

Grafy – pokračování

Doplněk nesouvislého

Dokažte, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Musí to platit obráceně? Tedy musí být každý graf se souvislým doplňkem nesouvislý?

Liché sledy

Dokažte, že vyskytuje-li se v grafu uzavřený sled liché délky, je v něm obsažena i kružnice liché délky.

Čtyřcykly pomocí mocnění matice sousednosti

Na přednášce jste odvodili, že počet trojúhelníků (kružnic délky tři) v grafu s maticí sousednosti A se rovná

$$\frac{\sum_{i=1}^n A_{ii}^3}{6}.$$

Odvoďte formuli pro počet kružnic délky čtyři.

Ohodnocené grafy

Ohodnocení hran grafu (V, E) je funkce $w: E \rightarrow X$, kde X je nějaká lineárně uspořádaná množina, na které je definováno sčítání. Délku cesty (vzhledem k ohodnocení w) budeme chápat jako součet ohodnocení hran na této cestě. Vzdálenost vrcholů u a v (vzhledem k ohodnocení w) pak bude délka nejkratší cesty mezi u a v . Rozhodněte, ve kterých případech se bude jednat nutně o metriku:

1. $X = \mathbb{R}$,
2. $X = (0, \infty)$,
3. $X = [0, \infty)$.

Bipartitní grafy

Ukažte, že graf je bipartitní právě tehdy, neobsahuje-li kružnici liché délky.

d -dimenzionální krychle

Bud' $d \in \mathbb{N}$ a $V = \{0, 1\}^d$, tedy V je množina 0/1 vektorů délky d . Grafu na V , ve kterém spolu dva vektory sousedí právě tehdy, když se liší v právě jedné souřadnici, se říká d -dimenzionální krychle. Jaký je počet vrcholů, počet hran, průměrný stupeň a délka nejkratší kružnice?

Jakou nejdelsí indukovanou cestu umíte najít? Umíte alespoň $\frac{3}{2}d$? A co $2^{0.001d}$? (Přesná odpověď je velmi těžká, takže prostě zkuste nejlepší, jakou najdete.)