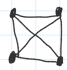
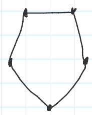
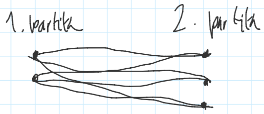
Cvičení z diskrétky 12. 11. 2021

Důležité grafy

K_4 

C_5 

P_3

$K_{2,3}$ 

Isomorfismus

G, H

G je isomorfní s H

$\equiv$

$\exists$ bijekce $f: V(G) \to V(H)$ taková, že:

$\forall u,v \in V(G): \{u,v\} \in E(G) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(H)$.

$G_1 \cong G_2$, protože jsou dokonce totožné (tj. za isomorfismus můžeme použít identitu)

$G_1 \cong G_3$, f zvolíme:

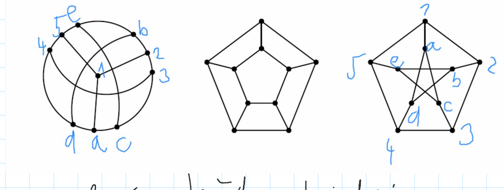
v	$f(v)$
a	a
b	b
c	d
d	c

$G_1 \not\cong G_4$ G_1 nemá vrchol stupně 3
G_4 má vrchol stupně 3 $\Rightarrow$ nejsou isomorfní

Isomorfismus II

$G_1 \not\cong G_2$ protože v G_2 existuje kružnice délky 4,
ale v G_1 mají všechny kružnice délku aspoň 5

$G_1 \cong G_3$



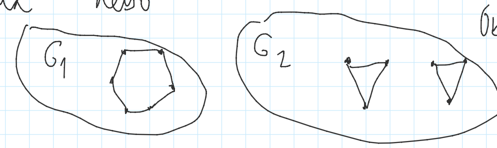
Vlastnosti isomorfismu

1. neplatí, protože je tam slovo každou bijekci,
ale v úloze Grafový isomorfismus I jsme viděli,

ale v úloze Grafový isomorfismus I jsme viděli, že je potřeba zvolit vhodnou bijekci.

2. Bijekce $f: E(G) \to E(H)$ bez dalších požadavků pouze říká, že oba grafy mají stejný počet hran. Ale ~~počet~~ například počet vrcholů může být různý.

3. Říká to, že grafy mají stejné skóre. ~~Stejn~~ Grafy se stejným skóre nemusí být isomorfní, např. minulá úloha nebo



Oba mají skóre 2, 2, 2, 2, 2, 2.

4. Neplatí to, podle této definice by ~~byly~~ byly isomorfní E_1 a E_2.
$E_1 = (\{1\}, \emptyset)$, $E_2 = (\{1,2\}, \emptyset)$

Zvolíme například $f(1)=1$ a podmínka $\forall u,v \in V(E_1): \{u,v\} \in E(E_1) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(E_2)$ platí triviálně – nikde nejsou hrany.

5. Platí. Máme tedy (V,E), kde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Chceme vyrobit isomorfní $(\{1,\dots,n\}, E')$.

Intuitivně: Prostě přejmenuje vrcholy.

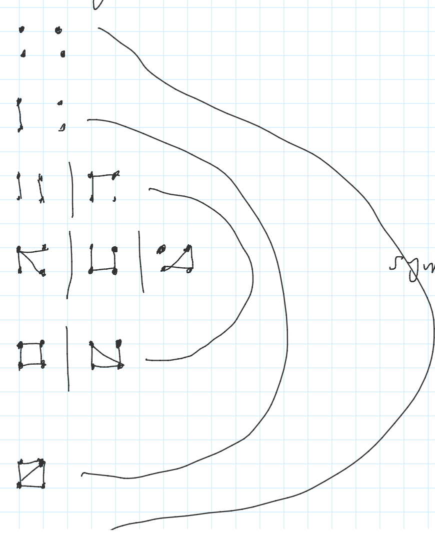
Formálně: Zvolím $f: v_i \to i$. Zřejmě bijekce.

E' definuji tak, že $\{i,j\} \in E' \iff \{v_i, v_j\} \in E$.

Taková definice zaručuje, že bijekce splní podmínku definice isomorfismu.

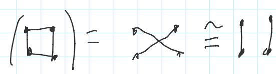
Zoo na 4 vrcholech

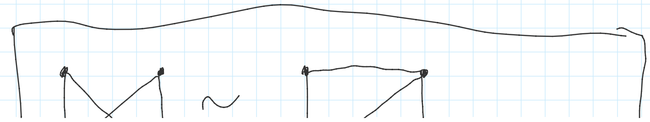
# hran	grafy
0	
1	
2	
3	
4	
5	



symetrie, protože se jedná o doplňky

např. doplněk





5 

6 

Izomorfismus jako ekvivalence

Ještě k teorii množin:

Dokazovali jsme "neexistuje množina všech množin".

Kdyby existovala V obsahující všechny množiny, definujeme $D := \{x \in V \mid x \notin x\}$.

Ukážeme $D \in D$? ~~Kdyby $D \in D$~~

D musí být množina, tedy $D \in V$.

Kdyby $D \in D$, pak $D \notin D$. ↯

Kdyby $D \notin D$, pak $D \in D$. ↯

Kdyby $\mathcal{G}$ byla množina všech grafů.

Z toho vyrobíme $V = \{V(G) \mid G \in \mathcal{G}\}$. Použijeme předchozí důkaz.

Aplikace: Neexistuje bijekce mezi X a 2^X, kde X je libovolná množina (Cantorova věta, ± stejný důkaz).

Máme $\mathcal{G}$ množinu nějakých grafů.

Dokazujeme, že $\cong$ je ekvivalence na $\mathcal{G}$.

Relace splňující:
- reflexivní,
- symetrická,
- tranzitivní

Dokazujeme: - reflexivita

máme G, dokazujeme $G \cong G$

zvolíme izomorfismus f: identita tj. $\forall v \in V(G)$ $f(v) = v$.

Pak triviálně $\forall u, v \in V(G): \{u,v\} \in E(G) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(G)$

platí protože $f(u) = u$ $f(v) = v$

- symetrie

máme G_1, G_2, víme $G_1 \cong G_2$, chceme $G_2 \cong G_1$

máme $\exists$ izomorfismus $f: V(G_1) \to V(G_2)$ bijekce

V_1: $\forall u, v \in V(G_1): \{u,v\} \in E(G_1) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(G_2)$.

pro důkaz $G_2 \cong G_1$ zvolíme $f': V(G_2) \to V(G_1)$ $f' = f^{-1}$

V_2: $\forall u, v \in V(G_2): \{u,v\} \in E(G_2) \iff \{f^{-1}(u), f^{-1}(v)\} \in E(G_1)$

V_1 a V_2 jsou ekvivalentní, protože f je bijekce.

- tranzitivita

máme $G_1 \cong G_2$, $G_2 \cong G_3$, dokazujeme $G_1 \cong G_3$

v_1 a v_2 jsou [illegible] pokud je [illegible].

– tranzitivita

máme $G_1 \cong G_2$, $G_2 \cong G_3$, dokazujeme $G_1 \cong G_3$

máme bijekci f, bijekci g

$$\forall u, v \in V(G_1): \{u, v\} \in E(G_1) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(G_2)$$

$$(*) \quad \forall u', v' \in V(G_2): \{u', v'\} \in E(G_2) \Leftrightarrow \{g(u'), g(v')\} \in E(G_3).$$

Zvolíme: bijekci $h: V(G_1) \to V(G_3)$ jako $h = g \circ f$, pozor, význam se může lišit!

tj. $\boxed{h(v) = g(f(v))}$

Použiji tranzitivitu logické spojky $\Leftrightarrow$

$$\forall u, v \in V(G_1): \{u, v\} \in E(G_1) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(G_2) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \{g(f(u)), g(f(v))\} \in E(G_3)$$

což je

$$\forall u, v \in V(G_1): \{u, v\} \in E(G_1) \Leftrightarrow \{g(f(u)), g(f(v))\} \in E(G_3).$$

~~po~~ použil jsem $u' = f(u)$, $v' = f(v)$.