2. sada DÚ

Doporučený termín odevzdání: 25. listopadu 2021 23:59
Tvrdý termín odevzdání: 2. prosince 2021 23:59

Konference `konf` *(5 bodů)*

Na konferenci potkal matematik 5 svých dobrých známých. Jelikož program byl bohatý, setkávali se pouze u obědů. Kolik dní trvala konference, pokud:

- s každým jednotlivcem obědval 10 krát
- s každou dvojicí 5 krát
- s každou trojicí 3 krát
- s každou čtveřicí 2 krát
- s celou pěticí právě jednou
- vždy obědval alespoň s jedním z těchto pěti kamarádů.

(Pozor: pokud obědval například se třemi známými, započítá se to i do obědů s nimi jako s jednotlivci a do obědů s jednotlivými dvojicemi.)

Podmnožiny bez sousedů `pbs` *(6 bodů)*

Kolik existuje podmnožin $\{1, 2, \ldots, n\}$ neobsahujících dvě po sobě jdoucí čísla?

Skoro disjunktní podmnožiny `sdp` *(7 bodů)*

Kolik existuje dvojic (A, B) množin $A, B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ takových, že $|A \cap B| = 1$?

Vytýkání z kombinačního čísla `banda` *(4 body)*

Dokažte, že platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} \qquad \text{pro } n \geq k \geq 1.$$

Kombinatorickou úvahou se snáze dokazuje rovnost

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

(Interpretace: Jak z n vesničanů může povstat banda k zbojníků s náčelníkem?)

Loupežnická banda `loup` *(5 bodů)*

Dokažte, že platí:

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Inverze permutace `pinv` *(5 bodů)*

Buď π nějaká permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Řekneme, že dvojice $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ je *inverze* π, pokud $i < j$ a zároveň $\pi(i) > \pi(j)$.

1. Určete počet inverzí permutace $\pi = (2\ 3\ 9\ 1\ 4\ 5\ 7\ 6\ 8)$. (To znamená $\pi(1) = 2, \pi(2) = 3, \pi(3) = 9, \ldots$)
2. Dokažte, že množina $I(\pi)$ všech inverzí, chápaná jako relace, je transitivní.

O šatnářce `satna` *(7 bodů)*

Nechť $\check{s}_n$ označuje, stejně jako na přednášce, počet permutací na množině $\{1, \ldots, n\}$ bez pevného bodu.

1. Vyjádřete počet permutací na množině $\{1, \ldots, n\}$ s právě jedním pevným bodem. Můžete k tomu použít funkci $\check{s}$ (a je to vřele doporučeno).
2. Dokažte vztah

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \check{s}_{n-k} = n!.$$

Pestré grafy `pestr` *(4 body)*

Pro která n existuje graf na n vrcholech, jehož vrcholy mají navzájem různé stupně?

Graf bez cestičky `nop2` *(4 body)*

Popište všechny grafy, které neobsahují podgraf isomorfní s cestou P_2 (to je cesta o dvou hranách). Dostatečně zdůvodněte, proč jiné nemohou existovat.

Skoro úplné grafy `skup` *(6 bodů)*

Dokažte, že pro každé n jsou všechny $(n-2)$-regulární grafy na n vrcholech navzájem isomorfní. (Graf je k-regulární právě tehdy, když každý vrchol má stupeň k.)