Domácí úkol č. 7

Zadáno: 20. a 22. 11.
Deadline: 3. a 5. 12.

1. Spočítejte následující limitu (lze použít l'Hospitalovo pravidlo)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$$

2. Najděte reálné a, tak aby platilo

$$\mathrm{e}^x - \cos x \sim x^a, x \to 0$$

Řešení

1. Jde o limitu typu $\frac{0}{0}$ a tak můžeme použít l'Hospitala:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin x^2}{2x \sin x^2 + x^2 \cdot 2x \cos x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{\sin x^2 + x^2 \cos x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x \cos x^2}{4x \cos x^2 - x^2 \cdot 2x \sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2}{2\cos x^2 - x^2 \sin x^2} = \frac{1}{2},$$

kde jsme použili ještě jednou l'Hospitalovo pravidlo opět při limitě typu $\frac{0}{0}$.

2. Hledáme takové $a \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos x}{x^a} \in (0, \infty).$$

Víme, že $\mathrm{e}^0 - \cos 0 = 0$, a tedy pro $a \leq 0$ bude

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos x}{x^a} = \lim_{x\to 0} (\mathrm{e}^x - \cos x) x^{-a} = 0.$$

Pro $a > 0$ je limita $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos x}{x^a}$ typu $\frac{0}{0}$ a můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos x}{x^a} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \sin x}{a x^{a-1}}.$$

Nyní už máme v čitateli funkci, která má v $x = 0$ hodnotu 1 a dále už tak nemůžeme používat l'Hospitala. Na druhou stranu ale víme, že pro $0 < a < 1$ je $a - 1 < 0$ a hodnota získané limity je pak 0 (je to totiž limita $\frac{1}{\infty}$). Pro $a = 1$ máme $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \sin x}{a x^{a-1}} = 1$. Nakonec pro $a > 1$ je $a - 1 > 0$ a limita je tak nekonečno $(\frac{1}{0})$.

Dokázali jsme, že

$$\mathrm{e}^x - \cos x \sim x, x \to 0.$$