

Domáci úkol č. 2

Zadáno: 11. a 12. 3.

Deadline: 18. a 19. 3.

1. Nalezněte obsah oblasti ohraničené lemniskátou

$$r = 4 \sin^2 \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

2. Spočtete objem tělesa vzniklého rotací oblouku kardioidy

$$r = a(1 + \cos \varphi), \quad \varphi \in (0, \pi)$$

kolem osy x .

Řešení

1. Postupujeme podle vzorce 1c).

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 16 \sin^4 \varphi \, d\varphi = 8 \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi \, d\varphi$$

Vyjádříme sudou mocninu $\sin x$ pomocí $\cos x$, $\cos 2x$ a $\cos 4x$.

$$\sin^4 x = (1 - \cos^2 x)^2 = 1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x$$

a

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{\cos 2x + 1}{2} \\ \cos^4 x &= \frac{\cos 4x + 4 \cos 2x + 3}{8} \end{aligned}$$

a proto

$$\sin^4 x = 1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x = \frac{\cos 4x - 4 \cos 2x + 3}{8}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} S &= 8 \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} (\cos 4\varphi - 4 \cos 2\varphi + 3) \, d\varphi \\ &= \left[\frac{\sin 4\varphi}{4} - 2 \sin 2\varphi + 3\varphi \right]_0^{2\pi} = 6\pi. \end{aligned}$$

2. Postupujeme podle vzorce 2c)

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}\pi \int_0^\pi a^3(1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi \, d\varphi \\ &= |t = 1 + \cos \varphi| = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^2 t^3 \, dt = \frac{8}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$