Binomická věta a princip inkluze a exkluze

Suma

Dokažte platnost vzorce

$$\sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} = n2^{n-1}.$$

Aplikace binomické věty

1. Jaký kombinatorický význam má aplikace binomické věty pro $(1+1)^n$?
2. Jaký kombinatorický význam má aplikace binomické věty pro $(1-1)^n$?
3. Jaký kombinatorický význam má aplikace binomické věty pro $(1+2)^n$?
4. Bonus: Odvoďte vzorec pro

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots .$$

Můžete použít vzorec

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Binomická věta indukcí

Dokažte platnost binomické věty pomocí matematické indukce.

Eratosthenovo síto

Kolik čísel zbude z $1, 2, \ldots, 1000$ po vyškrtání všech násobků čísel 2, 3, 5 a 7?

Permutace písmen

Kolik existuje pořadí písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, z nichž vypuštěním některých písmen nelze dostat ani jedno ze slov PONK, DOBA, COP? Co když zakážeme ještě OPICE?

Eulerova funkce

Eulerovou funkcí rozumíme funkci $\varphi(n)$ udávající počet čísel z množiny $\{1, \ldots, n\}$ nesoudělných s n (čísla a a b jsou nesoudělná, pokud největší společný dělitel je 1). Nechť prvočíselný rozklad n je $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$.

Dokažte následující vzorec. Navíc určete, pro která n je $\varphi(n)$ liché.

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

Poznámka: Tato funkce hraje důležitou roli například v kryptosystému RSA.