Domácí úkol č. 4

Zadáno: 23. a 31. 10.
Deadline: 6. a 7. 11.

1. Vypočtěte derivaci následující funkce v libovolném bodě x, kde derivace existuje, a tyto body určete:

$$f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}})\,.$$

2. Odvoďte (= poskytněte alespoň náznak důkazu) vzorec pro n-tou derivaci součinu dvou funkcí

$$(f \cdot g)^{(n)} = ...$$

a pomocí něj spočítejte $f^{(50)}(x)$ je-li $f(x) = x^2 \sin 2x$.

Řešení

1.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\mathrm{e}^x + \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}} \left(\mathrm{e}^x + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}} \mathrm{e}^{2x} \cdot 2 \right) \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^x + \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}} \frac{\mathrm{e}^x \left(\sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}} + \mathrm{e}^x \right)}{\sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}}, \end{aligned}$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

2. Platí Leibnizova formule

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)},$$

která se dokáže matematickou indukcí stejně jako binomická věta (viz druhé cvičení).

Volbou $f(x) = \sin 2x$ a $g(x) = x^2$ lehce zjistíme, že z celé sumy obsahující 51 sčítanců zůstanou nenulové jen první tři členy, protože třetí a vyšší derivace g jsou nulové. Zároveň platí

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cdot 2^{2k} \sin 2x \qquad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cdot 2^{2k+1} \cos 2x$$

a proto

$$
\begin{aligned}
(x^2 \sin 2x)^{(50)} &= -2^{50} x^2 \sin 2x + 50 \cdot 2^{49} \cdot 2x \cos 2x + \frac{50 \cdot 49}{2} 2^{48} \cdot 2 \sin 2x \\
&= 2^{49} \left(100x \cos 2x + \left(1225 - 2x^2 \right) \sin 2x \right)
\end{aligned}
$$