Domácí úkol č. 8

Zadáno: 3. a 5. 12.
Deadline: 10. a 12. 12.

1. Nalezněte definiční obor a lokální extrémy funkce

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$$

2. Nalezněte globální extrémy funkce

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

na intervalu $[-3, 10]$.

Řešení

1. Dle přednášky je definiční obor funkce $x^{\frac{1}{n}}$ pro lichá $n \in \mathbb{N}$ celá reálná osa, protože se tato funkce definuje jako inverzní k funkci $n-$té mocniny. V našem případě je proto $x^{\frac{1}{3}}$ funkce s definičním oborem $\mathbb{R}$. Podobně funkce $(1-x)^{\frac{2}{3}}$ má definiční obor $\mathbb{R}$, jde o složenou funkci, která lze zapsat jako $\sqrt[3]{(1-x)^2}$. Zadaná funkce je tak definovaná a spojitá na celém $\mathbb{R}$.

   Dále už můžeme postupovat standardně, spočítáním první derivace:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1-x-2x}{3x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{1-3x}{3x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

   pro $x \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$. Vidíme, že na rozdíl od funkce samotné, derivace není definována v bodech $x = 0, x = 1$, které tak musíme vyšetřit zvlášť.

   Pokud položíme $f'(x) = 0$, dostáváme lehce $1 - 3x = 0$ a tedy $x = \frac{1}{3}$, což je tedy stacionární bod.

Zároveň snadno vidíme, že máme

$$\begin{array}{rll} x < 0 & f'(x) > 0, & f \text{ rostoucí} \\ x \in (0, \dfrac{1}{3}) & f'(x) > 0, & f \text{ rostoucí} \\ x \in (\dfrac{1}{3}, 1) & f'(x) < 0, & f \text{ klesající} \\ x > 1 & f'(x) > 0, & f \text{ rostoucí,} \end{array}$$

a proto funkce $f(x)$ má lokální maximum v bodě $x = \frac{1}{3}$ a lokální minimum v bodě $x = 1$.

2. Snadno vidíme, že $f(x)$ je spojitá funkce na uzavřeném intervalu a nabývá tak svého globálního maxima a minima. Zároveň víme, že tyto se mohou nabývat pouze v krajních bodech a nebo v bodech lokálních extrémů uvnitř daného intervalu.

   Krajní body:

$$f(-3) = 27$$
$$f(10) = 66$$

   Lokální extrémy:

$$f'(x) = 2x - 4,$$

   a proto $x = 2$ je stacionární bod, derivace v něm očividně mění znaménko a je to tak bod lokálního extrému. Navíc $f(2) = 2$. Z výše uvedeného už lehce plyne, že na intervalu $[-3, 10]$ má $f(x)$ globální minimum 2 v bodě $x = 2$ a globální maximum 66 v bodě $x = 10$.