2. cvičení

Kvíz

1. Mějme konečné množiny X, Y, Z. Označme $x = |X|$, $y = |Y|$ a $z = |Z|$. Kolik prvků má kartézský součin $X \times Y \times Z$?
   (a) xyz
   (b) 2^{x+y+z}
   (c) $\max(x, y, z)$
2. Kolik existuje relací na n-prvkové množině X?
   (a) $\binom{n}{2}$
   (b) n^2
   (c) 2^{n^2}
   (d) 2^{2^n}
3. Která z následujících množin **není** podmnožinou množiny 2^X, kde $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$?
   (a) $\emptyset$
   (b) $\{1, 2\}$
   (c) $\{\{\{1, 2\}, \emptyset\}, \{\{1, 2\}\}\}$
   (d) 2^Y pro $Y = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$
4. Vyberte negaci následujícího výroku

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \colon y^3 = x.$$

   (a) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \colon y^3 \neq x.$
   (b) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \colon y^3 < x.$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \colon y^3 \neq x.$
   (d) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \colon y^3 > x.$
5. Spárujte dvojice ekvivalentních výroků:
   (a) $x \in (M \cup N)$
   (b) $x \in (M \cap N)$
   (c) $X \subseteq Y$
   (d) $X = Y$
   (e) $x \in (M \setminus N)$
   (f) $(x \in M) \wedge (x \in N)$
   (g) $\forall x \colon x \in X \Rightarrow x \in Y$
   (h) $(x \in M) \vee (x \in N)$
   (i) $(x \in M) \wedge (x \notin N)$
   (j) $\forall x \colon x \in X \Leftrightarrow x \in Y$

Relace

Transitivita a skládání

Dokažte, že relace R na množině X je transitivní, právě když $R \circ R \subseteq R$.

Rodinné vztahy

Uvažme univerzum všech lidí a definujme na něm relace O, M, B:

$$xOy \equiv x \text{ je otcem } y$$
$$xMy \equiv x \text{ je matkou } y$$
$$xBy \equiv x \text{ je bratrem } y$$

Jak pomocí operací nad relacemi vyjádříme relace „x je rodičem y“, „x je dítětem y“ a „x je strýcem y“?

Operace versus ekvivalence

Nechť R a S jsou libovolné ekvivalence na množině X. Rozhodněte, které z následujících relací josu nutně také ekvivalence.

1. $R \cap S$
2. $R \cup S$
3. $R \setminus S$
4. $R \circ S$
5. $R^{-1} \circ S^{-1}$.

Ekvivalenční třídy

U následujících relací náhledněte, že jsou to ekvivalence, a popište jejich ekvivalenční třídy:

1. Pro $A, B \subseteq \{1, \ldots, n\}$: existuje bijekce mezi A a B.
2. Pro $x, y \in \mathbb{Z}$: $x - y$ je násobkem 7.

Uspořádání

Relace dělitelnosti

Uvažujme relaci $x \mid y$ (x je dělitelem y) na množině $\{1, \ldots, n\}$.

1. Dokažte, že je to uspořádání. Je lineární?
2. Nakreslete Hasseův diagram (třeba pro $n = 13$).
3. Jak vypadají nejmenší, největší, minimální a maximální prvky?
4. Jak vypadají řetězce a antiřetězce?
5. Jak se odpovědi na předchozí otázky změní odebráním prvku 1?

Uspořádání na objednávku

Sestrojte uspořádání s následujícími vlastnostmi:

1. žádný minimální ani maximální prvek
2. žádný největší, ale aspoň 1 maximální
3. žádný největší, ale právě 1 maximální
4. nekonečně mnoho minimálních prvků a 1 maximální