Domácí úkol č. 1

Zadáno: 25. a 26. 2.
Deadline: 11. a 12. 3.

1. Spočítejte
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,\mathrm{d}x$$
2. Vyšetřete konvergenci integrálu
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení

1. $f(x)$ je jistě π-periodická funkce, která je navíc symetrická i kolem $\frac{\pi}{2}$, takže platí $I = 4I_0$, kde
$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,\mathrm{d}x.$$
Dále použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$ a dostáváme
$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{(1+t^2)^2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{(1+\sqrt{2}t+t^2)(1-\sqrt{2}t+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{2}t+t^2} + \frac{1}{1-\sqrt{2}t+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}+(t+\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \frac{1}{\frac{1}{2}+(t-\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(\sqrt{2}t+1)^2} + \frac{1}{1+(\sqrt{2}t-1)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t+1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t-1)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$
Odtud už zřejmě $I = 2\sqrt{2}\pi$.
2. Všimneme si, že $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$.

   Na okolí nuly je $f(x) \sim x^{-\frac{1}{2}}$ a protože $-\frac{1}{2} > -1$, integrál tam konverguje na základě limitního srovnávacího kritéria.

Na okolí jedničky je $f(x) \sim (1-x)^{-\frac{1}{2}}$, což je stejné chování jako $y^{-\frac{1}{2}}$ na okolí nuly (jednoduchá substituce $y = 1-x$). Opět tedy díky limitnímu srovnávacímu kritériu vidíme, že integrál na okolí jedničky konverguje.

Žádné další problémové body na intervalu $(0, 1)$ nejsou, takže integrál konverguje.