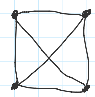
DM 16. 11.

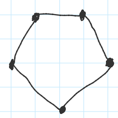
Tuesday, November 16, 2021 12:07 PM

Cvičení z diskrétky 16. 11. 2021

Důležité grafy

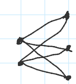
Nakreslete K_4, C_5, P_3 a $K_{2,3}$.

graf K_n – úplný graf na n vrcholech, K_4 

C_n – kružnice  C_5

P_n – cesta, n hran

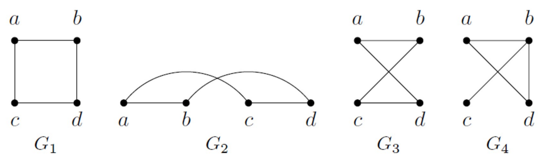
P_3 

$K_{2,3}$ 

$K_{m,n}$ – úplný bipartitní graf, jedna partita má vel. m, druhá n

Grafový isomorfismus I

Definujte grafový isomorfismus a určete, které z následujících grafů jsou isomorfní (své odpovědi řádně zdůvodněte).



graf G je isomorfní H

$\equiv$ $\exists$bijekce $\underset{\text{isomorfismus}}{f}: V(G) \to V(H)$ splňující:

$\forall u,v \in V(G): \{u,v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$

Poznámka: Jiný zápis: $E(H) = \{\{f(u), f(v)\} \mid \{u,v\} \in E(G)\}.$

$G_1 \overset{?}{\cong} G_2$. Grafy jsou dokonce identické ($G_1 = G_2$), tedy za isomorfismus můžeme vzít identitu.

$G_1 \overset{?}{\cong} G_3$. Ano. Isomorfismus:

v	f(v)
a	a
b	b
c	d
d	c

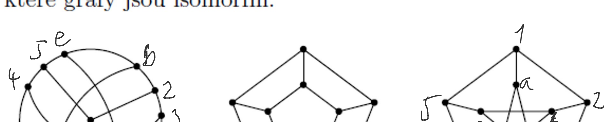
$G_1 \overset{?}{\cong} G_4$. Nejsou isomorfní.

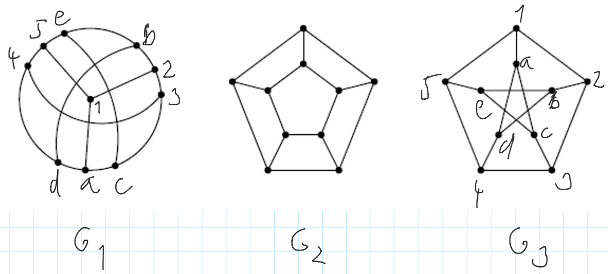
V G_1 mají všechny vrcholy stupeň 2.

V G_4 máme vrchol stupně 1. (Tyto vlastnosti nezávisí na pojmenování vrcholů.)

Grafový isomorfismus II

Opět rozhodněte, které grafy jsou isomorfní.





Nápad: G_1 není rovinný, G_2 je rovinný ✓

Tohle není tak snadné dokázat, viz budoucí přednášky.

G_2 má kružnici délky 4

G_1 nemá kružnici délky 4. Tedy $G_1 \not\cong G_2$.

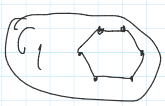
$G_1 \cong G_3$ Ověříme sousednost všech vrcholů.

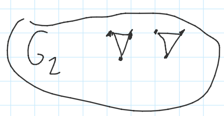
Vlastnosti isomorfismu

Které z následujících výroků o isomorfismu jsou správné? Svá trvzení zdůvodněte.

1. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když pro každou bijekci $f : V(G) \to V(H)$ platí, že pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ platí následující ekvivalence:
$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$
2. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje bijekce $f : E(G) \to E(H)$.
3. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje bijekce $f : V(G) \to V(H)$ taková, že pro každý vrchol $v \in V(G)$ platí:
$$\deg_G(v) = \deg_H(f(v))$$
4. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje zobrazení $f : V(G) \to V(H)$ takové, že pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ platí následující ekvivalence:
$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$
5. Každý graf s n vrcholy je isomorfní nějakému grafu na množině vrcholů $\{1, \ldots, n\}$.

1. Rozdíl od definice, zde je pro <u>každou</u> bijekci. V druhé úloze (Grafový isomorfismus I), jsme viděli, že je potřeba zvolit vhodnou bijekci.
2. Říká to pouze, že G a H mají stejný počet hran. Ale počet vrcholů může být různý.
3. Říká to, že mají ty grafy stejné skóre. Viz předchozí úloha, nebo





G_1 i G_2 mají skóre 2, 2, 2, 2, 2, 2

4. Je tam zobrazení místo bijekce.
Podle této definice by byly isomorfní třeba E_2 a E_3. (prázdné grafy, tj. grafy bez hran)

5. Je to pravda.
Mějme G, $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$.
Hledáme H t.ž. $V(H) = \{1, \ldots, n\}$ a $G \cong H$.
Zvolíme $f: V(G) \to V(H)$, $f: v_i \mapsto i$
Definujeme $E(H)$: $\{i, j\} \in E(H) \Leftrightarrow \{v_i, v_j\} \in E(G)$
Tohle splní podmínku isomorfismu.

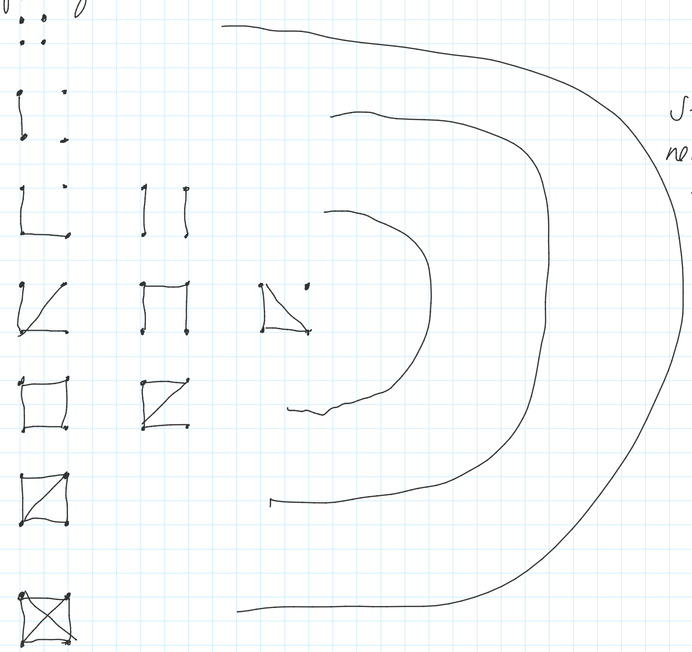
Zoo na 4 vrcholech

Znázorněte všechny neisomorfní grafy na 4 vrcholech (je jich 11).

Rozdělíme grafy podle počtu hran.

#hran — grafy

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6



Symetrie není náhodná. Ty grafy jsou doplněk.

Isomorfismus jako ekvivalence

Buď $\mathcal{G}$ libovolná množina grafů. Dokažte, že relace „býti isomorfní" je ekvivalence na této množině $\mathcal{G}$.

Je to zadáno takto, protože neexistuje množina všech grafů.

Odbočka: Na přednášce bylo: Důkaz, že neexistuje množina všech množin.

Sporem: Nechť existuje množina V obsahující všechny množiny.

definujeme $D := \{x \in V \mid x \notin x\}$

Rozebereme případy: $D \in D \Rightarrow D \notin D$ ↯

$D \notin D \Rightarrow D \in D$ ↯

Tedy D nemůže existovat, tedy V nemůže existovat.

Ke grafům. Kdyby existovala A množina všech grafů, pak $\{V(G) \mid G \in A\} \cup \{\emptyset\}$ je „množina všech množin" a použijeme předchozí důkaz.

Toto byla tzv. diagonální metoda, aplikace:

- Cantorova věta – říká, že pro libovolnou množinu X neexistuje bijekce mezi X a 2^X.
- Teorie vyčíslitelnosti

Máme množinu grafů $\mathcal{G}$.
Ukážeme, že $\cong$ je ekvivalence.
ekvivalence je relace, která je:

Ukažujeme, že $\cong$ je ekvivalence.

Ekvivalence je relace, která je:

- reflexivní
- symetrická
- tranzitivní

bijekce mezi X a 2^n.

- Teorie složitosti

- $\forall G \in \mathcal{G}$: $G \cong G$, zvolíme f identitu (tj. každý prvek sám na sebe)
- Máme G a H. Víme, že existuje bijekce $f: V(G) \to V(H)$

  t.ž. $\forall u,v \in V(G): \{u,v\} \in E(G) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(H)$. (*)

  Použijeme $h: V(H) \to V(G)$ kde $h = f^{-1}$

  pak $\forall x,y \in V(H): \{x,y\} \in E(H) \iff \{f^{-1}(x), f^{-1}(y)\} \in E(G)$

  platí, protože jsme použili f^{-1} na (*).
- Máme G, H, I.

$f: V(G) \to V(H)$ $\qquad$ $g: V(H) \to V(I)$

(a) $\forall u,v \in V(G): \{u,v\} \in E(G) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(H)$

(b) $\forall x,y \in V(H): \{x,y\} \in E(H) \iff \{g(x), g(y)\} \in E(I)$

Zvolím isomorfismus $i: V(G) \to V(I)$ jako $i = g \circ f$ $\quad (i(v) = g(f(v)))$

Složení bijekcí je bijekce.

Použiji tranzitivitu ekvivalence:

zvolím $x = f(u)$, $y = f(v)$

$$\forall u,v \in V(G): \{u,v\} \in E(G) \overset{(a)}{\iff} \{f(u), f(v)\} \in E(H) \overset{(b)}{\iff} \{g(f(u)), g(f(v))\} \in E(I)$$

$$\{u,v\} \in E(G) \iff \{i(u), i(v)\} \in E(I) \quad \square$$