Různé: Výběr toho nejdůležitějšího z celého semestru

1) Elementární funkce, úpravy výrazů atd.

- DEFINIČNÍ OBORY :
  - nula ve jmenovateli
  - def. obor vnitřních funkcí
  - řetězení složených funkcí

Příklad: Najděte def. obor fce $f(x) = \dfrac{1}{tg\left(\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)}$

- N-TÁ ODMOCNINA: $x^{1/n}$ je definována jako inverzní k x^n, pro lichá n je tak definovaná na celém $\mathbb{R}$!!

  Obecně tak ovšem neplatí např. $x^{1/n} = x^{2/2n}$. Pro lichá n mají tyto funkce rozdílné definiční obory.
- $n = 1$: ! $x \neq x^{2/2} = \sqrt{x^2}$! VŽDY $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$

2) LIMITY

- škála: exp je silnější než libovolně velká mocnina x (v nekonečnu) a libovolně malá mocnina x je silnější než $\log x$
- jednostranné limity: funkce nedefinovaná v nějakém bodě může mít různé jednostranné limity (viz $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$)
- limita typu 1^∞: $\lim f(x)^{g(x)} = \exp \lim g(x) \ln f(x) = \exp \lim \dfrac{\ln f(x)}{f(x)-1} \cdot g(x) \cdot (f(x)-1)$

  $= \exp \lim g(x) \cdot (f(x)-1)$

  VŽDY STEJNÉ PRVNÍ KROKY
- v $x = 0$ rozhodují nejnižší mocniny: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+x^2+x^3+x^4}{2x+3x^2+4x^3+5x^4} = 1/2$

  v $x = +\infty$ rozhodují nejvyšší mocniny: $\lim\limits_{x\to +\infty}$ —— " —— $= 1/5$
- Standardní triky: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (podobně pro vyšší odmocniny)

$$1 - \cos x = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$$

3) DERIVACE

- je potřeba umět derivovat rychle a přesně. Bez toho nelze uspět.
- při vyšetřování průběhu pozor na body, kde není derivace definovaná, mohou tam být extrémy. Je nutné počítat jednostranné derivace v bodech, kde není derivace definovaná, ale f má konečnou limitu

$$\boxed{f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} f(x)}$$

- upravit první derivaci před derivováním podruhé

4) PRIMITIVNÍ FUNKCE

- standardní substituce (tabulka) + umět integrovat racionální funkce
- u goniometrických substitucí se objevuje lepení
- znát teorii (dvě věty o substituci, umět rozlišit použití a ověřit předpoklady)
- poznat typ příkladů na první větu o sub. a per partes

5) PRŮBĚHY FUNKCÍ

- monotonie a extrémy skrz znaménko první derivace
- asymptoty (jen u funkcí, které $\sim x$ nebo ~ 1 v nekonečnu)

$y = kx + q$ je asymptota : $\boxed{k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}}$, $\boxed{q = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - kx}$

- některé vlastnosti nejsou slučitelné $\Rightarrow$ pokud vyjdou, hledejte chybu (například rostoucí + konvexní + konečná limita v nekonečnu)

6) TAYLORŮV ROZVOJ

- nepočítat z definice, raději pomocí rozvojů elementárních funkcí
- manipulace s $o(x^n)$ $(x \to 0)$:

$$x^a \cdot o(x^b) = o(x^{a+b})$$

$$\left(o(x^b)\right)^n = o(x^{nb})$$

$$o(x^b) = o(x^c) \quad \text{pro lib. } c < b$$

Dělení Taylorů: Př: $\operatorname{tg}(x) = \sin(x) : \cos(x)$

$$= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) : \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right)$$

Na rozdíl od dělení polynomů zde postupujeme od nejnižších mocnin

$$\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) : \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) = \underline{\underline{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)}}$$

$$-\left[x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^5)\right]$$

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + o(x^5)$$

$$-\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + o(x^5)\right]$$

$$\frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$-\left[\frac{2}{15}x^5 + o(x^5)\right]$$

$$o(x^5)$$

Na závěr:
- Určitě se naučte hyperbolické a hyperbolometrické funkce
- Součtové vzorce pro goniometrické fce
- Vzorce typu $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot \ldots$

  $(a-b)^3 = \ldots$