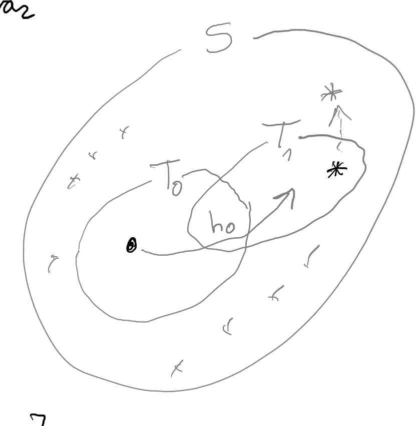
Wówczas $(e \circ f_1)(0) = e(x_1) = e(x_2) = (e \circ f_2)(0)$, a zatem $e \circ f_1 = e \circ f_2$ oraz $f_1 \neq f_2$. Pokazaliśmy, że e nie jest 1-1 $\implies$ e nie jest monomorfizmem.



PRZYKŁAD 2 Niech $\mathbf{Ens}^{1-1}$ oznacza kategorię zbiorów z odwzorowaniami 1-1. Niech $\mathbf{Fin}^{1-1}$ oznacza jej pełną podkategorię wszystkich zbiorów skończonych. Pokażemy, że każdy zbiór jest $\mathbf{Fin}^{1-1}$-jednorodny.

Ustalmy zbiór S, zbiór skończony A oraz $e_0, e_1 : A \xrightarrow{1-1} S$. Niech $T_i = e_i[A]$. Wówczas $T_0, T_1 \subseteq S$ są skończone. Niech $h_0 : T_0 \to T_1$ będzie dane wzorem $h_0 = e_1 \circ e_0^{-1}$. Wówczas h_0 jest bijekcją oraz

$$h_0 \circ e_0 = e_1 \circ e_0^{-1} \circ e_0 = e_1.$$



Załóżmy najpierw, że S jest skończony. Rozważmy maksymalne odwzorowanie $h : D_h \to S$ takie, że h jest 1-1 oraz $h|T_0 = h_0$.

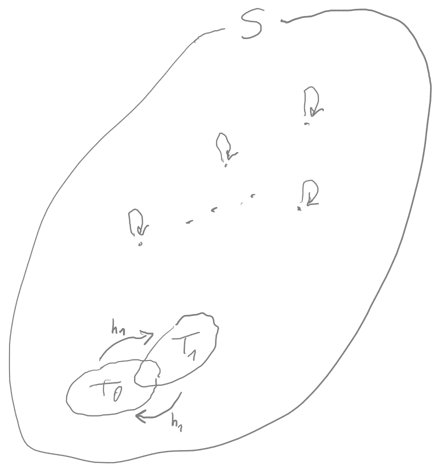
Przypuśćmy, że $D_h \neq S$ i wybierzmy $a \in S \setminus D_h$. Wówczas $h[D_h] \neq S$ zatem istnieje $b \in S \setminus h[D_h]$.

Odwzorowanie $h' = h \cup \{\langle a,b \rangle\}$ (tzn. $h'|D_h = h$, $h'(a) = b$) jest 1-1.
[Istotnie, jeśli $h'(s_0) = h'(s_1)$ oraz $s_0, s_1 \neq a$, to $h'(s_0) = h(s_0)$, $h'(s_1) = h(s_1)$, zatem $s_0 = s_1$. Jeśli $h'(s_0) = h'(a) = b$, to $s_0 = a$, bo $b \notin h[D_h]$.]
To daje sprzeczność z maksymalnością h.
Stąd $D_h = S$, a zatem $h \in Aut(S) = \mathfrak{S}_S$ (← zbiór wszystkich permutacji zbioru S)

Załóżmy teraz, że S jest zbiorem nieskończonym. Rozważmy zbiór skończony $S_1 = T_0 \cup T_1$.
Z udowodnionej części (zamieniając S ze zbiorem S_1) dostajemy $h_1 \in Aut(S_1)$ takie, że $h_1 | T_0 = h_0$. W szczególności $h_1[S_1] = S_1$.
Zdefiniujmy $h : S \to S$ wzorem

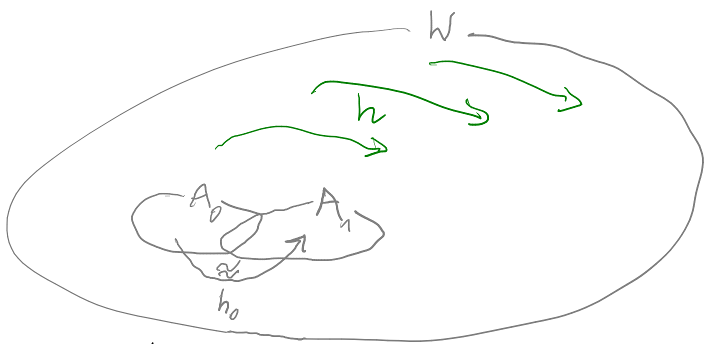
$$h | S_1 = h_1 \quad \text{oraz} \quad h(s) = s \quad \text{dla } s \in S \setminus S_1.$$

Wówczas $h \in Aut(S)$ oraz $h | T_0 = h_0$,
a więc $e_1 = h \circ e_0$.



FAKT 1 Niech $\mathcal{L}$ będzie kategorią struktur pierwszego rzędu ustalonego typu wraz z wszystkimi zanurzeniami. Niech $\mathbb{K}$ będzie podkategorią pełną złożoną ze wszystkich struktur skończonych.
Wówczas $W \in Ob(\mathcal{L})$ jest $\mathbb{K}$-jednorodny $\iff$ $\forall A_0, A_1$ podstruktur skończonych struktury W $\forall h_0 : A_0 \to A_1$ izomorfizm $\exists h \in Aut(W)$ $h | A_0 = h_0$.

DOWÓD. ($\Longrightarrow$) Mamy dwa zanurzenia
$e_0, e_1 : A_0 \longrightarrow W$,
$e_0(a) = a$ dla $a \in A_0$;
$e_1(a) = h_0(a)$ dla $a \in A_0$.



Jednorodność daje $h \in Aut(W)$ takie, że $e_1 = h \circ e_0$.
To oznacza, że $h_0(a) = e_1(a) = h(e_0(a)) = h(a)$ dla $a \in A_0$, zatem $h | A_0 = h_0$.
($\Longleftarrow$) Ustalmy zanurzenia $e_0, e_1 : A \longrightarrow W$, gdzie A jest skończone.
Weźmy $A_0 := e_0[A]$, $A_1 := e_1[A]$, $h_0 := e_1 \circ e_0^{-1} : A_0 \xrightarrow{\cong} A_1$.
Z założenia $\exists h \in Aut(W)$ taki, że $h | A_0 = h_0$, co oznacza, że
$h | A_0 = e_1 \circ e_0^{-1}$. Tak więc $(h|A_0) \circ e_0 = e_1$. Równoważnie $h \circ e_0 = e_1$. ∎

DEF. Niech $\mathbb{K}$ będzie kategorią. Mówimy, że $\mathbb{K}$ jest <u>skierowana</u>, jeśli $\forall X,Y\in Ob(\mathbb{K})\ \exists V\in Ob(\mathbb{K})$ $\mathbb{K}(X,V)\neq\emptyset$ oraz $\mathbb{K}(Y,V)\neq\emptyset$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr] & \\ & V \\ Y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Mówimy, że $\mathbb{K}$ ma <u>własność amalgamacji</u> (<u>AP</u>), jeśli $\forall Z,X,Y\in Ob(\mathbb{K})$ $\forall f:Z\to X$ $\forall g:Z\to Y$, $f,g\in\mathbb{K}$, istnieje $W\in Ob(\mathbb{K})$ oraz istnieją $f':X\to W$, $g':Y\to W$, $f',g'\in\mathbb{K}$, spełniające

$$f'\circ f = g'\circ g.$$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "g'"'] & W \end{tikzcd}$$

Powyższe własności stają się użyteczne przy założeniu, że wszystkie strzałki są monomorfizmami.

FAKT 2 Załóżmy, że $\mathbb{K}$ ma obiekt słabo początkowy A, tzn. $\mathbb{K}(A,X)\neq\emptyset$ dla każdego $X\in Ob(\mathbb{K})$.

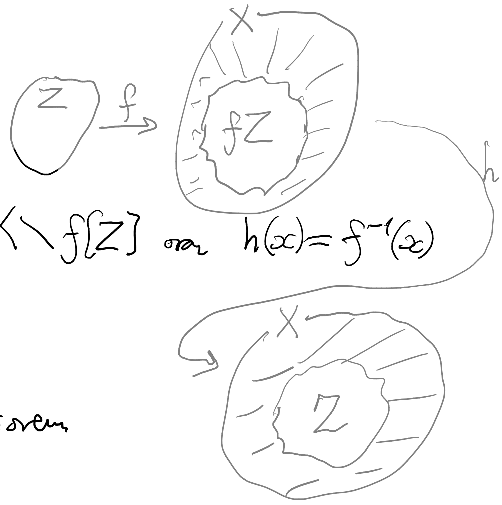
Wówczas jeśli $\mathbb{K}$ ma (AP), to $\mathbb{K}$ jest skierowana.

DOWÓD. Ustalmy $X,Y\in Ob(\mathbb{K})$. Z założenia istnieją $f:A\to X$, $g:A\to Y$. (AP) $\Rightarrow$ $\exists f':X\to V$ $\exists g':Y\to V$ $f'\circ f = g'\circ g$. ▨

PRZYKŁAD 3 Rozważmy kategorię $\mathcal{E}ns^{1-1}$. Własność amalgamacji jest dość oczywista: Mając dane $f:Z\to X$, $g:Z\to Y$, f,g różnowartościowe, możemy założyć, że $Z=X\cap Y$ oraz f,g są inkluzjami, tzn. $f(z)=z$, $g(z)=z$ dla $z\in Z$.

Istotnie, mając dane $f:Z\to X$, weźmy $\tilde{X}=(X\setminus f[Z])\cup Z$ oraz $\tilde{f}:Z\to X$, $\tilde{f}(z)=z$, $z\in Z$.

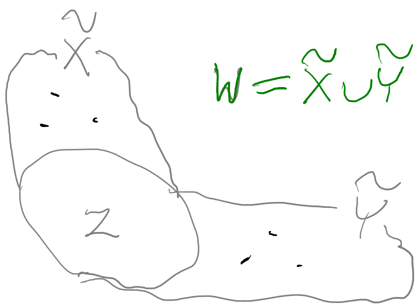
Wówczas $\tilde{f}=h\circ f$, gdzie $h(x)=x$ dla $x\in X\setminus f[Z]$ oraz $h(x)=f^{-1}(x)$ dla $x\in f[Z]$. Oczywiście h jest bijekcją.



Podobnie g można zastąpić $\tilde{g}$, w taki sam sposób.

Aby dostać $\tilde{X}\cap\tilde{Y}=Z$, wystarczy zastąpić $\tilde{Y}\setminus Z$ zbiorem rozłącznym z $\tilde{X}\setminus Z$.

Teraz $\tilde{X}\cup\tilde{Y}$ daje amalgamację, przy czym $f':\tilde{X}\to\tilde{X}\cup\tilde{Y}$, $g':\tilde{Y}\to\tilde{X}\cup\tilde{Y}$ to inkluzje.



$W=\tilde{X}\cup\tilde{Y}$

PRZYKŁAD 4 Kategoria grafów [skończonych] wraz z zanurzeniami ma własność amalgamacji.

Homomorfizm grafów $f: G_1 \to G_2$ jest zanurzeniem, jeśli jest 1–1 oraz $f[G_1]$ jest podgrafem indukowanym grafu G_2, tzn.

$$(\forall v_1, v_2 \in G_1) \quad v_1 \sim v_2 \iff f(v_1) \sim f(v_2).$$

UWAGA 1 Własność amalgamacji trywializuje się czasem, jeśli dopuszczamy „zbyt wiele" homomorfizmów. Przykładowo, jeśli $\mathfrak{K}$ jest kategorią struktur wraz z wszystkimi homomorfizmami oraz istnieje struktura trywialna niepusta K taka, że K jest obiektem końcowym w $\mathfrak{K}$, to $\mathfrak{K}$ ma (AP) oraz jest skierowana.

Istotnie, mając dane $f: Z \to X$, $g: Z \to Y$ mamy jednoznacznie wyznaczone homomorfizmy $\tilde{f}: X \to K$, $\tilde{g}: Y \to K$. Wówczas $\tilde{f} \circ f: Z \to K$, $\tilde{g} \circ g: Z \to K$, zatem z jedyności dostajemy $\tilde{f} \circ f = \tilde{g} \circ g$. To daje (AP).
Tak samo $\forall X, Y \in Ob(\mathfrak{K})\ \exists!\, \tilde{f}: X \to K\ \exists!\, \tilde{g}: Y \to K$, co daje skierowalność.

DEF. Mówimy, że podkategoria $\mathfrak{F}$ dominuje kategorię $\mathfrak{K}$, jeśli spełnia

(D1) $\forall X \in Ob(\mathfrak{K})\ \exists F \in Ob(\mathfrak{F}) \quad \mathfrak{K}(X, F) \neq \emptyset.$

$$X \to F$$

(D2) $\forall F \in Ob(\mathfrak{F})\ \forall Y \in Ob(\mathfrak{K})\ \forall f \in \mathfrak{K}(F, Y)$

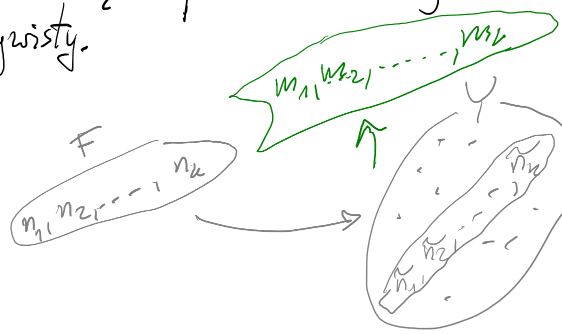
$\exists F' \in Ob(\mathfrak{F})\ \exists g \in \mathfrak{K}(Y, F'), \quad g \circ f \in \mathfrak{F}.$

Powiemy, że $\mathfrak{K}$ jest przeliczalnie dominowana, jeśli istnieje przeliczalna podkategoria dominująca $\mathfrak{K}$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & F' \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Tak jak poprzednio, własność przeliczalnego dominowania jest trywialna przy założeniu, że wszystkie strzałki są monomorfizmami.

PRZYKŁAD 5 Kategoria Fin^{1-1} jest przeliczalnie dominowana.
Istotnie niech $\mathfrak{F}$ będzie podkategorią pełną kategorii Fin^{1-1} złożoną z podzbiorów skończonych $\mathbb{N}$.
Oczywiście $\mathfrak{F}$ jest przeliczalna. Warunek (D1) jest oczywisty.
Warunek (D2) dostajemy stosując argument z Przykładu 3.



(D2)

DEF. Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie zbiorem uporządkowanym (częściowo).
Podzbiór $D \subseteq P$ nazywamy współkońcowym, jeśli
$(\forall p \in P)(\exists d \in D) \quad p \leq d.$

LEMAT 1 (RASIOWA – SIKORSKI) Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie (niepustym) zbiorem uporządkowanym, $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciągiem zbiorów współkońcowych w P. Wówczas istnieje ciąg

$$p_0 \leq p_1 \leq \ldots, \quad p_n \in P \text{ dla } n \in \mathbb{N},$$

taki, że $\quad p_n \in D_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

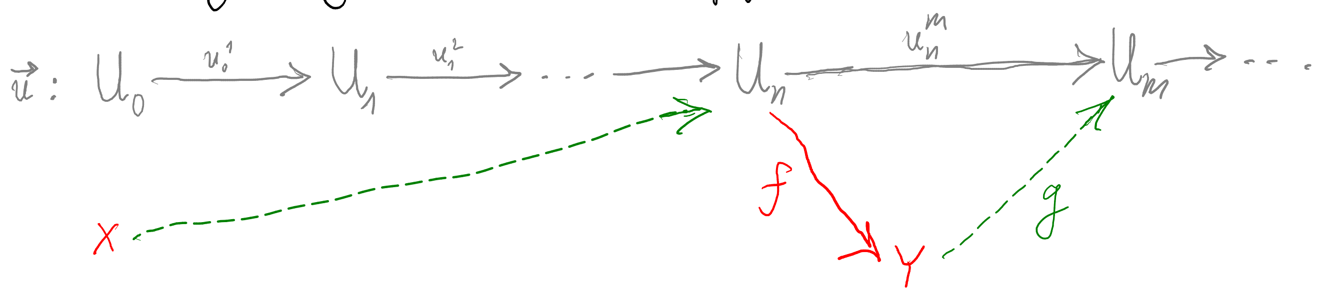
DOWÓD. Ciąg $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konstruujemy rekurencyjnie. Zaczynamy od $p_0 \in D_0$. Mając dane $p_0 \leq \ldots \leq p_{n-1}$, takie, że $p_i \in D_i$ dla $i<n$, korzystając ze współkońcowości D_n znajdujemy $p_n \in D_n$ takie, że $p_{n-1} \leq p_n$. ∎

DEF. Niech $\mathbb{K}$ będzie kategorią. Ciąg $\vec{u} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ będziemy nazywać generycznym, jeśli spełnia

(U) $\forall X \in Ob(\mathbb{K})\ \exists n \in \mathbb{N},\ \mathbb{K}(X, U_n) \neq \emptyset;$

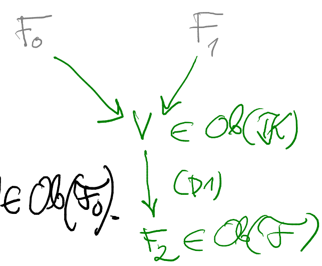
(A) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall Y \in Ob(\mathbb{K})\ \forall f : U_n \longrightarrow Y\ \exists m \geq n\ \exists g : Y \longrightarrow U_m \left(g \circ f = u_n^m \right).$

Warunek (A) będziemy nazywać własnością absorpcji.



TWIERDZENIE 1 Niech $\mathbb{K}$ będzie kategorią skierowaną, z własnością amalgamacji i przeliczalnie dominowaną. Wówczas istnieje ciąg generyczny w $\mathbb{K}$.

DOWÓD. Ustalmy (przeliczalną) podkategorię $\mathcal{F}_0$ dominującą $\mathbb{K}$.



Niech $\mathcal{F}_1$ będzie podkategorią przeliczalną zawierającą $\mathcal{F}_0$ i taką, że $\forall f : Z \longrightarrow X\ \forall g : Z \longrightarrow Y,\ f, g \in \mathcal{F}_0$

$\exists f' : X \longrightarrow W\ \exists g' : Y \longrightarrow W,\ f', g' \in \mathcal{F}_1,\ f' \circ f = g' \circ g,\ W \in Ob(\mathcal{F}_0).$

Dokładniej, $\mathcal{F}_1$ to podkategoria generowana przez $\mathcal{F}_0$ oraz wszystkie strzałki f', g' jak powyżej.

Indukcyjnie, budujemy łańcuch przeliczalnych podkategorii $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \ldots$ taki, że $\mathcal{F}_n$ ma własność amalgamacji w $\mathcal{F}_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Kategoria $\mathcal{F} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ ma własność amalgamacji, jest przeliczalna oraz dominuje $\mathbb{K}$. Ponadto $\mathcal{F}$ jest skierowana.

Rozważmy następujący zbiór uporządkowany $\mathbb{P}$. Elementami są ciągi skończone $\vec{x} : n \longrightarrow \mathcal{F}$, tzn. $X_0 \xrightarrow{x_0^1} X_1 \xrightarrow{x_1^2} \dots \xrightarrow{x_{n-2}^{n-1}} X_{n-1}$.

Relacja $\vec{x} \leqslant \vec{y}$ jest zdefiniowana jako $\mathrm{dom}(\vec{x}) \leqslant \mathrm{dom}(\vec{y})$ oraz $\vec{x} = \vec{y}\,|_{\mathrm{dom}(\vec{x})}$.

Dla $F \in Ob(\mathcal{F})$, zdefiniujmy

$$E_F := \{ \vec{x} \in \mathbb{P} : \exists i < \mathrm{dom}(\vec{x}),\ \mathcal{F}(F, X_i) \neq \emptyset \}.$$

Dla $f : F \longrightarrow F'$ w $\mathcal{F}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, zdefiniujmy

$$D_{n,f} := \{ \vec{x} \in \mathbb{P} : n < \mathrm{dom}(\vec{x}) \text{ oraz jeśli } X_n = F, \text{ to } \exists m \geqslant n\ \exists g : F' \longrightarrow X_m,\ g \circ f = x_n^m \}.$$

Każdy zbiór E_F jest współkońcowy w $\mathbb{P}$, ponieważ $\mathcal{F}$ jest skierowana.

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r] & X_n \\
& & F \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Zbiór $D_{n,f}$ jest współkońcowy w $\mathbb{P}$. Istotnie, jeśli $\mathrm{dom}(\vec{x}) > n$ oraz $X_n \neq F$, to $\vec{x} \in D_{n,f}$. Jeśli $X_n = F$ oraz $\mathrm{dom}(\vec{x}) = m > n$, to korzystając z amalgamacji znajdujemy $X_{m-1} \xrightarrow{x_{m-1}^m} X_m \in Ob(\mathcal{F})$ takie, że $g \circ f = x_n^m$ dla pewnej strzałki $g : F' \longrightarrow X_m$.

$$\begin{tikzcd}
& & & F \arrow[d, phantom, "\parallel"] & & & \\
X_0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & X_n \arrow[r] \arrow[dr, "f"] & \dots \arrow[r] & X_{m-1} \arrow[r, "x_{m-1}^m"] & X_m \\
& & & & F' \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

W ten sposób przedłużony ciąg należy do $D_{n,f}$.

Tak więc rodzina $\{E_F\}_{F \in Ob(\mathcal{F})} \cup \{D_{n,f}\}_{n \in \mathbb{N},\, f \in \mathcal{F}}$ jest przeliczalną rodziną zbiorów współkońcowych w $\mathbb{P}$. Możemy ją ponumerować tak, aby każdy z powyższych zbiorów pojawił się nieskończenie wiele razy.

Lemat 1 daje ciąg $\vec{x}_0 \leqslant \vec{x}_1 \leqslant \dots \leqslant \vec{x}_n \leqslant \dots$ taki, że $\vec{x}_n$ należy do n-tego zbioru powyższej numeracji. Niech $\vec{x} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \vec{x}_n$. Wówczas $\vec{x} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}$. Pokażemy, że $\vec{x}$ jest ciągiem generycznym w $\mathcal{F}$.

Ustalmy $F \in Ob(\mathcal{F})$. Istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\vec{x}_n = \vec{x}|n \in \mathcal{E}_F$, a więc $\mathcal{F}(F, X_k) \neq \emptyset$ dla jakiegoś $k<n$. To dowodzi (U).

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ oraz $f : X_n \longrightarrow F'$. Niech $F = X_n$. Istnieje $k > n$ takie, że $\vec{x}_k = \vec{x}|k \in \mathcal{D}_{n,f}$. Wówczas, z definicji zbioru $\mathcal{D}_{n,f}$ istnieje $m \geq n$ oraz $g : F' \longrightarrow X_m$ $(m<k)$ takie, że $g \circ f = x_n^m$. To dowodzi (A).

Ostatecznie $\vec{x}$ jest ciągiem generycznym w $\mathbb{K}$, ponieważ $\mathcal{F}$ dominuje $\mathbb{K}$. $\blacksquare$

TWIERDZENIE 2. Załóżmy, że $\mathbb{K}$ jest kategorią skierowaną, z własnością amalgamacji, przeliczalnie dominowaną. Załóżmy dalej, że $\mathfrak{L} \supseteq \mathbb{K}$ jest kategorią spełniającą:

(L0) Wszystkie strzałki $\mathfrak{L}$ są monomorfizmami.

(L1) $Ob(\mathfrak{L}) = \{ \lim \vec{x} : \vec{x}$ jest ciągiem w $\mathbb{K} \}$.

(faktoryzacja) (L2) Mając dany ciąg $\vec{x} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$, $X_\infty = \lim \vec{x} \in Ob(\mathfrak{L})$, dla każdego $A \in Ob(\mathbb{K})$, dla każdej strzałki $f : A \longrightarrow X_\infty$ w $\mathfrak{L}$, istnieje $n \in \mathbb{N}$ oraz $f' : A \longrightarrow X_n$ w $\mathbb{K}$ taka, że $f = x_n^\infty \circ f'$, gdzie $x_n^\infty : X_n \longrightarrow X_\infty$ jest częścią kogranicznego ko-stożka.

Wówczas:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_\infty \\
 & & A \arrow[u, "f'"] \arrow[urr, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

(1) Kogranica ciągu generycznego w $\mathbb{K}$ jest obiektem $\mathbb{K}$-jednorodnym.

(2) Obiekt $\mathbb{K}$-jednorodny w $\mathfrak{L}$ spełniający (U) jest jedyny, z dokładnością do izomorfizmu.

(3) Niech U będzie obiektem $\mathbb{K}$-jednorodnym w $\mathfrak{L}$. Wówczas dla każdego $X \in Ob(\mathfrak{L})$ istnieje $e : X \longrightarrow U$ w $\mathfrak{L}$.

Warunek (U) mówi, z definicji, że $(\forall X \in Ob(\mathbb{K}))\ \mathfrak{L}(X, U) \neq \emptyset$.

DOWÓD. Niech $U := \lim \vec{u}$, gdzie $\vec{u}$ jest ciągiem generycznym w $\mathbb{K}$. Pokażemy, że U jest $\mathbb{K}$-jednorodny.

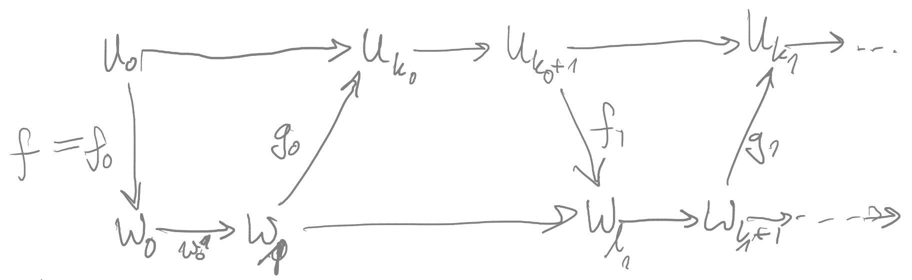
Załóżmy, że $W := \lim \vec{w}$, gdzie $\vec{w}$ jest ciągiem generycznym w $\mathbb{K}$.
Załóżmy, że mamy daną strzałkę $f_0 : U_0 \longrightarrow W_0$.
Pokażemy, że istnieje izomorfizm $h : U \longrightarrow W$ taki, że

$$w_0^\infty \circ f = h \circ u_0^\infty .$$

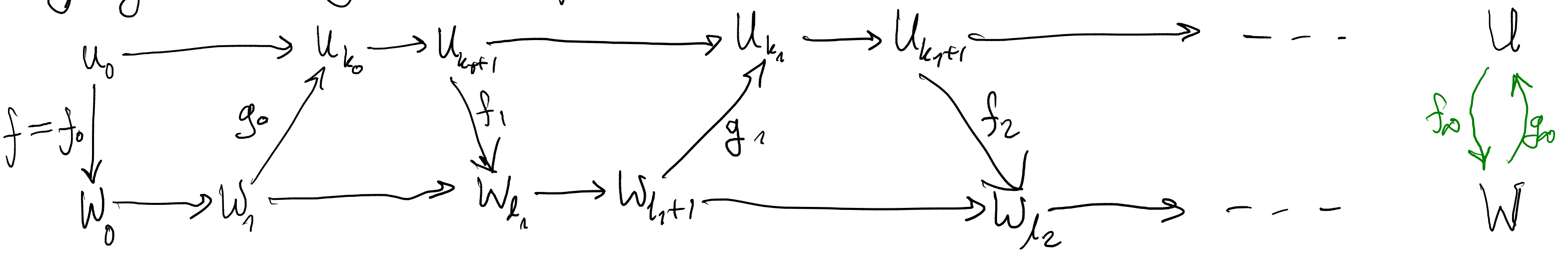
$$\begin{tikzcd}
U_0 \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \cdots \arrow[r, "u_0^\infty"] & U \arrow[d, "h", "\approx"'] \\
W_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "w_0^\infty"'] & W
\end{tikzcd}$$

Weźmy $f_0 := f$. Z własności (A) dla ciągu $\vec{u}$, znajdujemy $g_0 : W_1 \to U_{k_0}$, $g_0 \circ w_0^1 \circ f_0 = u_0^{k_0}$.

Z własności (A) dla $\vec{w}$, znajdujemy $f_1 : U_{k_0+1} \to W_{l_1}$, $w_1^{l_1} = f_1 \circ u_{k_0}^{k_0+1} \circ g_0$.



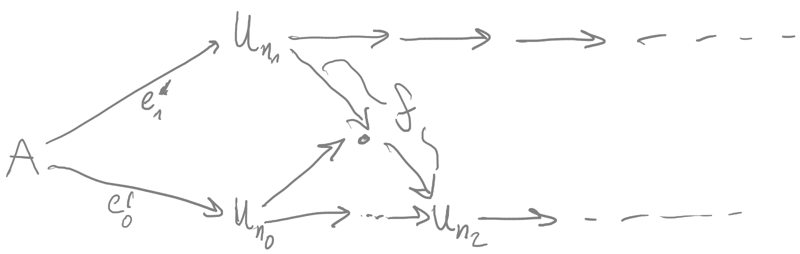
Kontynuując w ten sposób, dostajemy nieskończony diagram przemienny



Skoro $U = \varinjlim \vec{u}$, $W = \varinjlim \vec{w}$, istnieją jednoznacznie wyznaczone $f_\infty : U \to W$, $g_\infty : W \to U$ takie, że $w_{l_n}^\infty \circ f_n = f_\infty \circ u_{k_{n-1}+1}^\infty$ oraz $u_{k_n}^\infty \circ g_n = g_\infty \circ w_{l_n+1}^\infty$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponadto $g_\infty \circ f_\infty = id_U$ oraz $f_\infty \circ g_\infty = id_W$. Tak więc f_∞ jest izomorfizmem. Ponadto $w_0^\infty \circ f = f_\infty \circ u_0^\infty$, bo $f = f_0$.

Ad (1) Ustalmy $A \in Ob(\mathbb{K})$, $e_0, e_1 : A \to U$. Warunek (L2) daje $e_0 = u_{n_0}^\infty \circ e_0'$ oraz $e_1 = u_{n_1}^\infty \circ e_1'$.

Stosując (AP) oraz (A) znajdujemy $f : U_{n_1} \to U_{n_2}$, $f \circ e_1' = u_{n_0}^{n_2} \circ e_0'$.



Stosując udowodniony fakt, dostajemy izomorfizm $h : U \to U$ taki, że $u_{n_2}^\infty \circ f = h \circ u_{n_1}^\infty$. Stąd $h \circ e_1 = e_0$. To daje $\mathbb{K}$-jednorodność.

Ad (2) Załóżmy, że W jest $\mathbb{K}$-jednorodny oraz spełnia (U). Z (L1) $W = \varinjlim \vec{w}$. Z warunku (U) znajdziemy strzałkę $f : U_0 \to W_{l_0}$ dla pewnego $l_0 \in \mathbb{N}$. Z udowodnionego faktu dostajemy izomorfizm $h : U \to W$ taki, że $w_{l_0}^\infty \circ f = h \circ u_0^\infty$. Stąd $U \approx W$.

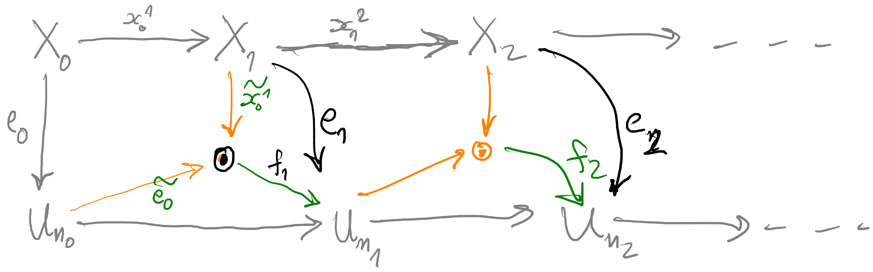
Ad (3) Załóżmy, że $X = \varinjlim \vec{x}$, gdzie $\vec{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ (warunek (L1)). Stosując (U) dla ciągu $\vec{u}$ dostajemy $e_0 : X_0 \to U_{n_0}$. Amalgamując e_0 oraz x_0^1, dostajemy $\tilde{e}_0, \tilde{x}_0^1$ takie, że $\tilde{e}_0 \circ e_0 = \tilde{x}_0^1 \circ x_0^1$. Stosując (A) dostajemy f_1 takie, że $f_1 \circ \tilde{e}_0 = u_{n_0}^{n_1}$. Niech $e_1 := f_1 \circ \tilde{x}_0^1$. Wówczas $e_1 \circ x_0^1 = u_{n_0}^{n_1} \circ e_0$.

Rekurencyjnie, budujemy

$e_m : X_m \longrightarrow U_{n_m}$

takie, że

$e_{m+1} \circ x_m^{m+1} = u_{n_m}^{n_{m+1}} \circ e_m$.



W (ko-)granicy dostajemy

$$e_\infty : X \longrightarrow U.$$

$\blacksquare$

WNIOSEK: Istnieje jedyny, z dokładnością do izomorfizmu, graf przeliczalny R, zawierający kopie wszystkich grafów skończonych oraz jednorodny ze względu na grafy skończone.

Graf nazywa się grafem Rado lub grafem losowym. (Erdős–Renyi)