Písemka č. 2 - 17. 12. 14:00

1. Najděte takové $a \in \mathbb{R}$, aby platilo
$$f(x) = 1 - \cos x - \frac{1}{2}x\sin x \sim x^a, \qquad x \to 0.$$
Najděte takové $b \in \mathbb{R}$, aby
$$f(x) - bx^a = o(x^a), \qquad x \to 0$$
a najděte takové $c \in \mathbb{R}$, že platí
$$f(x) - bx^a \sim x^c, \qquad x \to 0.$$

2. Najděte intervaly konvexity a konkávnosti funkce
$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{4+x^2}\right)$$
pro $x \in \mathbb{R}$.

Řešení

1. Očividně platí, že $f(0) = 0$, takže $a > 0$. Nyní nám tedy nezbývá než l'Hospitalit tak dlouho, než v čitateli dostaneme výraz, který bude v nule nenulový. Máme
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x - \frac{1}{2}x\sin x}{x^a} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x}{ax^{a-1}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}x\sin x}{a(a-1)x^{a-2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin x}{a(a-1)x^{a-3}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cos x}{a(a-1)(a-3)x^{a-4}}.\end{aligned}$$
Nyní jsme dostali do čitatele výraz, který je v nule nenulový a abychom dostali nenulovou limitu, musí být $a = 4$, pak limita vyjde $\frac{1}{24}$. To je zároveň hledané číslo b, jak lehce ověříme opakováním stejného postupu:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x - \frac{1}{2}x\sin x - bx^4}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x - 4bx^3}{4x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x - 12bx^2}{12x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin x - 12bx}{12x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cos x - 12b}{12}.\end{aligned}$$

Výsledek se rovná nule pouze pro $b = \frac{1}{24}$. Konečně aplikace ještě jednou analogického postupu vede k identifikování c:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x - \frac{1}{2}x\sin x - \frac{1}{24}x^4}{x^c} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{6}x^3}{cx^{c-1}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x\sin x - \frac{1}{2}x^2}{c(c-1)x^{c-2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}x}{c(c-1)x^{c-3}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2c(c-1)(c-3)x^{c-4}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2c(c-1)(c-3)(c-4)x^{c-5}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2c(c-1)(c-3)(c-4)(c-5)x^{c-6}}.$$

Teprve zde dostáváme v čitateli výraz různý od nuly, takže nenulovou limitu získáme volbou $c = 6$.

2. Definiční obor $f(x)$ je celé $\mathbb{R}$, nikdy nemůžeme dostat nulu ve jmenovateli ani nekladné číslo uvnitř logaritmu.

$$f'(x) = \frac{4+x^2}{1+x^2} \cdot \frac{2x(4+x^2) - (1+x^2)2x}{(4+x^2)^2} = \frac{6x}{(4+x^2)(1+x^2)}$$

a dále

$$f''(x) = \frac{6(4+x^2)(1+x^2) - 6x2x(1+x^2) - 6x(4+x^2)2x}{(4+x^2)^2(1+x^2)^2}$$
$$= 6\frac{4+5x^2+x^4-2x^2-2x^4-8x^2-2x^4}{(4+x^2)^2(1+x^2)^2}$$
$$= 6\frac{4-5x^2-3x^4}{(4+x^2)^2(1+x^2)^2}.$$

Pro zjištění inflexních bodů musíme vyřešit rovnici

$$3x^4 + 5x^2 - 4 = 0,$$

což vede substitucí $y = x^2$ na $3y^2 + 5y - 4 = 0$, která má kořeny

$$y_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+48}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{6}.$$

Jeden kořen je záporný a nedá tak žádná reálná x, druhý kořen je kladný a vede k inflexním bodům

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-5+\sqrt{73}}{6}}, x_1 < x_2.$$

Lehce zjistíme, že například v nule je druhá derivace kladná a proto získáváme

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, x_1) \qquad &\Rightarrow \qquad f \text{ konkávní} \\ x \in (x_1, x_2) \qquad &\Rightarrow \qquad f \text{ konvexní} \\ x \in (x_2, +\infty) \qquad &\Rightarrow \qquad f \text{ konkávní.} \end{aligned}$$