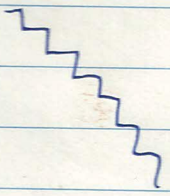
2. 10. 2012

Diskrétní matematika

S322

Úvod – co je (diskrétní) matematika

PŘ.



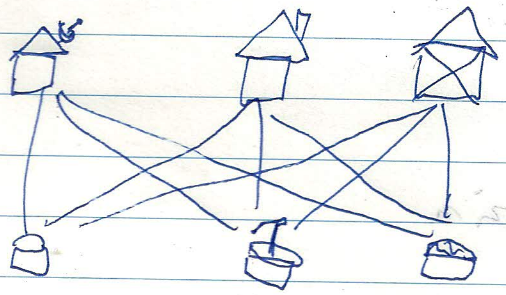
s_n - počet možností seběhnutí schodů
(~~1~~ krok - 1 nebo 2 schody)

Odhady $2^{\lceil n/2 \rceil} \le s_n \le 2^n$

$s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$

OEIS.ORG

Kolik je v této budově schodišť?



A1 $\nexists x: S(x)=0$

A2 $\forall x: x \neq 0 \Rightarrow \exists y\ S(y)=x$

A3 $\forall x,y: S(x)=S(y) \Rightarrow x=y$

TODO: [illegible]

9. 10. 2012

Notace

Σ proč 0? $\sum_{i=1}^{n} a_i := \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + a_n$

$\prod$ produkt

Množiny

Vydělení $\{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} : x = 2y\}$ (vydělení)

Nahrazení $\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$

$\equiv$ definiční ekvivalence

$:=$ definiční rovnost

$\exists V$ množina všech množin

$W := \{x \in V \mid x \notin x\}$

Důsledek: V neexistuje.

$P(A)$ 2^A $:= \{B \mid B \subseteq A\}$

Vyzkoušet si teorii multimnožin $M(A)$ - množina

~~$A \subseteq B$ Věta~~ $c_A \leq c_B$ $\mu(x, M)$ = četnost x v M

$A \subseteq B$ $\forall x \in M(A)$: $\mu(x, A) \leq \mu(x, B)$

$A \cup B := M$ $\forall$ ~~$\mu(x)$~~ $= \mu(x, A)$ ~~$+ \mu(x, B)$~~ max

$A \cap B$ min x, M

$(a, b, c) \approx (a, (b, c)) \approx ((a, b), c)$

DM2

Relace

R je relace mezi X a $Y \equiv R \subseteq X \times Y$

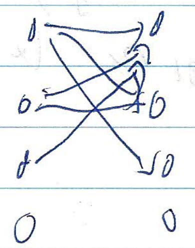
Relace R na $X \equiv R \subseteq X^2$

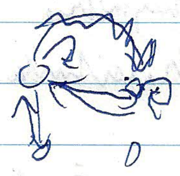
$x \setminus y$ $\quad$ x dělí y

$xRy := (x,y) \in R$

Znázornění relací

	1	2	3	4
1	1	1	1	0
2	1	1	0	0
3	1	0	0	0
4	0	0	0	0





Inverze relace

$R^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$

R je relace mezi X a Y

S je relace mezi Y a Z

$R \circ S := \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : xRy \land ySz\}$

Zhledávání o diagonální relaci: identní relaci

$\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$

$\boxed{\text{Def}}$ f je funkce z X do $Y \equiv f$ je relace mezi X a Y $\forall x \in X \; \exists! \, y \in Y : \cancel{(x,y)} \; x f y$

$f(x) = y \equiv x f y$

$x \mapsto \sin x$

$f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

16. 10. 2012

Skládání funkcí

$f: X \to Y \quad g: Y \to Z$

$h: x \mapsto g(f(x))$

$h = g \circ f$, podle relací $f \circ g$

Vlastnosti relací

1) reflexivita $\equiv \forall x: xRx$ ...... $\Delta_X \subseteq R$
2) symetrie $\equiv \forall x,y: xRy \Leftrightarrow yRx$ ...... $R = R^{-1}$
3) antisymetrie $\equiv \forall x,y: x \neq y \Rightarrow xRy \,\underline{\vee}\, yRx$ ...... $R \cap R^{-1}$
4) tranzitivita $\equiv \forall x,y,z: (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ ... $R \circ R \subseteq R$ DÚ

Ekvivalence $\equiv$ 1) $\wedge$ 2) $\wedge$ 4)

Nechť R je ekvivalence na X.

$R[x] := \{y \in X \mid yRx\}$

ekvivalenční třída prvku x

$xRy \Leftrightarrow x \in R[y] \Leftrightarrow y \in R[x]$

Věta: Nechť R je ekvivalence na X. Pak: 1) $\forall x \in X: x \in R[x]$

2) $\forall x,y \in X: R[x] = R[y] \vee R[x] \cap R[y] = \emptyset$

3) $\{R[x] \mid x \in X\}$ jednoznačně určuje R.

Dk 1) z reflexivity 2) Ukážeme $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset \Rightarrow R[x] = R[y]$

$z \in R[x] \cap R[y]$. $xRz \wedge yRz \Rightarrow xRy \Rightarrow x,y \in R[x] \cap R[y]$

Ukážeme $R[x] \subseteq R[y]$, $R[y] \subseteq R[x] \Rightarrow R[x] = R[y]$

3) Chceme mezi $\{R[a] \mid a \in X\}$ najít $R[y]$

→ hledáme $y \in R[a]$ - díky 1) existuje

- díky 2) je jen jedna,

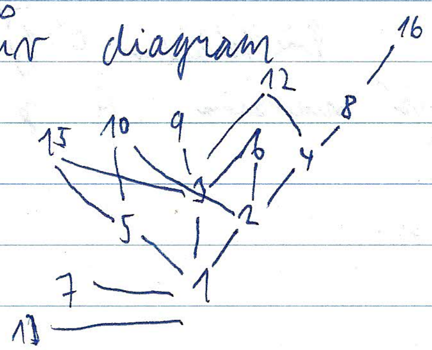
na základě toho postavím R.

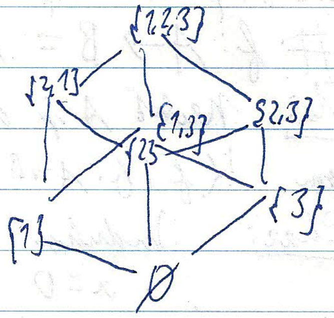
Uspořádání $\equiv$ 1) $\wedge$ 3) $\wedge$ 4) $\quad (R, \leq)$

Lineární uspořádání $\equiv$ navíc $R \cup R^{-1} = X^2$

Ostré uspořádání $\equiv (R, <)$ antireflexivní

Hasseův diagram





Def Buď $(X, \leq)$ uspořádaná množina.
Potom $x \in X$ je:

- nejmenší prvek $\forall y \in X: x \leq y$
- minimální prvek $\nexists y \in X: y < x$

23. 10. 2012

Kombinatorické počítání

motivační příklad: Šatnářka

Funkce

$a := |A|$ $b := |B|$

$\# f: A \to B = b^a$ Předpokládáme $0^0 = 1$, $\prod_{\emptyset} = 1$

1. Věta: Nechť A je a-prvková množina, B je b-prvková, potom $|\{f \mid f: A \to B\}| = b^a$.

Důkaz: Indukcí podle a:

- $a = 0$
- $a-1 \to a$

Zvolit $x \in A$, $f(x)$ lze zvolit b způsoby, na $A' := A \setminus \{x\}$ lze zvolit f' z IP b^{a-1} možností, celkem b^a.

Př. $|A^n|$ ~ $f: \{1,2,3,4\} \to A \Rightarrow |A^n| = |A|^n$

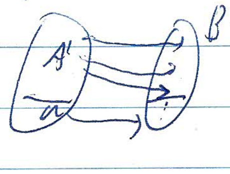
2. Věta: Nechť A je a-prvková, pak $|2^A| = 2^a$.
char. funkce $c_B: A \to \{0,1\}$

3. Věta $a = |A| \neq 0$

$$|\{S \in 2^A \mid |S| \text{ sudá}\}| = |\{S \in 2^A \mid |S| \text{ lichá}\}| = 2^{a-1}$$

Zvolme $a \in A$, $f: S \to S \triangle \{a\}$, $f = f^{-1}$ ... je to bijekce

4. Věta prosté funkce $f: A \to B$ prostých $\prod_{i=0}^{a-1} (b-i)$



$b-(a-1) = b-a+1$

$b(b-1) \cdots (b-a+1)$

Důkaz indukcí.

4. Věta $\#$ permutací na n-prvkové množině je $n!$

Kombinační čísla

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ pro $n \geq k$ přirozená.

Pro množinu A a $k \in \mathbb{N}$: $\binom{A}{k} := \{B \in 2^A \mid |B| = k\}$.

5. Věta: $\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{|A|}{k}$. A konečná, $k \leq |A|$.

$Z :=$ # uspořádaných k-tic různých prvků A.

$Z =$ # $f: \{1 \dots k\} \to A$ prostá: $a(a-1)\cdots(a-k+1)$

$Z =$ (# k-prvkových podmnožin) $\cdot$ (# permutací k-tice) $=$

$= \left|\binom{A}{k}\right| \cdot k!$

$Z = Z$

$a \cdot (a-1) \cdots (a-k+1) = \left|\binom{A}{k}\right| \cdot k!$

$\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{|A|}{k}$

Pascalův Δ (pravděpodobně uvedli už starověcí mat.)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Věta binomická

$\forall x, y \; \forall n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-k}$$

Důsledky $x, y = 1$

$x = 1, y = 1$

30.10. 2012

Princip inkluze a exkluze

Množiny $A_1, \dots, A_n$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{\{1..n\}}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| =$$

$$= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

Důkazy 0. Indukcí podle počtu množin

1. $A := |\bigcup_i A_i|$

Uvažujme $a \in A$

Nalevo přispěje $+1$. Napravo: nechť $j := \# i : a \in A_i$

$k > j$ $\bigcap_{i\in I} A_i \not\ni a$, a přispěje 0

$\binom{j}{k}$ indexových množin t. ž. $a \in \bigcap_{i\in I} A_i$,

každá přispěje $(-1)^{k+1}$

Příspěvek $\binom{j}{1} - \binom{j}{2} + \dots (-1)^{j+1}\binom{j}{j} = 1$ $\square$

2. $$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) = \sum_{I \subseteq \{1..n\}} \prod_{i\in I} x_i$$

$$\Downarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) = \sum_{I \subseteq \{1..n\}} (-1)^{|I|} \prod_{i\in I} x_i$$

Pro $A_i \subseteq A$ zavedeme $c_{A_i} : A \to \{0,1\}$

Položíme $x_i := c_{A_i}(a)$

Pozorování:

$1 - c_X = c_{A \setminus X}$

$c_X \cdot c_Y = c_{X \cap Y}$

$a \in A \Rightarrow \exists A_i : a \in A_i$

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - c_{A_i}(a)) = \sum_{I \subseteq \{1..n\}} (-1)^{|I|} \prod_{i\in I} c_{A_i}(a) = \cancel{\ }$$

$$0 = \sum_{\substack{I \subseteq \{1..n\} \\ \text{DM } 8}} (-1)^{|I|} c_{\bigcap_{i\in I} A_i}(a)$$

Sčítaní přes všechna a:

$$0 = \sum_{a \in A} \sum_{I \subseteq \{1..n\}} (-1)^{|I|} \cdot \underbrace{\sum_{a \in A} c_{\bigcap_{i \in I} A_i}(a)}_{|\bigcap_{i \in I} A_i|}$$

pro $I = \emptyset$ → $|A|$

Problém šatnářky

$\check{s}(n) :=$ # permutací na $\{1..n\}$ t. ž. $\forall i \ \pi(i) \neq i$

$p_{st} = \frac{\check{s}(n)}{n!}$

$P := \{\pi \mid \exists i : \pi(i) = i\}$

$P_i := \{\pi \mid \pi(i) = i\}$

$P = \bigcup_i P_i$

$|P_i| = (n-1)!$ $\quad |P_{i_1} \cap P_{i_2} \cdots P_{i_k}| = (n-k)!$

$$|P| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

$$\check{s}(n) = n! \left(1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}\right) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$p_{st} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

„God is real, unless declared integer." J. Orlean

6. 11. 2012

Model pravděpodobnosti

Konečný pravděpodobnostní prostor

(Ω, P)

Ω ... konečná množina elem. jevů

$P: 2^{\Omega} \to [0,1]$ $\quad P(\emptyset)=0 \quad P(\Omega)=1$

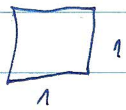
$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Klasický PP

$\forall \alpha, \beta \in \Omega: P(\{\alpha\}) = P(\{\beta\}) \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Př. náhodná permutace

Diskrétní P.P. Ω konečná nebo spočetná



1 čtverec, pst trefení do kruhu vepsaného čtverci.

Bertrandův paradox - klobouk - v klobouku 3 kartičky

- ČČ, ZZ, ČZ
- Položíme náhodně kartičku na stůl nahoře Č. P[dole Č.]

Podmíněná pravděpodobnost

$P[A|B] := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(B) \neq 0$

$$Pst[\underbrace{\text{padlo více než } 2}_{\{3,4,5\}} \mid \underbrace{\text{padlo prvočíslo}}_{\{2,3,5\}}] = \frac{P(\{3,5\})}{P(\{2,3,5\})} = \frac{2}{3}$$

Nezávislost jevů

Jevy A, B jsou nezávislé $\equiv$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Poz. $\Leftrightarrow$ $P(A|B) = P(A)$ nebo $P(B) = 0$

Př. 2 kostky, $A: 6*$ $B = *6$ ... $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

$P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$

Př. Náhodná permutace π na $\{1 - 10\}$.

$A = \{\pi \mid \pi(1) = 1\}$ $\quad P(A) = \frac{1}{10}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{1}{90}$

$B = \{\pi \mid \pi(2) = 2\}$ $\quad P(B) = \frac{1}{10}$

Více jevů

$A_1 - A_n$ jsou nezávislé $\equiv$ $\forall \emptyset \neq I \subseteq \{1 - n\}: P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

$\Downarrow$

$A_1 - A_n$ jsou po 2 nezávislé $\equiv$ $\forall i, j \in \{1 - n\}, i \neq j: P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$

po k nezávislé $\equiv$ $\forall I \in \binom{\{1 \dots n\}}{k}: P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

Př. $\Omega = \{000, 011, 101, 110\}$ s klasickou P

$A_1 = 1**$ $\quad A_2 = *1*$ $\quad A_3 = **1$

Nejmenší pstní prostor daných vlastností: n nezávislých 2^n

Odbočka - derandomizace pravděpodobnostních algoritmů, při požadavku na 2-nezávislost menší prostory.

Součin pstních prostorů $(\Omega_1, P_1) \times (\Omega_2, P_2)$

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$P((\omega_1, \omega_2)) = P(\omega_1) \cdot P(\omega_2)$

~~Prodne~~ Projekce $\quad D = X \times Y$

$\pi_1: D \to X: (x, y) \to x$

$\pi_2: D \to Y: (x, y) \to y$. Jednotlivé hody jsou projekce

V projekce do 2 souřadnic nad $\Omega = \{000, 011, 101, 110\}$ generuje úplný prostor hodů 2 mincemi.

13. 11.

Náhodná veličina

$X: \Omega \to \mathbb{R}$

Př. $\Omega =$ "10 hodů kostkou"

$X =$ "součet hodů"

$Y =$ "maximum z hodů"

$P[X > 10] = P(\{w \in \Omega \mid X(w) > 10\})$

Střední hodnota n. v. X

$$EX := \sum_{w \in \Omega} X(w) P(w)$$

Příklad - fronta — n lidí různých výšek

EV — $V := \# i : \forall j < i \quad \pi(j) < \pi(i)$ kolik maxima - počet lidí, kteří vidí dopředu

Def Indikátor jevu A je n. v. I_A t. ž. $I_A(w) := \begin{cases} 0 & \text{jinak} \\ 1 & w \in A \end{cases}$

$A_i :=$ i-tý prvek je lokálním maximem

$V_i := I_{A_i}$

$V = \sum_i V_i$ $\qquad EI_A = \sum_{w \in A} P(w) = P(A)$

$P(A_i) = \frac{(i-1)!}{i!} = \frac{1}{i}$

$EV = \sum EV_i = \sum P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx \ln n$

TODO: Polynomiálně velký pstní prostor.

20. 11. 2012

Teorie grafů

K_n $\quad$ P_n n+1 vrcholů

C_n $\quad$ $K_{m,n}$

Isomorfismus grafů

Def: Grafy G a H jsou isomorfní $\equiv \exists f: V(G) \to V(H)$ bijekce t. ž. $\forall u, v \in V: \{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H)$.

$G \cong H$

nad libovolnou množinou je to ekvivalence. (Nelze říci obecně - množina všech množin.)

Skóre grafu

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2|E(G)|$$

Př. (Ramsey) Vždy K_3 nebo $\bar{K}_3$.

Př. isomorfismus grafů $(\forall \deg(v)) = 2$

grafů na $V = 2^{\binom{n}{2}}$

neisomorfních grafů na $V \geq \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$ Žádná ekvivalenční třída neobsahuje víc než $n!$ grafů.

Def: G je podgrafem H $(G \subseteq H) \equiv V(G) \subseteq V(H) \wedge E(G) \subseteq E(H)$

Def: G je indukovaný podgraf H
$\equiv V(G) \subseteq V(H) \wedge E(G) = E(G) \cap \binom{V(G)}{2}$

Def: cesta v grafu $\equiv H \subseteq G: \exists n: H \cong P_n$

Def: G je souvislý $\equiv \forall u, v \in V(G): \exists$ cesta mezi u, v

Lemma: $\exists$ uv-cesta a vw-cesta $\Rightarrow \exists$ uw-cesta

uv-cesta $P: u = p_1 \dots p_n = v$

vw-cesta $Q: v = q_1 \dots q_k = w$

zvolme i maximální, pro které $q_i = p_j$ pro nějaké j.

Def V souvislém grafu G definujeme vzdálenost vrcholů $u, v \in V(G)$. 27. 11. 2012

$d_G(u,v) :=$ délka nejkratší cesty mezi u, v.

Vlastnosti
0. $d(x,y) \geq 0$
1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

} metrika

Operace s grafy

$G+v$, $G-v$, $G+e$, $G-e$

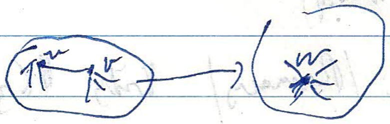
$G\%e$ dělení hrany

Nechť $e = \{u,v\}$

$V(G\%e) := V(G) \dot{\cup} \{w\}$ $\dot{\cup}$ zdůraznění disjunktnosti

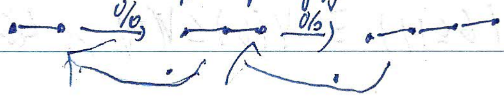
$E(G\%e) := (E(G) \setminus \{e\}) \cup \{uw, vw\}$ sjednocení

$G \cdot e$ kontrakce hrany



$V(G \cdot e) := (V(G) \setminus \{u,v\}) \cup \{w\}$

$E(G \cdot e) := \left(E(G) \cap \binom{V(G\cdot e)}{2}\right) \cup \{ (f \setminus \{u,v\}) \cup \{w\} \mid f \in E(G) : |e \cap f| = 1 \}$

- podgraf vzniká $G-e$, $G-v$
- indukovaný podgraf $G-v$
- 

- $C_n \xrightarrow{\%} C_{n+1}$, $C_{n+1} \xrightarrow{\cdot} C_n$

Stromy

Def. Strom je souvislý graf bez kružnic.
Les je graf, jehož komponenty souvislosti jsou ~~les~~ stromy.
Kaktus je graf, ve kterém je každá hrana na nejvýše jedné kružnici.
List je vrchol stupně 1.

Lemma o listu: Každý strom s alespoň 2 vrcholy má list.
Dk. Uvažme nějakou nejdelší cestu $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots e_{k-1}, v_k$

$\deg(v_k)$ { 1 list; ≥ 1 buď hrana vede do v_i $i \in 0..k-1$ - cyklus, jinak delší cesta

Lemma: Buď G graf a l jeho list.
Potom G je strom
$\Updownarrow$
$G-l$ je strom
Dk. $\Downarrow$ žádná cesta nevede přes l, ~~nov~~ přidáváním nevzniká cyklus
$\Uparrow$ souvislost zachována

Věta Pro neprázdný graf G jsou následující vlastnosti ekvivalentní:
1) G je strom
2) $\forall u, v \in V(G)$ existuje právě jedna cesta ~~z~~ mezi u, v
3) G je souvislý $\forall e \in E(G)$: $G-e$ není souvislý
4) G je maximální acyklický graf
$\forall e \in \binom{V(G)}{2} - E(G)$: $G+e$ obsahuje cyklus
5) G je souvislý $|E(G)| = |V(G)| - 1$

1) => vážíme $|V(G)| \geq 2$
indukce podle $|V(G)|$ l je list, $G-l$ splňuje 2-5

1 <= 2 1 <= 3 1 <= 4 1 <= 5 nemůže být $\forall v$ $\deg(v) \geq 2$
$\forall v$ $\deg(v) \geq 1$ $\exists l$ je $\deg(l) = 1$
$G-l$ je podle IP strom
G je strom podle lemmatu

Def Kostra grafu $G \equiv$ skupina $(V(G), E')$, $E' \subseteq E(G)$

Věta G má kostru $\Leftrightarrow$ G je souvislý

4.2. Problém čínského pošťáka

Eulerovské tahy

Def. <u>Sled</u> v grafu $G \equiv$ je posloupnost $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$ $\forall i: v_i \in V(G), e_i \in E(G), e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$

Def. <u>Tah</u> neopakuje hrany

<u>Cesta</u> neopakuje vrcholy

Uzavřený * $= v_0 = v_n$

Def. Tah je eulerovský $\equiv$ leží na něm všechny vrcholy i hrany.

<u>Uzavřený eulerovský tah</u>

Pokud existuje

(1) G je souvislý

[vede sled $\Rightarrow$ vede cesta]

(2) všechny vrcholy sudý stupeň

výskyty v v tahu

Věta Graf je <u>eulerovský</u> $\Leftrightarrow$ je souvislý a všechny vrcholy mají sudé stupně.

<u>Důkaz:</u> Buď T nejdelší tah (nějaký)

(1) T je uzavřený: sporem: $\exists$ koncový vrchol v

celkově lichý # hran $\Rightarrow$ nepoužitá hrana

(2) T je eulerovský:

nenavštívil-li jsem vrchol, tak ani nějakou hranu e

buď a) e sousedí s T – rozpojíme tah a přidáme e $\Rightarrow$ spor

b) e nesousedí s T: zvolíme $u \in e$ a $s \in T$ DM16 ze souvislosti mezi u, s existuje cesta. První místo, kde cesta opouští T $\Rightarrow$ prodloužím.

Rovinné grafy

Oblouk $[0,1] \to \mathbb{R}^2$ prostý

Nakreslení (rovinné)

$b: V \to \mathbb{R}^2$, prosté

$\sigma: E \to$ oblouky v rovině

$\forall v \in V,\ e \in E,\ v \in e$

$b(v)$ je krajním bodem $\sigma(e)$

· oblouky se protínají jen krajními body =

= ~~pokud~~ $\forall v\ \forall e\ \ b(v) \in \sigma(e) \Rightarrow v \in e$

cesta v G → křivka v nakreslení

kružnice → topologická kružnice

Relace na $\sim$ pro $x \in \mathbb{R}^2$

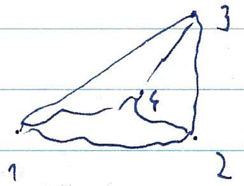
$x \sim y \equiv \exists$ oblouk z x do y

Jordanova věta o kružnici

Odebrání topologické kružnice z roviny ji rozdělí na 2 komponenty souvislosti.

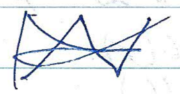
K_5 není rovinný

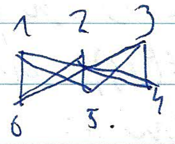
Dk.

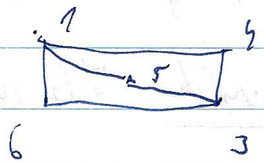


Kde leží 5? Pro každou část existuje křížení topologické kružnice.

$K_{3,3}$



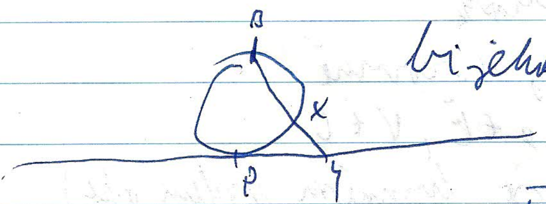




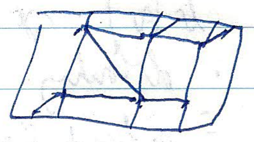
2 nejde umístit

Def. Stěny nakreslení := komponenty $\mathbb{R}^2$ po odebrání $\bigcup_e \varphi(e)$ a $\bigcup_v b(v)$

Stereografická projekce



bijekce mezi sférou bez B a $\mathbb{R}^2$?



Kuratowského věta $\forall G$ ~~[illegible]~~ rovinný existuje rovinné nakreslení z úseček.

11.12.2012

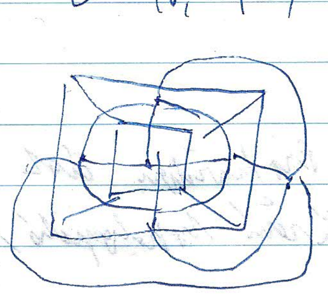
Barvení - Problém 4 barev

Def Dualita grafů nakreslených do roviny.

$G := (V, E, S) \longrightarrow G^* := (V^*, E^*, S^*)$

$V^* := S$ $E^* :=$ "sousedství stěn"

$S^* \simeq V$



$G^{**} \cong G$

Def Obarvení grafu G k barvami je $c: V(G) \to \{1..k\}$ t.ž. $\forall \{u,v\} \in E(G): c(u) \neq c(v)$.

Def Barevnost grafu G: $\chi(G) := \min\{k \mid G$ je k-obarvitelný$\}$

Věta o 4 barvách $\forall G$ rovinný $\chi(G) \leq 4$.

Věta (Eulerův vztah): Pro G ~~rovinný~~ souvislý, nakreslený do roviny, $|V(G)| \geq 1$

$$|V(G)| + |S(G)| = |E(G)| + 2$$

Důkaz: Buď v pevný, indukce přes e.

① G je strom ... ~~$|S(G)|$~~ $v = e+1$, $s = 1$.

② ind. krok: G není strom $\Rightarrow$ G obsahuje kružnici:
Zvolíme lib. hranu f ležící na kružnici.
Použijeme ind. předpoklad $G-f$.
Přidáme ji zpátky – hrany++, stěny++

$|V(G-f)| = |V(G)|$

$|E(G-f)| = |E(G)| - 1 \Rightarrow$

$|S(G-f)| = |S(G)| - 1$

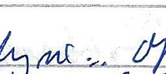
Lemma: Hranice každé stěny je uzavřený sled, na němž se každá hrana vyskytne nejvýše dvakrát.

Důkaz: Podobná indukce, odeberu hranu z kružnice a pak ji vrátím  uzavřený sled $\rightarrow$ rozšířím, připojím mezi 2 stěny

Věta ~~maximální~~ Buď G maximální rovinný s alespoň třemi vrcholy, pak libovolné rovinné nakreslení grafu G má všechny stěny trojúhelníkové. (triangulace)

Důkaz ① G je souvislý

② Hranice každé stěny je kružnice. Kdyby ne... Opakující se vrchol $\rightarrow$ ~~každá hrana~~



③ ... a ta kružnice je C_3

Věta Pro libovolný G ≥3 vrcholy rovinný platí: $|E(G)| \leq 3 \cdot |V(G)| - 6$ lze přidat hranu

Dk ① G je triangulace rovnost pro triangulace

$|S(G)| = \frac{2}{3}|E(G)|$ ~~$v+s=e+2$~~ $s = \frac{2}{3}e$

$v + \frac{2}{3}e = e + 2$

$3v = e + 6 \Rightarrow e = 3v - 6$

② není doplníme na maximální: ten má $3v-6$ hran, předtím měl méně.

Důsledek: Vrchol stupně nejvýše 5.

Věta o 6 barvách   Indukcí max vrchol deg ≤ 5

Věta o 5 barvách

Důkaz indukce

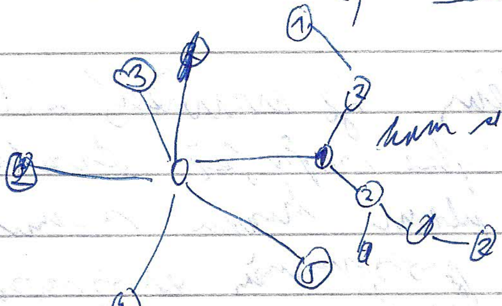
① deg ≤ 5

② chytřejší redukční krok

a) deg(v) ≤ 4 stejně

b) deg(v) = 5   ≤ 3 různé barvy OK

c) 4 různé barvy



kam si to [illegible] barvy 1 nebo 2

1-2 podgraf kolem ①

obsahuje ② volné pro další 2 barvy 3-4 podgraf

neobsahuje ② prohodíme v 1-2 podgrafu 1 a 2

Kempeho řetězce (chybný důkaz 4 barev)

~~Kombinatorika~~ Kuratowského věta G je rovinný

⟺ existuje $H \subseteq G$, který je isomorfní s dělení K_5, $K_{3,3}$

18.12.2012 **Uspořádání podruhé**

Lemma: Konečná uspořádaná množina má alespoň 1 minimální prvek.

Dk. 1 zvolíme $p_1 \in X$ zvolíme libovolně

není-li min, zvolíme $p_2 \prec p_1$ atd

Dk. 2 $M_x := \{y \in X \mid y \preceq x\}$

Najdeme x tak že $|M_x|$ je nejmenší. Ukážeme $|M_x| = 1$.

Věta Pro každou konečnou ČUM $(X, \preceq)$ $\exists$ lineární uspořádání $\sqsubseteq$ na X t.ž. $\preceq \subseteq \sqsubseteq$.

Pro nekonečné je nerozhodnutelná; ekv. axiom výběru.

Indukce! $|X| \leq 1$ ok

$|X| \geq 2$: zvolme m jako minimální prvek.

$X' := X \setminus \{m\}$

~~Podle IP existuje lin. uspořádání~~ $\preceq' := \preceq|_{X'}$

IP $\exists$ $\sqsubseteq'$

Definice Vnoření ČUM $(X, \preceq)$ do $(Y, \sqsubseteq)$ je f t.ž.

1) f prosté
2) $\forall a, b \in X: a \preceq b \iff f(a) \sqsubseteq f(b)$
3) ~~$\forall a, b \in X: f(a)$~~

Věta: $\forall (X, \preceq)$ $\exists$ vnoření do $(2^X, \subseteq)$ i nekonečné

Důkaz: Def. $f(x) := \{y \in X \mid y \preceq x\}$

1. prosté: $\forall x \; x \in f(x)$

 kdyby $x \neq y$ bylo $f(x) = f(y)$: $x \preceq y \wedge y \preceq x$

2. $x \preceq y \Rightarrow f(x) \subseteq f(y)$

 $f(x) \subseteq f(y) \Rightarrow x \in f(y) \Rightarrow x \preceq y$

Věta o Dilworthovi a řetězcích

Df. Řetězec v ČUM $(X, \preceq)$ ... $Y \subseteq X$ je řetězec $\equiv \forall a, b \in Y: a \preceq b \vee b \preceq a$

antiřetězec $Y \subseteq X \equiv \forall a, b \in Y, a \neq b: a \npreceq b \wedge b \npreceq a$

$\alpha(\preceq) :=$ max. velikost antiřetězce
$\omega(\preceq) :=$ max. délka řetězce

Věta (o Dlouhém a širokém):
Pro každou konečnou ČUM $(X, \preceq)$ platí $\alpha(\preceq) \cdot \omega(\preceq) \geq |X|$

Dk. Chceme sestrojit „vrstvy" $X_1 \dots X_k$ $(\bigcup_i X_i = X)$
t. ž. $\forall i$ X_i je antiřetězec ... $\alpha \geq |X_i|$
a $\exists$ řetězec procházející všemi vrstvami $\omega \geq k$
$|X| = \sum |X_i| \leq \sum \alpha \leq \alpha \cdot \omega$
Vyrábíme postupně $X_1 \dots X_k$
$X_i :=$ min. prvky $X \setminus \bigcup_{j<i} X_j$
· rozklad
· antiřetězcová vlastnost
· řetězcová vlastnost – indukcí od nejvyšší
vrstvy, vždy přidáme prvek z nižší vrstvy

Orientované grafy

$E \subseteq V^2 \setminus \Delta_V$

acyklický orientovaný graf (DAG)
$\exists$ vrchol $\deg^{in}(v) = 0$, $\deg^{out}(v) = 0$ → topologické uspořádání
Orientovaný strom (víc definic / nejč. všechny hrany orientovat z/do kořene)

Věta Orientovaný graf má topologické uspořádání $\Leftrightarrow$ je acyklický.

Sbírání ovoce po ose

8. 1. 2013

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ $\qquad i_1 < i_2 < \dots < i_k$

$x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$

Erdősovo–Szekeresovo lemma:

$\forall n \ \forall x_1 \dots x_{n^2+1} \in \mathbb{R}$

$\exists$ monotónní podposloupnost délky $n+1$

Dk: Def. uspořádání $\preceq$ na $\{1 \dots n^2+1\}$

$i \preceq j \equiv i \le j \wedge x_i \le x_j$

Opz. R, S na X, $R \cap S$ je uspořádání

řetězec = neklesající podposloupnost

antiřetězec = klesající podposloupnost

Def. De Bruijnova posloupnost: posloupnost 0, 1 délky 2^n obsahující jako souvislou podposl. každou n-tici 0, 1.

Věta: $n \ge 1$ $\exists$ De Bruijnova posloupnost délky 2^n

Def. Orientovaný graf G je vyvážený $\equiv \forall v \in V(G)$ $\deg^{in}(v) = \deg^{out}(v)$

Platónská tělesa

(1) konvexní

(2) stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky

(3) v každém vrcholu se potkává stejně hran

Promítáme ze středu opsané koule na její povrch → graf

(1') graf rovinný $\Rightarrow v + f = e + 2$

(2') $\forall$ stěna je k-cyklus $k \cdot f = 2e$ $\quad k \in \{3, 4, 5\}$

(3') $\forall$ vrchol stupně d $\quad d \cdot v = 2e$, $d \in \{3, 4, 5\}$

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$