Domácí úkol č. 3

Zadáno: 13. a 17. 3.
Deadline: 26. a 25. 3.

1. Nalezněte všechna řešení rovnice

$$y' = \frac{2xy^2}{1-x^2}$$

splňující $y(0) = 1$ na maximálních možných intervalech.

2. Nalezněte obecné řešení rovnice

$$y' = \frac{y}{x} \cos \ln \frac{y}{x}.$$

Řešení

1. Předně si uvědomíme, že pravá strana není definovaná pro $x = \pm 1$ a protože hledáme řešení procházející bodem $x = 0$, tak maximální interval může být $x \in (-1, 1)$. Dále vidíme, že $y = 0$ je konstantní řešení, nicméně to nesplňuje $y(0) = 1$. Dále postupujeme pro $y \neq 0$. Provedeme separaci proměnných a integrujeme

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{1-x^2} = -\ln|1-x^2| + C$$

Odtud po přejmenování C na $-C$

$$y = \frac{1}{C + \ln|1-x^2|},$$

a to samozřejmě jen na takových intervalech, kde jmenovatel není nula.

Dopočítáme konstantu dosazením počáteční podmínky: $1 = \frac{1}{C}$, a tedy $C = 1$. Hledané řešení je tedy

$$y = \frac{1}{1 + \ln(1-x^2)}.$$

Najdeme k němu ještě definiční obor, potřebujeme $(1 - x^2) \neq \mathrm{e}^{-1}$, tedy $x \neq \pm\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-1}}$. Definiční obor nalezeného řešení je tak interval $(-\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-1}}, \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-1}})$

Lepení na konstantní řešení nepřichází v úvahu, protože nalezené řešení splňuje $y(x) > 0$ na svém definičním oboru.

2. Protože $x \neq 0$, hledáme řešení na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$. Zároveň očividně $\frac{y}{x} > 0$, takže hledané řešení musí být kladné pro kladná x a záporné pro záporná x. Navíc očividně $y \neq 0$.

   Jde o homogenní rovnici, takže provedeme standardní substituci $z = \frac{y}{x}$, tedy $y' = (xz)' = z + xz'$. Dostáváme

$$z + xz' = z \cos \ln z$$

   a tedy

$$z' = \frac{1}{x} z(\cos \ln z - 1).$$

   Všimneme si, že $z = 1$ je konstantní řešení a stejně tak $z = \exp 2k\pi$. Provedeme separaci proměnných a integrujeme.

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z(\cos \ln z - 1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln |x| + C.$$

   Na levé straně substitucí $t = \ln z$ dostaneme $\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t - 1}$, což musíme zintegrovat substitucí $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$. Ta vede na integrál $\int \frac{-\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{1}{u}$ a dostáváme tak

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} = \operatorname{cotg} \frac{t}{2} = \operatorname{cotg} \frac{\ln z}{2} = \operatorname{cotg} \ln \sqrt{z} = \ln |x| + C.$$

   Vyjádříme z pomocí x a dáváme pozor na to, že $\operatorname{cotg} z$ je prostá funkce jen na určitých intervalech, takže při jejím invertování musíme být přesní.

$$\begin{aligned} \ln \sqrt{z} &= \operatorname{arccotg} (\ln |x| + C) + k\pi \\ \sqrt{z} &= \exp(\operatorname{arccotg} (\ln |x| + C) + k\pi) \\ z &= \exp(2\operatorname{arccotg} (\ln |x| + C) + 2k\pi) \end{aligned}$$

   a nakonec tedy

$$y = x \exp(2\operatorname{arccotg} (\ln |x| + C) + 2k\pi)$$

   spolu s řešeními

$$y = x \exp 2k\pi$$

   na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Po chvilce přemýšlení zjistíme, že lepit nemůžeme, protože v $x = 0$ nedává zadání smysl a pro jiná konečná x nedosáhnou netriviální řešení hodnot konstantních řešení $z = \exp 2k\pi$.