

Domácí úkol č. 6

Zadáno: 19. a 21. 11.

Deadline: 3. a 5. 12.

Nalezněte následující primitivní funkce na maximálních možných intervalech. Určete i tyto intervaly.

1.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^3 x} dx$$

2.

$$\int \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

Hint: Eulerova substituce je nejtěžší, zkuste vymyslet jinou, která využije vztahu $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Řešení

1.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^3 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| \\ &= \int \frac{t}{1 + t^3} dt = \int \frac{t dt}{(t + 1)(t^2 - t + 1)} \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t + 1} + \frac{1}{3} \int \frac{t + 1}{t^2 - t + 1} dt \\ &= -\frac{1}{3} \ln |t + 1| + \frac{1}{6} \int \frac{2t - 1}{t^2 - t + 1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 - t + 1} dt \\ &= -\frac{1}{3} \ln |t + 1| + \frac{1}{6} \ln |t^2 - t + 1| + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt \\ &= -\frac{1}{3} \ln |t + 1| + \frac{1}{6} \ln |t^2 - t + 1| + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t - 1}{\sqrt{3}} \right) + C \\ &= -\frac{1}{3} \ln |\sin x + 1| + \frac{1}{6} \ln |\sin^2 x - \sin x + 1| + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \sin x - 1}{\sqrt{3}} \right) + C \end{aligned}$$

pro $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1-x^2} = \cos t \\ x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int \frac{\cos t}{\cos^3 t} dt \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}(\arcsin x) + C \\ &= \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C \end{aligned}$$

pro $x \in (-1, 1)$.