Domácí úkol č. 5

Zadáno: 6. a 7. 11.
Deadline: 19. a 21. 11.

Nalezněte následující primitivní funkce na maximálních možných intervalech. Určete i tyto intervaly.

1. $$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

   Hint: K cíli vede substituce $t = \varphi(x)$ pro φ, kterou v zadání nevidíte. Dále se vám může hodit identita $\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1})$.

2. $$\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$$

   Hint: Zkuste substituci $t = \ln x$.

Řešení

1.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} t &= \cos x \\ \mathrm{d}t &= -\sin x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| \\
&= \int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln|t-1| - \ln|t+1|\right) + C = \ln\left(\frac{|t-1|}{|t+1|}\right)^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \ln\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right) + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C
\end{aligned}$$

pro $x \in (k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.

$$
\begin{aligned}
I = \int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{rl} t & = \ln x \\ \mathrm{d}t & = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \sin t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\
&= \left| \begin{array}{rr} f' = \sin t & g = \mathrm{e}^t \\ f = -\cos t & g' = \mathrm{e}^t \end{array} \right| = -\cos t\,\mathrm{e}^t + \int \cos t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\
&= \left| \begin{array}{rr} f' = \cos t & g = \mathrm{e}^t \\ f = \sin t & g' = \mathrm{e}^t \end{array} \right| = -\cos t\,\mathrm{e}^t + \sin t\,\mathrm{e}^t - \int \sin t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Proto

$$
\begin{aligned}
I &= \mathrm{e}^t(\sin t - \cos t) - I \\
I &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t(\sin t - \cos t) + C = \frac{x}{2}\,(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C
\end{aligned}
$$

pro $x \in (0, +\infty)$.