Písemka č. 2 - 19. 12. 9:50

1. Najděte takové $a \in \mathbb{R}$, aby platilo

$$f(x) = \sinh x - \sin x \sim x^a, \qquad x \to 0.$$

Najděte takové $b \in \mathbb{R}$, aby

$$f(x) - bx^a = o(x^a), \qquad x \to 0$$

a najděte takové $c \in \mathbb{R}$, že platí

$$f(x) - bx^a \sim x^c, \qquad x \to 0.$$

2. Najděte infimum a supremum funkce

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{1+x^2}}$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

Řešení

1. Očividně je $f(0) = 0$, takže $a > 0$ a dále budeme postupně několikrát l'Hospitalit, dokud neuvidíme v čitateli výraz, který je v nule nenulový.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^a} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{ax^{a-1}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x + \sin x}{a(a-1)x^{a-2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x + \cos x}{a(a-1)(a-2)x^{a-3}}.$$

Zde poprvé je v čitateli výraz, který má v nule nenulovou hodnotu (konkrétně hodnotu 2), takže aby byla původní limita nenulová, potřebujeme $a - 3 = 0$, tedy $a = 3$.

Dále dle definice potřebujeme, aby platilo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - \sin x - bx^3}{x^3} = 0.$$

Stejný postup jako výše povede k následujícímu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - \sin x - bx^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x - 3bx^2}{3x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x + \sin x - 6bx}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x + \cos x - 6b}{6} = \frac{2-6b}{6}.$$

Aby výsledná limita byla nula, musí být $2 - 6b = 0$, a tedy $b = \frac{1}{3}$.

Dále lehce z výše uvedeného postupu lehce vypozorujeme, že derivacemi funkce $\sinh x - \sin x$ dostaneme jen čtyři možné výrazy, které se budou postupným derivováním stále opakovat. Z nich tři výrazy mají v nule hodnotu nula a jediný $\cosh x + \cos x$ má v nule hodnotu dva. Je tak zřejmé, že abychom při opakovaném použití l'Hospitala v čitateli postupným derivováním zadané funkce dostali nenulovou limitu v nule, musíme funkci zderivovat sedmkrát. Potom

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - \sin x - \frac{1}{3}x^3}{x^7} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x + \cos x}{7!} = \frac{2}{7!},$$

a uvědomíme si, že při každém použití l'Hospitala jde o limitu typu „$\frac{0}{0}$". Proto tedy $c = 7$.

2. Definiční obor $f(x)$ je celé $\mathbb{R}$ a f je spojitá na celém definičním oboru. Nejprve spočítáme limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Dále spočítáme derivaci a budeme hledat stacionární body. Máme

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{1+x^2}} \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \mathrm{e}^{\frac{x}{1+x^2}} \frac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}$$

a vidíme, že $f' = 0$ v bodech $x = \pm 1$, přičemž f je rostoucí na $(-1, 1)$ a klesající na $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$. Proto je v bodě $x = -1$ lokální minimum a v bodě $x = 1$ lokální maximum, jejichž hodnoty jsou $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, resp. $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$. Ze zjištěného průběhu funkce můžeme usoudit, že $\sup f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ a $\inf f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.