Sada příkladů 1/12

Průběh funkcí

Vyšetřujte průběh následujících funkcí

1. $f(x) = 3x - x^3$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$
3. $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$
4. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\cos 2x}$
5. $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} \sin^2 x$
6. $f(x) = \arccos \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

3) $f(x)=\sqrt{8x^2-x^4}$ Def. obor: $8x^2-x^4\ge 0$

$x^2(8-x^2)\ge 0 \Rightarrow 8-x^2\ge 0$

$|x|\le\sqrt{8} \Rightarrow \underline{D_f=[-\sqrt{8},\sqrt{8}]}$

Na def. oboru je f spojitá

$f(-\sqrt{8})=f(\sqrt{8})=0$, f je sudá $(f(-x)=f(x))$

$f(0)=0$, body $x=0$, $x=\pm\sqrt{8}$ jsou jediné průsečíky s osou x

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{8x^2-x^4}}\cdot(16x-4x^3)=\frac{2x\cdot(4-x^2)}{\sqrt{8x^2-x^4}}=\frac{2x(4-x^2)}{|x|\cdot\sqrt{8-x^2}}$$

Není definovaná v $x=0$ a $x=\pm\sqrt{8}$

Limity $f'(x)$: $\lim\limits_{x\to-\sqrt{8}_+} f'(x)=+\infty$, protože $\frac{x}{|x|}<0$ a $4-x^2<0$

$\lim\limits_{x\to\sqrt{8}_-} f'(x)=-\infty$, protože $\frac{x}{|x|}>0$, $4-x^2<0$

$\lim\limits_{x\to 0_-} f'(x)=-\frac{8}{\sqrt{8}}=-\sqrt{8}$, $\lim\limits_{x\to 0_+} f'(x)=\sqrt{8}$

$f'(x)=0$: $4-x^2=0$, $\underline{x=\pm 2}$

	$(-\sqrt{8},-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\sqrt{8})$
$f'(x)$	+	−	+	−
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Body ± 2 jsou lok. maxima

Bod 0 je lok. minimum

$f(\pm 2)=\sqrt{32-16}=4$. Odtud obor hodnot $H_f=[0,4]$

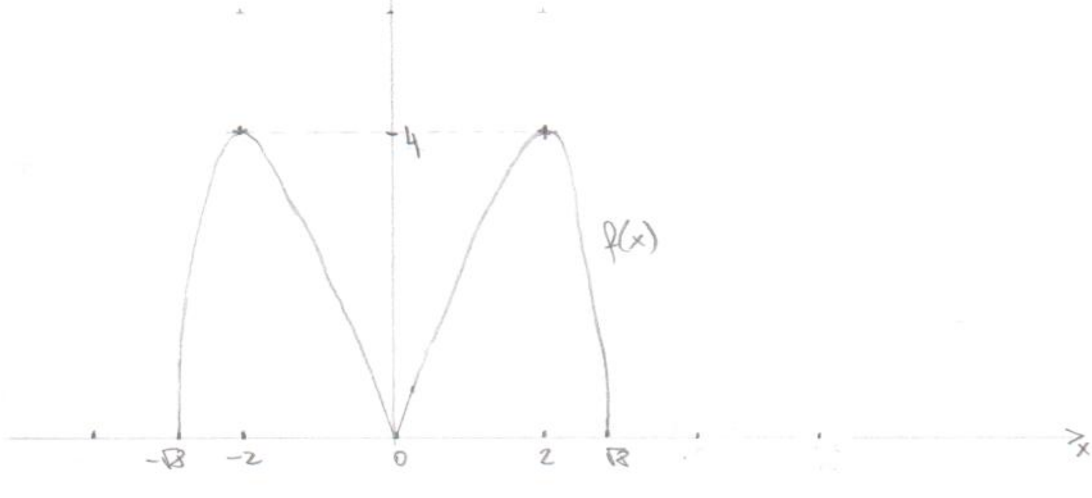
$$f''(x)=\frac{(8-6x^2)\cdot\sqrt{8x^2-x^4}-(8x-2x^3)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{8x^2-x^4}}\cdot(16x-4x^3)}{(8x^2-x^4)}=\frac{(8-6x^2)(8x^2-x^4)-x^2\cdot(8-2x^2)^2}{\sqrt{8x^2-x^4}\cdot(8x^2-x^4)}=$$

$$=\frac{2x^2\cdot(32-\cancel{36}\,28x^2+3x^4)-4x^2\cdot(16-8x^2+x^4)}{(8x^2-x^4)^{3/2}}=\frac{-24x^2+2x^4}{\sqrt{8x^2-x^4}\cdot(8-x^2)}=\frac{2x^2(-12+x^2)}{\sqrt{8x^2-x^4}\cdot(8-x^2)}=\frac{2x^2(x^2-12)}{\sqrt{8x^2-x^4}\cdot(8-x^2)}$$

f'' není definovaná ve stejných bodech jako f'. Možné inflexní body: $x=\pm\sqrt{12}\notin D_f$

$f''<0$ všude, kde je definovaná $\Rightarrow$ f je konkávní na $(-\sqrt{8},0)$ a $(0,\sqrt{8})$.

Asymptoty nejsou.



4) $f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$ D_f: $\cos 2x \neq 0$

$2x \neq \pi/2 + k\pi$, $x \neq \pi/4 + k\pi/2$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pi/4 + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$

f je spojitá na D_f. Čitatel 2π-periodický, jmenovatel π-per.
Dohromady f je 2π-periodická
Čitatel i jmenovatel sudé fce $\Rightarrow$ f je sudá.
Uvnitř periody 4 body, kde f není definovaná: $\pi/4$, $3/4\pi$, $5/4\pi$, $7/4\pi$

$$\left.\begin{array}{l}
\lim_{x\to \pi/4-} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to\pi/4+} f(x) = -\infty \\
\lim_{x\to 3/4\pi-} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to 3/4\pi+} f(x) = -\infty \\
\lim_{x\to 5/4\pi-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 5/4\pi+} f(x) = +\infty \\
\lim_{x\to 7/4\pi-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 7/4\pi+} f(x) = +\infty
\end{array}\right\} \Rightarrow H_f = \mathbb{R}$$

$f(0) = 1$, $f(x) = 0$: $\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + k\pi$, uvnitř $(0, 2\pi)$: $x = \pi/2$, $x = \frac{3\pi}{2}$

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x \cdot 2}{(\cos 2x)^2} = \frac{2\cos x \sin 2x - \sin x \cos 2x}{(\cos 2x)^2} = \frac{4\cos^2 x \sin x - \sin x \cos^2 x + \sin^3 x}{(\cos 2x)^2} =$$

$$= \frac{\sin x (2\cos^2 x + 1)}{(\cos 2x)^2}$$

$f' = 0$: $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = \pi$ na periodě 2π

$f' > 0$: f rostoucí na $(0, \pi/4)$, $(\pi/4, 3\pi/4)$, $(3\pi/4, \pi)$
$f' < 0$: f klesající na $(\pi, 5/4\pi)$, $(5\pi/4, 7\pi/4)$, $(7\pi/4, 2\pi)$

$$f''(x) = \frac{(\cos x(2\cos^2 x + 1) + \sin x(-4\cos x \sin x))(\cos 2x)^2 - \sin x(2\cos^2 x + 1)\cdot 2\cos 2x \cdot (-\sin 2x)\cdot 2}{(\cos 2x)^4}$$

$$= \frac{(2\cos^3 x + \cos x - 4\cos x \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) + 8\sin^2 x \cos x (2\cos^2 x + 1)}{(\cos 2x)^3} =$$

$$= \frac{\cos x}{(\cos 2x)^3}\cdot\left[(2\cos^2 x + 1 - 4\sin^2 x)(\cos 2x) + 4\cdot(4\sin^2 x\cos^2 x) + 8\sin^2 x\right] =$$

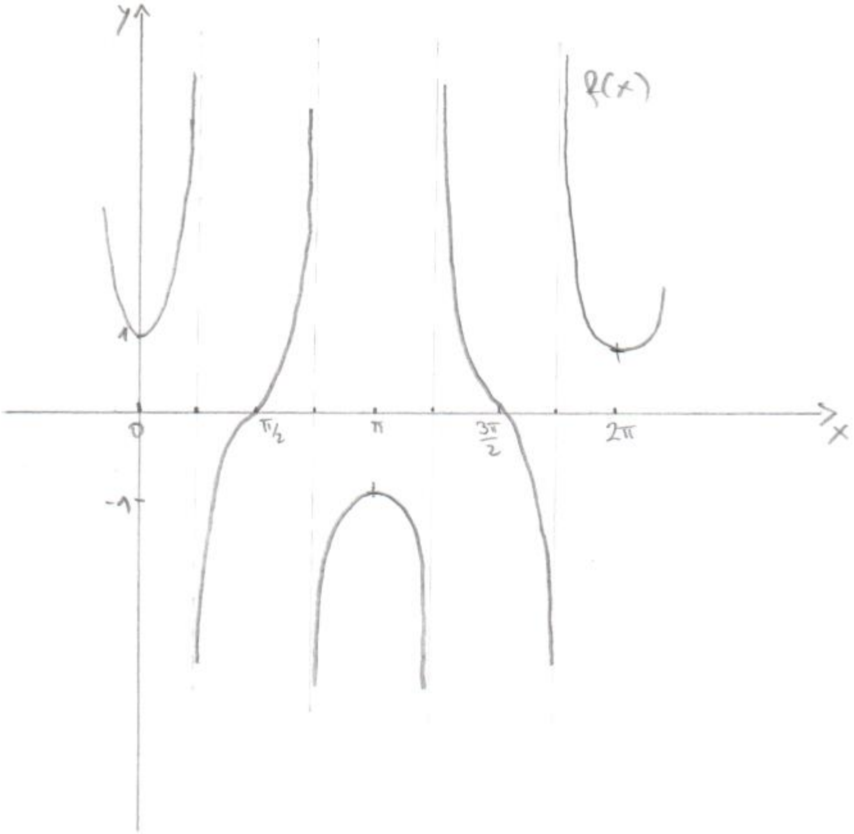
$$= \frac{\cos x}{(\cos 2x)^3}\cdot\left[(3\cos^2 x - 3\sin^2 x)(\cos 2x) + 4(\sin 2x)^2 + 8\sin^2 x\right] =$$

$$= \frac{\cos x}{(\cos 2x)^3}\cdot\left[3(\cos 2x)^2 + 4(\sin 2x)^2 + 8\sin^2 x\right] = \frac{\cos x}{(\cos 2x)^3}\cdot\underbrace{\left[3 + \sin^2 2x + 8\sin^2 x\right]}_{>0!}$$

Inflexní body: $\cos x = 0$ $x = \pi/2$, $x = 3\pi/2$

$f'' > 0$ a f konvexní: $(0, \pi/4)$, $(\pi/2, 3\pi/4)$, $(5\pi/4, 3\pi/2)$, $(7\pi/4, 2\pi)$
$f'' < 0$ a f konkávní: $(\pi/4, \pi/2)$, $(3\pi/4, 5\pi/4)$, $(3\pi/2, 7\pi/4)$

Asymptoty nejsou. $f(0) = 1$, $f(\pi) = -1$ ... lokální extrémy, $x = 0$ ... lok. min
$x = \pi$ ... lok. max



5) $f(x) = e^{-2x}\sin^2 x$

$D_f = \mathbb{R}$, f spojitá všude.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ neexistuje $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $H_f = [0, +\infty)$

Není periodická, sudá ani lichá, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(0) = 0$

$f(x) = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$f'(x) = e^{-2x}\cdot(-2)\cdot\sin^2 x + e^{-2x}\cdot 2\sin x\cos x = 2e^{-2x}\sin x(\cos x - \sin x)$$

Stacionární body: $\sin x = 0$ a $\cos x = \sin x \implies x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
$x = \pi/4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$f' > 0$ a f rostoucí: $(0, \pi/4)$, $(\pi, \frac{5\pi}{4})$, ...
$f' < 0$ a f klesající: $(\pi/4, \pi)$, $(\frac{5\pi}{4}, 2\pi)$, ... $\implies$ Body $k\pi$ jsou lokální minima
Body $\pi/4 + k\pi$ jsou lokální maxima

$$f''(x) = -4e^{-2x}\sin x(\cos x - \sin x) + 2e^{-2x}\cos x(\cos x - \sin x) + 2e^{-2x}\sin x(-\sin x - \cos x)$$
$$= 2e^{-2x}\left[-2\sin x\cos x + 2\sin^2 x + \cos^2 x - \cos x\sin x - \sin^2 x - \cos x\sin x\right]$$
$$= 2e^{-2x}\left[-4\sin x\cos x + 1\right] = 2e^{-2x}\cdot(1 - 2\sin 2x)$$

Inflexní body: $\sin 2x = \frac{1}{2} \implies 2x = \pi/6 + 2k\pi \implies x = \pi/12 + k\pi$
$2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

$x \in \left(\pi/12, \frac{5\pi}{12}\right) \implies f'' < 0$ a f konkávní
$x \in \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\right) \implies f'' > 0$ a f konvexní
atd...

6) $f(x) = \arccos \frac{2x}{x^2+1}$

D_f: Potřebujeme $\frac{2x}{x^2+1} \leq 1$ a $\frac{2x}{x^2+1} \geq -1$

$D_f = \mathbb{R} \Leftarrow$ $2x \leq x^2+1$, $0 \leq x^2-2x+1$, $0 \leq (x-1)^2$ OK; $2x \geq -x^2-1$, $x^2+2x+1 \geq 0$, $(x+1)^2 \geq 0$ OK

f je spojitá

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \arccos 0 = \pi/2$$

$f(0) = \pi/2$ $\quad f(x)=0$: $\frac{2x}{x^2+1} = 1 \Rightarrow x = 1$, $f(1) = 0$

podobně $f(-1) = \arccos(-1) = \pi$

$H_f = [0, \pi]$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}} \cdot \frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^4+2x^2+1-4x^2}} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)\cdot\sqrt{(x^2-1)^2}} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)|x^2-1|}$$

$= \frac{2}{x^2+1} \cdot \operatorname{sgn}(x^2-1)$. Problémové body $x = \pm 1$, tam $f'(x)$ neexistuje

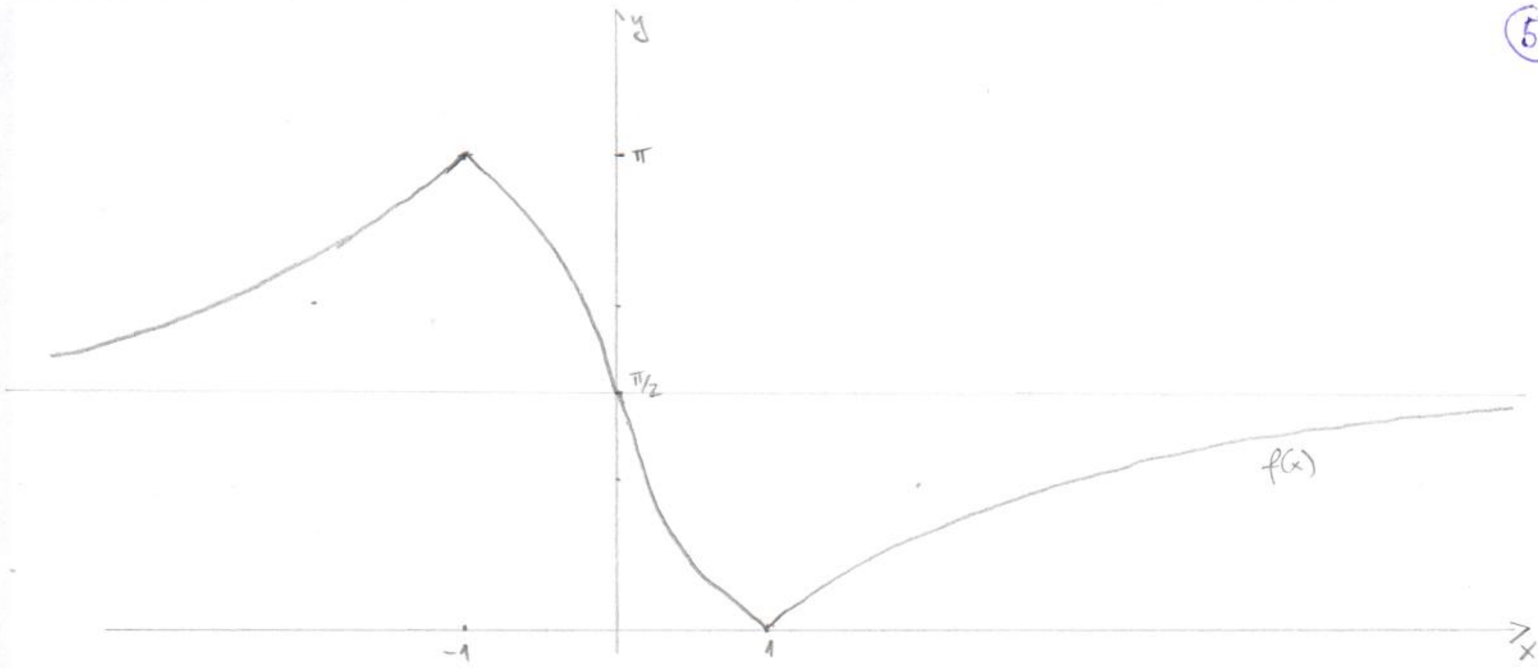
$\lim_{x\to-1_-} f'(x) = 1$ $\quad \lim_{x\to-1_+} f'(x) = -1$ $\quad \lim_{x\to1_-} f'(x) = -1$, $\lim_{x\to1_+} f'(x) = 1$

$f' > 0$ a f rostoucí pro $x \in (-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$
$f' < 0$ a f klesající pro $x \in (-1, 1)$
$\Rightarrow$ v $x = -1$ je lok. max, v $x = 1$ je lok. min

$$f''(x) = 2\operatorname{sgn}(x^2-1)\cdot(-1)\cdot\frac{1}{(x^2+1)^2}\cdot 2x = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}\cdot\operatorname{sgn}(x^2-1)$$

$f'' > 0$ a f konvexní pro $x \in (-\infty, -1)$ a $(0, 1)$
$f'' < 0$ a f konkávní pro $x \in (-1, 0)$ a $(1, +\infty)$
$x = 0$ je inflexní bod

Pro kreslení grafu: $f'(0) = -2$


y
π
π/2
f(x)
-1
1
x

$$f(x) = \sqrt{|x^2-1|} + x$$

$D_f = \mathbb{R}$, spojitá všude na $\mathbb{R}$, bez symetrií a periodicity

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\sqrt{x^2-1} + x}_{\uparrow \text{"}\infty-\infty\text{"} !} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}\cdot\lim \frac{1}{|x|} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\sqrt{x^2-1} + x}_{\text{"}\infty+\infty\text{"}} = +\infty \quad \text{očividně}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}\cdot \mathrm{sgn}(x^2-1)\cdot 2x + 1 = \underline{\frac{x\cdot\mathrm{sgn}(x^2-1)}{\sqrt{|x^2-1|}} + 1}$$

Není definováno v bodech $x = \pm 1$! Lokální extr.:

$$\frac{x\cdot\mathrm{sgn}(x^2-1)}{\sqrt{|x^2-1|}} + 1 = 0 \qquad x\cdot\mathrm{sgn}(x^2-1) = -\sqrt{|x^2-1|}$$

PS záporná $\Rightarrow$ buď $x<0$ a $\mathrm{sgn}(x^2-1)>0$ tj. $x<-1$

nebo $x>0$ a $\mathrm{sgn}(x^2-1)<0$ tj. $x\in(0,1)$

a) $x<-1$: $x = -\sqrt{x^2-1}$

$-x = \sqrt{x^2-1}$

$x^2 = x^2-1$ nemá řešení

b) $x\in(0,1)$: $-x = \sqrt{1-x^2}$

$x^2 = 1-x^2 \qquad 2x^2 = 1,\ x^2 = 1/2,\ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-$ nelze $\to \boxed{x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Intervaly monotonie:

	$x<-1$	$(-1,\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$	$x>1$
f'	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

.... je potřeba promyslet!

$\Rightarrow$ -1 je bod lok. minima $\quad f(-1) = -1$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ je bod lok. maxima $\quad f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$

1 je bod lok. minima $\quad f(1) = 1$

Jednostranné derivace

$f'_-(-1) = \lim_{x\to-1_-} f' = -\infty \qquad f'_-(1) = \lim_{x\to1_-} f' = -\infty$

$f'_+(-1) = \lim_{x\to-1_+} f' = +\infty \qquad f'_+(1) = \lim_{x\to1_+} f' = +\infty$

Také $\lim_{x\to-\infty} f' = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 1 = -1+1 = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f' = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 1 = 2$

$\to H_f = [-1, +\infty)$

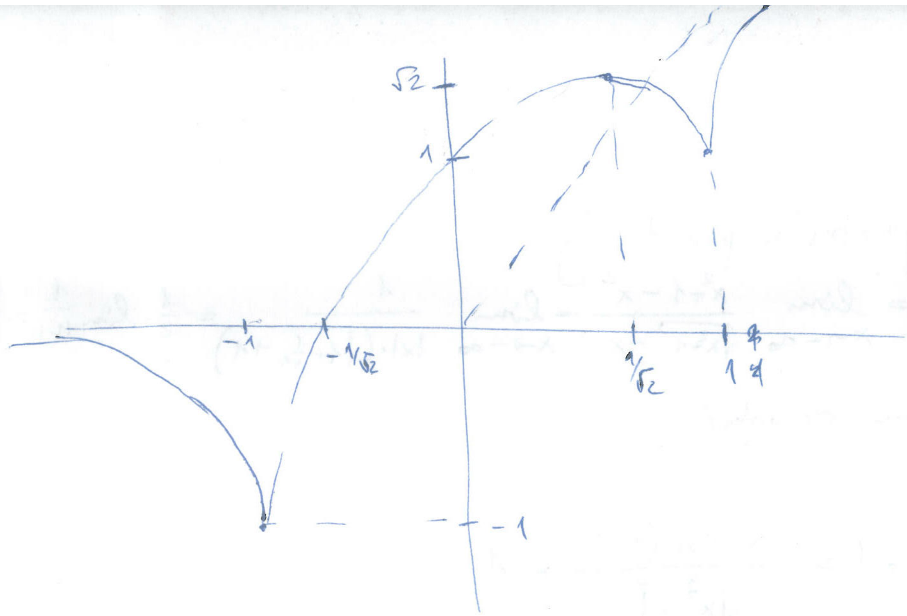
$$f''(x) = \frac{\mathrm{sgn}(x^2-1)\cdot\sqrt{|x^2-1|} - x\cdot\mathrm{sgn}(x^2-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}\cdot\mathrm{sgn}(x^2-1)\cdot 2x}{|x^2-1|} = \frac{\mathrm{sgn}(x^2-1)|x^2-1| - x^2}{|x^2-1|\cdot\sqrt{|x^2-1|}}$$

$$= \frac{x^2-1-x^2}{|x^2-1|\cdot\sqrt{|x^2-1|}} = -\frac{1}{|x^2-1|^{3/2}} < 0$$

$\Rightarrow f$ je konkávní na $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ a $(1,+\infty)$ ale ne na delších intervalech. Infl. body nejsou.

Asymptota: $y = Ax+B$, $A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1+1 = 2$, $B = \lim f(x) - Ax = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-1} - x = 0$

$\Rightarrow$ AS: $y = 2x$



√2
1
-1
-1
-1/√2
1/√2
1