Struktury jednorodne

DEF. Strukturą pierwszego rzędu (krócej: strukturą) nazywamy zbiór X wraz z ustalonym ciągiem (skończonym lub przeliczalnym) relacji lub operacji algebraicznych na X.

Relacja n-argumentowa to podzbiór X^n $(n \geq 1)$.

Operacja n-argumentowa (zwana też działaniem n-argumentowym), to odwzorowanie typu $X^n \longrightarrow X$, $n \geq 0$.

Operacja 0-argumentowa to stała.

Relacja 1-argumentowa to po prostu podzbiór zbioru X, bo $X^1 = X$.

DEF. Strukturę nazywamy relacyjną, jeśli nie żadnych działań, tylko relacje.

PRZYKŁAD 1 (a) Graf prosty to struktura z jedną relacją 2-argumentową.

Graf w sensie najogólniejszej definicji, to struktura postaci $\langle V, A, \mathrm{dom}, \mathrm{cod} \rangle$. Jest to struktura na zbiorze $X = V \cup A$. Przypominamy, że $\mathrm{dom}, \mathrm{cod} : A \longrightarrow V$. Możemy się umówić, że V, A to relacje 1-argumentowe, a odwzorowania $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}$ rozszerzyć na V przyjmując $\mathrm{dom}(v) = v = \mathrm{cod}(v)$ dla $v \in V \setminus A$.

(b) Każda kategoria mała, tzn. taka, że jej klasa obiektów jest zbiorem, mogłaby być traktowana jako struktura. Musielibyśmy jednak rozszerzyć składanie, np. dodając sztucznie nowy element „NIL", który będzie wartością $f \circ g$ dla niezgodnych strzałek.

(c) Grupa to struktura z jednym działaniem 2-argumentowym (spełniającym aksjomaty grupy).

(d) Monoid to struktura typu $\langle M, *, e \rangle$, gdzie $*$ jest działaniem 2-argumentowym łącznym, e jest stałą spełniającą $\forall x \in M,\ x * e = x = e * x$.

(e) Zbiór (liniowo) uporządkowany, to struktura z jedną relacją 2-argumentową spełniającą odpowiednie aksjomaty.

PRZYKŁAD 2 Przestrzeń metryczną $\langle X, \varrho \rangle$ można „zakodować" jako strukturę z przeliczalną nieskończoną ilością relacji 2-argumentowych. Dla $r \in \mathbb{R}$ możemy zdefiniować relację $D_r \subseteq X^2$ formułą

$$\langle x_0, x_1 \rangle \in D_r \iff \varrho(x_0, x_1) < r.$$

Zauważmy, że $D_r = \emptyset$ dla $r \leq 0$. Z drugiej strony, do opisania metryki wystarczy nam zbiór relacji $\{D_q\}_{q \in \mathbb{Q}^+}$. Istotnie, dla $x_0, x_1 \in X$ zachodzi

$$\varrho(x_0, x_1) = \inf \{ q \in \mathbb{Q}^+ : x_0 D_q x_1 \}.$$

Tak więc, struktura $\langle X, \{D_q\}_{q \in \mathbb{Q}^+} \rangle$ koduje przestrzeń metryczną $\langle X, \varrho \rangle$.

Jasne jest, że nie każda struktura postaci $\langle X, \{D_q\}_{q \in \mathbb{Q}^+} \rangle$ opisuje przestrzeń metryczną. Mianowicie, muszą być spełnione aksjomaty

(M0) $x D_q x$ dla każdego $q \in \mathbb{Q}^+$ oraz jeśli $x_0 D_q x_1$ dla każdego $q \in \mathbb{Q}^+$, to $x_0 = x_1$.

(M1) $x_0 D_q x_1 \implies x_1 D_q x_0$ dla $q \in \mathbb{Q}^+$.

(M2) $x_0 D_q x_1 \implies x_0 D_{q'} x_1$ dla $q < q'$, $q, q' \in \mathbb{Q}^+$.

(M3) $\forall x_0, x_1 \in X$ istnieje $q \in \mathbb{Q}^+$ takie, że $x_0 D_q x_1$.

(M4) $\forall x_0, x_1, x_2 \in X$ jeśli $x_0 D_q x_1$ i $x_1 D_p x_2$, to $x_0 D_{p+q} x_2$, dla każdych $p, q \in \mathbb{Q}^+$.

DEF. Podstrukturą struktury $\mathfrak{X} = \langle X, \mathfrak{S}^X \rangle$ nazywamy strukturę $\mathfrak{Y} = \langle Y, \mathfrak{S}^Y \rangle$ taką, że $Y \subseteq X$ oraz $\mathfrak{S}^Y$ jest strukturą powstałą poprzez obcięcie relacji i działań z $\mathfrak{S}^X$.

Formalnie, jeśli $\mathfrak{S}^X = \{R_i^X\}_{i\in I} \cup \{f_j^X\}_{j\in J}$, gdzie R_i^X jest relacją n_i-argumentową, f_j^X jest działaniem m_j-argumentowym, to $\mathfrak{S}^Y = \{R_i^Y\}_{i\in I} \cup \{f_j^Y\}_{j\in J}$, gdzie

$$R_i^Y = R_i^X \cap Y^{n_i} \text{ dla } i\in I \quad \text{oraz} \quad f_j^Y = f_j^X \mid Y^{m_j} \text{ dla } j\in J.$$

W szczególności, Y jest zamknięte na wszystkie działania f_j^X, $j\in J$; a także zawiera wszystkie stałe.

DEF. Homomorfizmem ze struktury $\mathfrak{X}$ w strukturę $\mathfrak{X}'$ nazywamy każde odwzorowanie $f: X \longrightarrow X'$ zachowujące wszystkie relacje i działania. Oczywiście zakładamy, że $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ są strukturami tego samego typu. Piszemy $f: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}'$.

FAKT 1 Złożenie dwóch homomorfizmów jest homomorfizmem. Identyczność jest homomorfizmem. Tak więc struktury ustalonego typu tworzą kategorię.

FAKT 2 Niech $\mathfrak{X}$ będzie strukturą, $\mathfrak{Y}$ jej podstrukturą. Wówczas inkluzja $Y \subseteq X$ wyznacza homomorfizm $e: \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ dany wzorem $e(y) = y$ dla $y\in Y$.

DEF. Niech $f: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}'$ będzie homomorfizmem struktur. Wówczas $f[\mathfrak{X}]$ jest podstrukturą struktury $\mathfrak{X}'$ którą nazywamy obrazem f. Homomorfizm $f: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}'$ nazywamy zanurzeniem, jeśli jest izomorfizmem z $\mathfrak{X}$ na $f[\mathfrak{X}]$. Piszemy wtedy $f: \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{X}'$.

Homomorfizm z Faktu 2 jest zanurzeniem, które będziemy nazywać kanonicznym.

FAKT 3 Złożenie zanurzeń jest zanurzeniem. Każdy izomorfizm jest zanurzeniem.

FAKT 4 Niech $f: \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{X}'$. Wówczas istnieje izomorfizm $h: \mathfrak{X}' \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}''$ taki, że $h\circ f$ jest zanurzeniem kanonicznym.

DEF. Strukturę $\mathfrak{A}$ nazywamy skończenie generowaną, jeśli istnieje zbiór skończony $S \subseteq A$ taki, że $\mathfrak{A}$ jest jedyną podstrukturą zawierającą S.

FAKT 5 (1) Każda struktura skończenie generowana jest przeliczalna.
(2) Każda struktura skończona jest skończenie generowana.
(3) W kategorii struktur relacyjnych, struktury skończenie generowane to struktury skończone.

Dowód. (1) wynika z tego, że język struktury (ciąg relacji i działań) jest przeliczalny, zatem każdy zbiór przeliczalny generuje strukturę przeliczalną.
(2) jest oczywiste.
(3) wynika z tego, że każdy podzbiór struktury relacyjnej jest podstrukturą.

PRZYKŁAD 2 (a) Każda skończenie generowana podgrupa grupy $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ jest cykliczna.

(b) Podgrupa grupy nieprzemiennej skończenie generowanej nie musi być skończenie generowana.

(c) Formalnie, podstruktura grupy to podzbiór zamknięty na działanie, czyli pod-półgrupa. Wynika to z tego, że język grup składa się tylko z jednego działania 2-argumentowego. Gdyby dodać działanie 1-argumentowe (branie elementu odwrotnego) oraz stałą (element neutralny), wtedy każda podstruktura byłaby podgrupą.

DEF. Niech $\mathcal{F}$ będzie klasą struktur ustalonego typu. Mówimy, że $\mathcal{F}$ ma własność amalgamacji (AP), jeśli $\forall A, \mathbb{B}_0, \mathbb{B}_1 \in \mathcal{F}$ $\forall f: A \hookrightarrow \mathbb{B}_0$ $\forall g: A \hookrightarrow \mathbb{B}_1$ $\exists \mathbb{D} \in \mathcal{F}$,

$$\exists f': \mathbb{B}_0 \hookrightarrow \mathbb{D} \ \exists g': \mathbb{B}_1 \hookrightarrow \mathbb{D}, \quad f' \circ f = g' \circ g.$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, hook, "g"'] & \mathbb{B}_0 \arrow[d, hook, "f'"] \\ \mathbb{B}_1 \arrow[r, hook, "g'"'] & \mathbb{D} \end{tikzcd}$$

FAKT 6 W powyższej definicji wystarczy zakładać, że zanurzenia f, g są kanoniczne.

DOWÓD. Ustalmy $f: A \hookrightarrow \mathbb{B}_0$, $g: A \hookrightarrow \mathbb{B}_1$. Na mocy Faktu 4 istnieją izomorfizmy $h_0: \mathbb{B}_0 \xrightarrow{\cong} \mathbb{B}_0'$, $h_1: \mathbb{B}_1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{B}_1'$ takie, że $h_0 \circ f$, $h_1 \circ g$ są zanurzeniami kanonicznymi. Stosując (AP) dla $h_0 \circ f$, $h_1 \circ g$, dostajemy zanurzenia $f': \mathbb{B}_0' \hookrightarrow \mathbb{D}$, $g': \mathbb{B}_1' \hookrightarrow \mathbb{D}$ takie, że $f' \circ h_0 \circ f = g' \circ h_1 \circ g$. Stąd, przyjmując $f'' := f' \circ h_0$, $g'' := g' \circ h_1$ mamy

$$f'' \circ f = g'' \circ g. \ \blacksquare$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, hook, "g"'] \arrow[rrd, hook, dashed, "h_0 \circ f"] \arrow[rdd, hook, dashed, "h_1 \circ g"] & \mathbb{B}_0 \arrow[rd, "h_0", "\cong"'] & \\ \mathbb{B}_1 \arrow[rd, "h_1"', "\cong"] & & \mathbb{B}_0' \arrow[d, hook, "f'"] \\ & \mathbb{B}_1' \arrow[r, hook, "g'"'] & \mathbb{D} \end{tikzcd}$$

DEF. Klasa $\mathcal{F}$ jest skierowana, jeśli

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{F} \ \exists \mathbb{B} \in \mathcal{F} \ \exists e_1, e_2, \quad e_1: A_1 \hookrightarrow \mathbb{B}, \ e_2: A_2 \hookrightarrow \mathbb{B}.$$

FAKT 7 Załóżmy, że klasa $\mathcal{F}$ posiada strukturę „trywialną" $\mathbb{O}$, tzn. $\forall X \in \mathcal{F}$ istnieje zanurzenie $\mathbb{O} \hookrightarrow X$. Jeśli ponadto $\mathcal{F}$ ma (AP), to jest skierowana.

DOWÓD. Wystarczy popatrzeć na następujący diagram:

$$\begin{tikzcd} & A_1 \arrow[rd, hook, dashed] & \\ \mathbb{O} \arrow[ru, hook] \arrow[rd, hook] & & \mathbb{B} \\ & A_2 \arrow[ru, hook, dashed] & \end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

FAKT 8 Następujące klasy są skierowane:

(1) Grafy (skończone).
(2) Zbiory liniowo uporządkowane (skończone).
(3) Przestrzenie metryczne (skończone).
(4) Grupy (skończone).

PRZYKŁAD 3 Klasa wszystkich ciał skończonych ma własność amalgamacji, ale nie jest skierowana (z powodu różnych charakterystyk).

Teoria Fraïsségo

DEF. Niech $\mathcal{F}$ będzie klasą struktur skończenie generowanych. Mówimy, że $\mathcal{F}$ jest <u>klasą Fraïsségo</u>, jeśli spełnia następujące warunki:

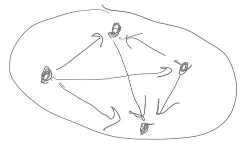
(H) $\mathcal{F}$ jest <u>dziedziczna</u>, tzn. $\forall A \in \mathcal{F}\ \forall X$ skończenie generowana, $\exists X \hookrightarrow A \implies X \in \mathcal{F}$.
Innymi słowy, $\mathcal{F}$ jest zamknięta na izomorfizmy oraz podstruktury skończenie generowane.

(D) $\mathcal{F}$ jest skierowana.

(C) $\mathcal{F}$ ma przeliczalnie wiele typów izomorficznych, tzn. $\exists$ przeliczalne $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$, $\forall A \in \mathcal{F}\ \exists A' \in \mathcal{F}_0,\ A \cong A'$.

(AP) $\mathcal{F}$ ma własność amalgamacji.

PRZYKŁAD 4 Następujące klasy są klasami Fraïsségo:



Przykład turnieju (tournament)

(1) Grafy skończone.
(2) Skończone porządki liniowe.
(3) Wszystkie grupy izomorficzne z $\{0\}$ lub $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

Klasa przestrzeni metrycznych skończonych spełnia (H), (D), (AP), ale nie spełnia (C), zatem nie jest klasą Fraïsségo. Izomorfizm przestrzeni metrycznych, to izometria bijektywna. Mamy więc kontinuum wiele parami nieizomorficznych przestrzeni metrycznych 2-elementowych.

DEF. Niech X będzie strukturą. Definiujemy

$$\mathrm{Age}(X) \overset{\mathrm{df}}{=} \{A \text{ - skończenie generowana} : \exists A \hookrightarrow X\}.$$

DEF. Strukturę X nazywamy <u>injektywną</u>, jeśli spełnia warunek

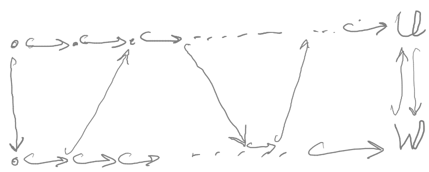
(E) $\forall A, B \in \mathrm{Age}(X)\ \big(A$ jest podstrukturą $B \implies \forall e : A \hookrightarrow X\ \exists f : B \hookrightarrow X,\ f|A = e\big)$.

TWIERDZENIE 1 (Fraïssé) Niech $\mathcal{F}$ będzie klasą Fraïsségo. Wówczas istnieje jedyna, z dokładnością do izomorfizmu, przeliczalna struktura injektywna $\mathbb{U}$ taka, że

$$\mathcal{F} = \mathrm{Age}(\mathbb{U}).$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "e"] \arrow[d, hook, "\subseteq"'] & X \\ B \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

KOMENTARZ. Strukturę $\mathbb{U}$ można skonstruować stosując (AP) oraz (C), (D).
Jedyność dowodzi się metodą „tam i z powrotem".



TWIERDZENIE 2 (Fraïssé) Niech $\mathbb{U}$ będzie strukturą injektywną przeliczalną. Wówczas $\mathrm{Age}(\mathbb{U})$ jest klasą Fraïsségo.

DOWÓD. Warunki (H), (C), (D) są oczywiste. Pozostaje sprawdzić (AP).
Ustalmy $f : A \hookrightarrow B_0$, $g : A \hookrightarrow B_1$, gdzie $A, B_0, B_1 \in \mathrm{Age}(\mathbb{U})$. Niech $e : A \hookrightarrow \mathbb{U}$.
Możemy założyć, że f, g są kanoniczne.
Z injektywności dostajemy $f' : B_0 \hookrightarrow \mathbb{U}$, $g' : B_1 \hookrightarrow \mathbb{U}$
takie, że $f' \circ f = e = g' \circ g$. Niech $D \in \mathrm{Age}(\mathbb{U})$ będzie
takie, że $f'[B_0] \cup g'[B_1] \subseteq D$. Wówczas $f' : B_0 \hookrightarrow D$, $g' : B_1 \hookrightarrow D$. $\blacksquare$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, hook, "e"] \arrow[d, hook, "f"'] \arrow[dr, hook, "g"] & & \mathbb{U} \\ B_0 \arrow[urr, hook, bend right, "f'"'] & B_1 \arrow[ur, hook, "g'"] & \end{tikzcd}$$

DEF. Strukturę $\mathbb{U}$ z Twierdzenia 1 nazywamy <u>granicą Fraïsségo</u> klasy $\mathcal{F}$ i oznaczamy $\mathrm{LIM}(\mathcal{F})$.

Jednorodność i uniwersalność

TWIERDZENIE 3 (Fraïssé) Niech $\mathbb{U} = \mathrm{FLIM}(\mathcal{F})$. Wówczas dla każdej struktury przeliczalnej $\mathbb{X}$ takiej, że $\mathrm{Age}(\mathbb{X}) \subseteq \mathcal{F}$ istnieje zanurzenie $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{U}$.

DOWÓD. (E) + indukcja matematyczna, jak na diagramie poniżej.

$$\Big(\mathbb{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{X}_n\Big)$$
$$\big(\mathbb{X}_n \in \mathcal{F},\ \text{dla } n\in\mathbb{N}\big)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X}_0 \arrow[r, hook] \arrow[rrrrrrd, bend right, "e_0"'] & \mathbb{X}_1 \arrow[r, hook] \arrow[rrrrrd, bend right, "e_1"] & \dots \arrow[r, hook] & \mathbb{X}_n \arrow[r, hook] \arrow[rrrd, bend right, "e_n"] & \mathbb{X}_{n+1} \arrow[r, hook] \arrow[rrd, bend right, "e_{n+1}"] & \dots \arrow[r, hook] & \mathbb{X} \arrow[d, "e_\infty"] \\
 & & & & & & \mathbb{U}
\end{tikzcd}$$

gdzie $e_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} e_n$. $\blacksquare$

Powyższy fakt mówi, że $\mathbb{U}$ jest uniwersalna dla klasy struktur $\mathbb{X}$ takich, że $\mathrm{Age}(\mathbb{X}) \subseteq \mathcal{F}$.

TWIERDZENIE 4 (JEDNORODNOŚĆ) (Fraïssé) Niech $\mathbb{U} = \mathrm{FLIM}(\mathcal{F})$. Wówczas $\forall \mathbb{A}\in\mathcal{F}$, $\forall e_0 : \mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{U}$ $\forall e_1 : \mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{U}$ $\exists\, h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$ (izomorfizm z $\mathbb{U}$ na $\mathbb{U}$) taki, że
$$e_1 = h \circ e_0.$$

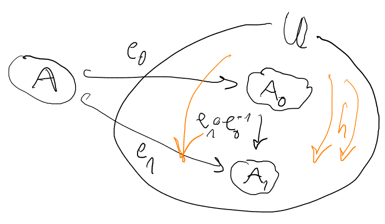
$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{U} \arrow[dd, "\approx\ h"] \\
\mathbb{A} \arrow[ur, hook, "e_0"] \arrow[dr, hook, "e_1"'] & \\
 & \mathbb{U}
\end{tikzcd}$$

KOMENTARZ. Jednorodność dowodzi się tak jak jedyność, poprzez argument „tam i z powrotem".

Jednorodność jest równoważna z następującym warunkiem:

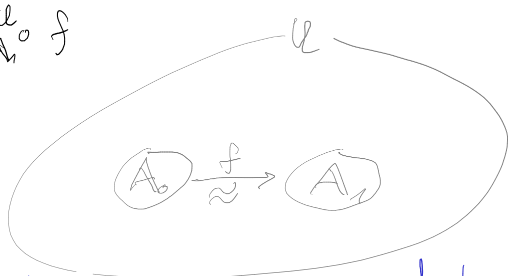
$\forall\, \mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1 \in \mathrm{Age}(\mathbb{U})$, $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1$ podstruktury $\mathbb{U}$,

$\forall\, f : \mathbb{A}_0 \xrightarrow{\approx} \mathbb{A}_1$ $\exists\, h : \mathbb{U} \xrightarrow{\approx} \mathbb{U}$, $f = h | \mathbb{A}_0$.



$$h = e_1 \circ e_0^{-1}$$

Istotnie, $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$ dla $e_0 = \subseteq^{\mathbb{U}}_{\mathbb{A}_0}$, $e_1 = \subseteq^{\mathbb{U}}_{\mathbb{A}_1} \circ f$ spełnia powyższy warunek.



Teoria struktur generycznych znacząco rozszerza teorię granic Fraïsségo, ale to już temat kolejne kilkanaście godzin wykładów. Teoria ta ma zastosowania w różnych działach matematyki oraz informatyki teoretycznej, potencjalnie również w fizyce teoretycznej i pokrewnych naukach.