Domácí úkol č. 10

Zadáno: 17. a 19. 12.
Deadline: 7. a 9. 1.

Pomocí Taylorových polynomů spočítejte limity

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x \sin x - x(x+1)}{x^3}.$$

2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x^4) - x^4}{(x-\sin x)^4}.$$

Řešení

1. Elementární Taylorovy rozvoje funkcí nám dají

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x \sin x - x(x+1)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)) - x(x+1)}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x-x^2}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

2. Elementární Taylorovy rozvoje funkcí nám dají

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x^4) - x^4}{(x-\sin x)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^4+\frac{(x^4)^3}{6}+o(x^{12})) - x^4}{(x-(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)))^4}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^{12}}{6}+o(x^{12})}{(\frac{x^3}{6}+o(x^3))^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^{12}}{6}+o(x^{12})}{\frac{x^{12}}{6^4}+o(x^{12})}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}+\frac{o(x^{12})}{x^{12}}}{\frac{1}{6^4}+\frac{o(x^{12})}{x^{12}}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6^4}} = 6^3 = 216$$