

## Diskrétní pravděpodobnost

### Závislé či nezávislé?

Uvažme klasický pravděpodobnostní prostor nad permutacemi množiny  $\{1, \dots, n\}$  pro  $n \geq 2$ . Jsou jevy  $\{\pi \in \Omega \mid \pi(1) = 1\}$  a  $\{\pi \in \Omega \mid \pi(2) = 2\}$  závislé?

### $n$ jedniček

Uvažme klasický pravděpodobnostní prostor nad posloupnostmi nul a jedniček délky  $n$ . Jaká je střední hodnota počtu jedniček v posloupnosti?

### Pevné body permutace

Necht'  $f(\pi)$  je počet pevných bodů permutace  $\pi$ . Spočtete  $\mathbb{E}[f]$  pro náhodnou permutaci  $\pi$ . (Ve stejném prostoru jako v předchozí úloze.)

### Na honu

Na palouku panáčkuje  $n$  zajíců. Najednou se připlíží  $n$  myslivců, každý z nich zamíří na jednoho náhodně vybraného zajíce a vystřelí (a trefí se). Jaká je střední hodnota počtu přeživších zajíců?

### Střední hodnota součinu

Nalezněte dvojici náhodných veličin  $X, Y$  takových, že  $\mathbb{E}[XY] \neq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ .

### Quicksort

Uvažme algoritmus Quicksort na posloupnosti  $n$  různých čísel  $x_1, \dots, x_n$ . Předpokládejme, že v každém kroku vybereme pivota rovnoměrně náhodně a nezávisle na ostatních výběrech. Jaká je střední hodnota počtu porovnání, která algoritmus provede?

### Harmonická čísla

Necht'  $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ . Dokažte  $\ln n \leq H_n \leq \ln n + 1$ .

### První jednička

Mějme následující experiment: Házíme férovou mincí tak dlouho, dokud nepadne první hlava. Zkonstruuje pravděpodobnostní prostor, který je modelem tohoto experimentu, a určete střední hodnotu počtu hodů.

Obecněji: Uvažte minci, na které padá hlava s pravděpodobností  $p \in (0, 1)$ . A řešte tutéž úlohu.