

## Relace

### Transitivita a skládání

Dokažte, že relace  $R$  na množině  $X$  je transitivní, právě když  $R \circ R \subseteq R$ .

### Rodinné vztahy

Uvažme univerzum všech lidí a definujme na něm relace  $O$ ,  $M$ ,  $B$ :

$$xOy \equiv x \text{ je otcem } y$$

$$xMy \equiv x \text{ je matkou } y$$

$$xBy \equiv x \text{ je bratrem } y$$

Jak pomocí operací nad relacemi vyjádříme relace „ $x$  je rodičem  $y$ “, „ $x$  je dítětem  $y$ “ a „ $x$  je strýcem  $y$ “?

### Operace versus ekvivalence

Necht'  $R$  a  $S$  jsou libovolné ekvivalence na množině  $X$ . Rozhodněte, které z následujících relací jsou nutně také ekvivalence.

1.  $R \cap S$
2.  $R \cup S$
3.  $R \setminus S$
4.  $R \circ S$
5.  $R^{-1} \circ S^{-1}$ .

### Ekvivalenční třídy

U následujících relací náhledněte, že jsou to ekvivalence, a popište jejich ekvivalenční třídy:

1. Pro  $A, B \subseteq \{1, \dots, n\}$ : existuje bijekce mezi  $A$  a  $B$ .
2. Pro  $x, y \in \mathbb{Z}$ :  $x - y$  je násobkem 7.

## Uspořádání

### Relace dělitelnosti

Uvažujme relaci  $x \mid y$  ( $x$  je dělitelem  $y$ ) na množině  $\{1, \dots, n\}$ .

1. Dokažte, že je to uspořádání. Je lineární?
2. Nakreslete Hasseův diagram (třeba pro  $n = 13$ ).
3. Jak vypadají nejmenší, největší, minimální a maximální prvky?
4. Jak vypadají řetězce a antiřetězce?
5. Jak se odpovědi na předchozí otázky změny odebráním prvku 1?

## Uspořádání na objednávku

Sestrojte uspořádání s následujícími vlastnostmi:

1. žádný minimální ani maximální prvek
2. žádný největší, ale aspoň 1 maximální
3. žádný největší, ale právě 1 maximální
4. nekonečně mnoho minimálních prvků a 1 maximální

## Uspořádání na konečné množině

Dokažte, že každé uspořádání na konečné množině má maximální i minimální prvek.