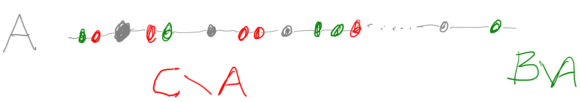
Amalgamacja liniowych porządków

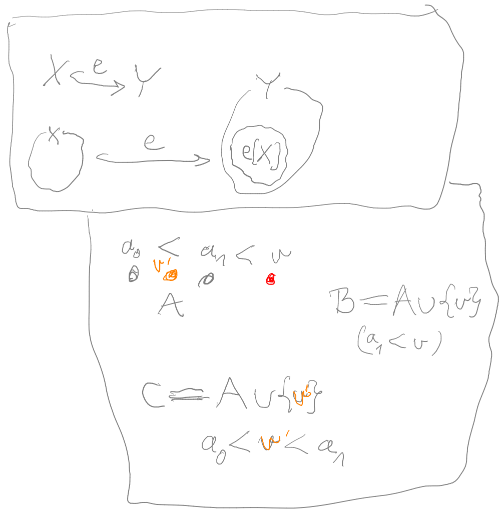
FAKT 1 Niech $f: A \hookrightarrow B$, $g: A \hookrightarrow C$ będą zanurzeniami skończonych zbiorów liniowo uporządkowanych. Wówczas istnieje skończony zbiór liniowo uporządkowany D oraz istnieją zanurzenia $f': B \hookrightarrow D$, $g': C \hookrightarrow D$ takie, że $f' \circ f = g' \circ g$.

DOWÓD Możemy założyć, że f, g są inkluzjami, tzn. $A \subseteq B$, $A \subseteq C$ oraz $f(a) = a = g(a)$ dla $a \in A$. Możemy też założyć, że $A = B \cap C$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, hook, "g"'] & B \arrow[d, hook, dashed, "f'"] \\ C \arrow[r, hook, dashed, "g'"'] & D \end{tikzcd}$$

Niech $D = B \cup C$ i niech $f': B \to D$, $g': C \to D$ będą inkluzjami, tzn. $f'(b) = b$ dla $b \in B$, $g'(c) = c$ dla $c \in C$. Wówczas istnieje (niejednoznacznie wyznaczony) liniowy porządek na D rozszerzający porządki na B, C.





Formalnie, ustalmy $b \in B$, $c \in C$. Mamy przypadki:

1. $\exists a \in A$, $b <^B a$ oraz $a <^C c$.
   Wówczas przyjmujemy $b < c$.
2. $\exists a \in A$, $c <^C a$ oraz $a <^B b$.
   Wówczas przyjmujemy $c < b$.
3. $\forall a \in A$, $a <^B b \iff a <^C c$ oraz $\forall a \in A$, $b <^B a \iff c <^C a$.
   W tym przypadku możemy przyjąć $b < c$ albo $c < b$ (dwie możliwości). ■

Powyższy fakt mówi, że skończone porządki liniowe mają własność amalgamacji.

FAKT 2 Każdy przeliczalny porządek liniowy zanurza się w $\langle \mathbb{Q}, \leqslant \rangle$.

DOWÓD. Można to wykazać, tak jak w przypadku grafów, wykorzystując własność amalgamacji.
Inny argument wykorzystuje twierdzenie Cantora. Mianowicie, mając dany przeliczalny zbiór liniowo uporządkowany $X \neq \emptyset$, definiujemy produkt leksykograficzny $X \cdot \mathbb{Q}$ jako zbiór $X \times \mathbb{Q}$ z relacją $<$ zdefiniowaną formułą

$$\langle x_0, q_0 \rangle < \langle x_1, q_1 \rangle \overset{df}{\iff} x_0 < x_1 \text{ lub } (x_0 = x_1 \text{ oraz } q_0 < q_1).$$

Łatwo sprawdzić, że jest to relacja liniowego porządku. Ponadto, $X \cdot \mathbb{Q}$ spełnia założenia twierdzenia Cantora, a więc $X \cdot \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$. Mamy zanurzenie $e: X \hookrightarrow X \cdot \mathbb{Q}$, dane wzorem $e(x) = \langle x, 0 \rangle$, co kończy dowód. ■

FAKT 3 Rozważmy $\mathbb{Z}$ jako grupę cykliczną z dodawaniem. Dla każdych zanurzeń grup $f: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $g: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ istnieją zanurzenia grup $f': \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $g': \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ spełniające $f' \circ f = g' \circ g$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, hook, "g"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, hook, dashed, "f'"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, hook, dashed, "g'"'] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

DOWÓD. Przyjmijmy $f' := g$, $g' := f$. Pozostaje pokazać, że $g \circ f = f \circ g$.

Niech $a := f(1)$. Wówczas $a \neq 0$. Ponadto dla $n \in \mathbb{N}^+$ mamy

$$f(n) = f(\overbrace{1 + \dots + 1}^{n \text{ razy}}) = \overbrace{f(1) + \dots + f(1)}^{n \text{ razy}} = n f(1) = n a.$$

Mamy też $f(-n) = -f(n)$. Tak więc

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad f(m) = m \cdot a.$$

Niech teraz $b := g(1)$. Wówczas $b \neq 0$ oraz

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad g(m) = m \cdot b.$$

Stąd dla $m \in \mathbb{Z}$ mamy $(f \circ g)(m) = f(g(m)) = f(m \cdot b) = m \cdot b \cdot a$

oraz $(g \circ f)(m) = g(f(m)) = g(m \cdot a) = m \cdot a \cdot b$,

a więc $f \circ g = g \circ f$. $\blacksquare$

FAKT 4 Każda skończenie generowana podgrupa grupy $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ jest cykliczna, a więc izomorficzna z $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ lub grupą trywialną $\{0\}$.

DOWÓD. Ustalmy $H \leq \mathbb{Q}$ generowaną przez $a_1, \dots, a_k$. Niech $m \in \mathbb{N}^+$ będzie wspólnym mianownikiem ułamków $a_1, \dots, a_k$. Wówczas $H \leq \{\frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z}\} = \frac{1}{m}\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}$. Wiadomo, że każda podgrupa grupy $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ jest izomorficzna z $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ lub $\{0\}$. $\blacksquare$

FAKT 5 Grupa $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ ma następującą własność przedłużania: Dla każdych zanurzeń $e: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $f: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ istnieje zanurzenie $g: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ takie, że $g \circ e = f$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Z} \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

DOWÓD. Niech $r := f(1)$, $a := e(1)$. Przyjmując $g(1) := \frac{r}{a}$ mamy $(g \circ e)(1) = g(e(1)) = g(a) = a \cdot \frac{r}{a} = r = f(1)$. Stąd $g \circ e = f$. $\blacksquare$

Okazuje się, że $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ jest kolejnym przykładem obiektu generycznego, dla kategorii złożonej z $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ oraz zanurzeń.

AMALGAMACJA PRZESTRZENI METRYCZNYCH

Rozważamy teraz klasę przestrzeni metrycznych wraz z zanurzeniami izometrycznymi. Przypomnijmy, że odwzorowanie

$$f:\langle X,\varrho^X\rangle \longrightarrow \langle Y,\varrho^Y\rangle$$

jest <u>zanurzeniem</u> (izometrycznym), jeśli

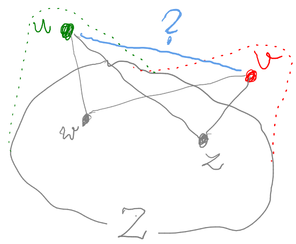
$$\forall x_0,x_1\in X,\quad \varrho^Y(f(x_0),f(x_1)) = \varrho^X(x_0,x_1).$$

Piszemy wtedy $f: X\hookrightarrow Y$.

FAKT 6 Przestrzenie metryczne skończone mają własność amalgamacji:
Mając dane zanurzenia $f:Z\hookrightarrow X$, $g:Z\hookrightarrow Y$, gdzie X, Y są skończone, istnieje przestrzeń metryczna skończona W oraz zanurzenia $f':X\hookrightarrow W$, $g':Y\hookrightarrow W$ spełniające $f'\circ f = g'\circ g$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, hook, "g"'] & X \arrow[d, hook, dashed, "f'"] \\ Y \arrow[r, hook, dashed, "g'"'] & W \end{tikzcd}$$

DOWÓD. Rozważmy najpierw przypadek $X=Z\cup\{u\}$, $Y=Z\cup\{v\}$, gdzie $v\neq u$, $u,v\notin Z$ oraz $f(z)=z=g(z)$ dla $z\in Z$. Przyjmijmy $W:=Z\cup\{u,v\}$ oraz f', g' jako funkcje tożsamościowe. Pokażemy, że $\varrho^X\cup\varrho^Y$ rozszerza się do metryki ϱ na W. Zdefiniujmy



$$\varrho(u,v):=\varrho(v,u):=\min_{z\in Z}\big(\varrho(u,z)+\varrho(z,v)\big).$$

Wówczas $\varrho(u,v)\le \varrho(u,z)+\varrho(z,v)$ dla każdego $z\in Z$.

Musimy jeszcze pokazać, że

$$\varrho(u,v)\ge|\varrho(u,z)-\varrho(z,v)| \quad \text{dla każdego } z\in Z.$$

Ustalmy $z\in Z$. Niech $w\in Z$ będzie takie, że $\varrho(u,v)=\varrho(u,w)+\varrho(w,v)$.

Pokażemy, że

$$\varrho(u,w)+\varrho(w,v)\ge|\varrho(u,z)-\varrho(z,v)|.$$

$$\boxed{|x|\le y \iff x\le y \ \text{ i } \ -x\le y}$$

Mamy

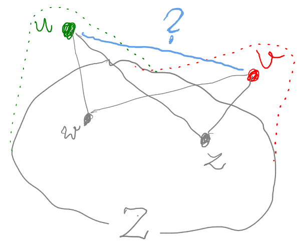
$$\varrho(u,z)-\varrho(z,v)=\varrho^X(u,z)-\varrho^Y(z,v)\le\varrho(u,w)+\varrho(w,z)-\varrho(z,v)\le$$
$$\le\varrho(u,w)+\varrho(w,v)+\varrho(v,z)-\varrho(z,v)=\varrho(u,w)+\varrho(w,v).$$

Analogicznie

$$\varrho(v,z)-\varrho(z,u)\le\varrho(v,w)+\varrho(w,u)=\varrho(u,w)+\varrho(w,v).$$

Tak więc ϱ jest metryką na $W=Z\cup\{u,v\}$.

Inna możliwość zdefiniowania $\varrho(u,v)$ to



$$\varrho(u,v) := \varrho(v,u) := \max_{z\in Z} \left|\varrho(u,z) - \varrho(z,v)\right|.$$

Nietrudno sprawdzić, że też dostajemy metrykę, pod warunkiem, że $\varrho(u,v) > 0$.

Przypadek ogólny amalgamacji f, g dostaje się przez indukcję. ■

FAKT 7. Niech $f: X \hookrightarrow Y$ będzie zanurzeniem przestrzeni metrycznych skończonych. Wówczas istnieje przestrzeń metryczna X' zawierająca X jako podprzestrzeń oraz istnieje izometria $h: Y \xrightarrow{\approx} X'$ taka, że $h\circ f$ jest inkluzją $X \subseteq X'$, tzn. $(h\circ f)(x) = x$ dla $x \in X$.

Dowód. Niech $Y \setminus f[X] = \{y_1, \dots, y_k\}$. Niech $X' = X \cup \{p_1, \dots, p_k\}$ i zdefiniujmy ϱ wzorem

$$\varrho(x_1,x_2) \stackrel{df}{=} \begin{cases} \varrho^X(x_1,x_2), & \text{jeśli } x_1,x_2 \in X;\\ \varrho^Y(y_i,y_j), & \text{jeśli } x_1 = p_i,\ x_2 = p_j,\ i,j \le k;\\ \varrho^Y(f(x_1), y_j), & \text{jeśli } x_1 \in X,\ x_2 = p_j,\ j \le k;\\ \varrho^Y(y_i, f(x_2)), & \text{jeśli } x_1 = p_i,\ x_2 \in X,\ i \le k. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że ϱ jest metryką na X' oraz $h: Y \to X'$ zdefiniowane jako $h|f[X] = f^{-1}$, $h(y_i) = p_i$ dla $i \le k$, jest izometrią spełniającą $h\circ f = id_X$. ■