# Kvíz

1. Mějme konečné množiny $X, Y, Z$. Označme $x = |X|$, $y = |Y|$ a $z = |Z|$. Kolik prvků má kartézský součin $X \times Y \times Z$?
   (a) $xyz$
   (b) $2^{x+y+z}$
   (c) $\max(x, y, z)$
2. Kolik existuje relací na $n$-prvkové množině $X$?
   (a) $\binom{n}{2}$
   (b) $n^2$
   (c) $2^{n^2}$
   (d) $2^{2^n}$
3. Která z následujících množin **není** podmnožinou množiny $2^X$, kde $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$?
   (a) $\emptyset$
   (b) $\{1, 2\}$
   (c) $\{\{\{1, 2\}, \emptyset\}, \{\{1, 2\}\}\}$
   (d) $2^Y$ pro $Y = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$
4. Vyberte negaci následujícího výroku

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon y^3 = x.$$

   (a) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon y^3 \neq x.$
   (b) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon y^3 < x.$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon y^3 \neq x.$
   (d) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon y^3 > x.$
5. Spárujte dvojice ekvivalentních výroků:
   (a) $x \in (M \cup N)$
   (b) $x \in (M \cap N)$
   (c) $X \subseteq Y$
   (d) $X = Y$
   (e) $x \in (M \setminus N)$
   (f) $(x \in M) \wedge (x \in N)$
   (g) $\forall x\colon x \in X \Rightarrow x \in Y$
   (h) $(x \in M) \vee (x \in N)$
   (i) $(x \in M) \wedge (x \notin N)$
   (j) $\forall x\colon x \in X \Leftrightarrow x \in Y$

# Uspořádání

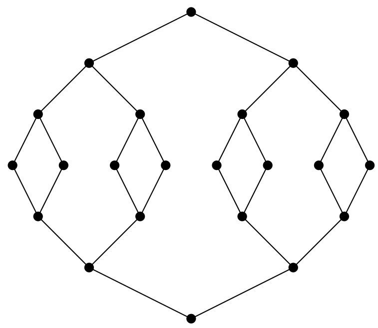
## Věta

Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná konečná množina. Pak platí:

- Řetězec $\{r_1, \dots, r_n\} \subseteq X$ je nejdelší právě tehdy, když existuje $n$ antiřetězců $A_1, \dots, A_n \subseteq X$, které pokrývají $X$, tj. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$.
- Antiřetězec $\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq X$ je největší právě tehdy, když existuje $m$ řetězců $R_1, \dots, R_m \subseteq X$, které pokrývají $X$, tj. $\bigcup_{k=1}^{m} R_k = X$.

## Nejdelší řetězec a největší antiřetězec

U uspořádání daného následujícím Hasseho diagramem vyznačte nějaký nejdelší řetězec a největší antiřetězec. Zdůvodněte, proč nelze najít delší, resp. větší.



## Řetězce vs antiřetězce

a) Rozhodněte, zdali v každém konečném a neprázdném částečném uspořádání musí každý nejdelší řetězec protínat antiřetězec tvořený maximálními prvky.
b) Najděte uspořádání, ve kterém nejdelší řetězec neprotíná každý největší antiřetězec.
c) Najděte uspořádání, ve kterém je unikátní nejdelší řetězec $R$, unikátní největší antiřetězec $A$ a zároveň se $R$ a $A$ neprotínají.

## Lexikografické uspořádání (slovník)

Mějme lineární uspořádání $\leq$ na množině $X$. Definujeme relaci $\preceq$ na $X^2$ následovně:

$$(x, y) \preceq (x', y') \equiv (x < x') \vee (x = x' \wedge y \leq y')$$

Dokažte, že tato relace je také lineární uspořádání. Jak vypadá jeho nejmenší a největší prvek? Jak definici rozšíříme pro $X^k$?

## Součin uspořádání

Jedna lednička je evidentně lepší než druhá, pokud dosahuje současně nižší teploty a nižší spotřeby elektřiny. Obecněji: mějme (částečná) uspořádání $\leq_X$ na $X$ a $\leq_Y$ na $Y$. Definujme relaci $\preceq$ na $X \times Y$ takto:

$$(x, y) \preceq (x', y') \equiv (x \leq_X x') \wedge (y \leq_Y y') \ .$$

Dokažte, že tato relace je také uspořádání. Kdy je lineární?