Písemka č. 1 - 21. 11. 9:50

1. Nechť $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Najděte limitu
$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}(ax^2)}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^2}-2}}$$

2. Najděte primitivní funkci k $f(x)$ na maximálních možných intervalech a najděte rovněž tyto intervaly
$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}\sin x$$

Řešení

1.
$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}(ax^2)}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^2}-2}} = \lim_{x\to 0}\exp\frac{\ln(\sqrt{1+\operatorname{tg}(ax^2)})}{\sqrt[3]{8-x^2}-2} =$$
$$= \exp\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sqrt{1+\operatorname{tg}(ax^2)})}{\sqrt{1+\operatorname{tg}(ax^2)}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(ax^2)}-1}{\sqrt[3]{8-x^2}-2} =$$
$$= \exp 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(ax^2)}{8-x^2-8}\cdot\frac{\sqrt[3]{(8-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8-x^2}+4}{\sqrt{1+\operatorname{tg}(ax^2)}+1} =$$
$$= \exp\left(-\frac{12a}{2}\lim_{x\to 0}\right)\frac{\sin(ax^2)}{ax^2\cos(ax^2)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{6a}}$$

2. Budeme chtít integrovat per partes a jak se ukáže, po cestě budeme potřebovat znát integrály z funkcí
$$I = \int \mathrm{e}^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x$$
$$J = \int \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$$
Pomocí per partes, kde vždy derivujeme funkci e^{2x} a integrujeme goniometrické funkce dostáváme postupně:
$$I = -\mathrm{e}^{2x}\cos x + 2J = -\mathrm{e}^{2x}\cos x + 2\,\mathrm{e}^{2x}\sin x - 4I$$
$$5I = \mathrm{e}^{2x}(2\sin x - \cos x)$$
$$I = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}(2\sin x - \cos x)$$
$$J = \frac{1}{2}\left(I + \mathrm{e}^{2x}\cos x\right) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

Nyní už snadno najdeme primitivní funkci k $f(x)$ opět integrací per partes.

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x = xI - \int I\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{5}x\,\mathrm{e}^{2x}(2\sin x - \cos x) - \frac{2}{5}I + \frac{1}{5}J + C \\
&= \frac{1}{5}x\,\mathrm{e}^{2x}(2\sin x - \cos x) - \frac{2\,\mathrm{e}^{2x}}{25}(2\sin x - \cos x) + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{25}(\sin x + 2\cos x) + C \\
&= \frac{1}{25}\,\mathrm{e}^{2x}\,(10x\sin x - 5x\cos x - 3\sin x + 4\cos x) + C
\end{aligned}
$$

Vše je definováno pro $x \in \mathbb{R}$.