

## Grafy – pokračování

### Doplňěk nesouvislého

Dokažte, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Musí to platit obráceně? Tedy musí být každý graf se souvislým doplňkem nesouvislý?

### Liché sledy

Dokažte, že vyskytuje-li se v grafu uzavřený sled liché délky, je v něm obsažena i kružnice liché délky.

### Čtyřcykly pomocí mocnění matice sousednosti

Na přednášce jste odvodili, že počet trojúhelníků (kružnic délky tři) v grafu s maticí sousednosti  $A$  se rovná

$$\frac{\sum_{i=1}^n A_{ii}^3}{6}.$$

Odvoďte formuli pro počet kružnic délky čtyři.

### Ohodnocené grafy

Ohodnocení hran grafu  $(V, E)$  je funkce  $w: E \rightarrow X$ , kde  $X$  je nějaká lineárně uspořádaná množina, na které je definováno sčítání. Délku cesty (vzhledem k ohodnocení  $w$ ) budeme chápat jako součet ohodnocení hran na této cestě. Vzdálenost vrcholů  $u$  a  $v$  (vzhledem k ohodnocení  $w$ ) pak bude délka nejkratší cesty mezi  $u$  a  $v$ . Rozhodněte, ve kterých případech se bude jednat nutně o metriku:

1.  $X = \mathbb{R}$ ,
2.  $X = (0, \infty)$ ,
3.  $X = [0, \infty)$ .

### Bipartitní grafy

Ukažte, že graf je bipartitní právě tehdy, neobsahuje-li kružnici liché délky.

### $d$ -dimenzionální krychle

Bud'  $d \in \mathbb{N}$  a  $V = \{0, 1\}^d$ , tedy  $V$  je množina 0/1 vektorů délky  $d$ . Grafu na  $V$ , ve kterém spolu dva vektory sousedí právě tehdy, když se liší v právě jedné souřadnici, se říká  $d$ -dimenzionální krychle. Jaký je počet vrcholů, počet hran, průměrný stupeň a délka nejkratší kružnice?

Jakou nejdelsí indukovanou cestu umíte najít? Umíte alespoň  $\frac{3}{2}d$ ? A co  $2^{0.001d}$ ? (Přesná odpověď je velmi těžká, takže prostě zkuste nejlepší, jakou najdete.)