

Domácí úkol č. 9

Zadáno: 10. a 12. 12.

Deadline: 17. a 19. 12.

Nalezněte intervaly, kde je funkce konvexní a konkávní a nalezněte inflexní body:

1.

$$f(x) = x \sin \ln x$$

2.

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 + 1}$$

Řešení

1. Definičním oborem funkce $f(x)$ je \mathbb{R}^+ . Spočítáme první a druhou derivaci:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin \ln x + x(\cos \ln x) \frac{1}{x} = \sin \ln x + \cos \ln x \\ f''(x) &= (\cos \ln x) \frac{1}{x} - (\sin \ln x) \frac{1}{x} = \frac{\cos \ln x - \sin \ln x}{x} \end{aligned}$$

pro $x \in \mathbb{R}^+$. Inflexní body najdeme vyřešením rovnice

$$\cos \ln x - \sin \ln x = 0.$$

Položíme $y = \ln x$ a z vlastností funkcí sinus a cosinus zjistíme, že $\cos y = \sin y$ pro $y = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Zároveň snadno vidíme, že funkce $\cos y - \sin y$ je kladná pro $y \in (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$ a záporná pro $y \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi)$. Odtud už lehce odvodíme, že $f(x)$ je konvexní na intervalech $(e^{-\frac{3\pi}{4}+2k\pi}, e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi})$ a konkávní na intervalech $(e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}, e^{\frac{5\pi}{4}+2k\pi})$, $k \in \mathbb{Z}$. Body $x = e^{\frac{\pi}{4}+k\pi}$ jsou inflexní.

2. Definičním oborem $f(x)$ jsou všechna reálná čísla. Spočítáme opět první dvě derivace

$$f'(x) = -\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2} \frac{2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2 + 1}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 - 2 + 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{((x^2+1)^2 + 1)^2} = \frac{8x^2(x^2+1) - 2(x^2+1)^2 - 2}{((x^2+1)^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{8x^4 + 8x^2 - 2x^4 - 4x^2 - 4}{((x^2+1)^2 + 1)^2} = \frac{6x^4 + 4x^2 - 4}{((x^2+1)^2 + 1)^2}$$

pro $x \in \mathbb{R}^+$. K nalezení inflexních bodů potřebujeme vyřešit rovnici

$$6x^4 + 4x^2 - 4 = 0.$$

Zavedením $y = x^2$ dostáváme kořeny $y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+96}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$. Záporný kořen nám nedá žádné reálné x , z kladného kořene dostáváme inflexní body

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{3}}.$$

Jednoduchou úvahou pak dojdeme k tomu, že pro $x < -\sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{3}}$ a $x > \sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{3}}$ je druhá derivace $f(x)$ kladná a funkce tam tedy je konvexní, zatímco pro $|x| < \sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{3}}$ je druhá derivace záporná a funkce tam je konkávní.