

Domácí úkol č. 4

Zadáno: 18. a 19. 3.

Deadline: 25. a 26. 3.

1. Najděte právě to řešení rovnice

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x),$$

které je omezené pro $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

2. Nalezněte všechna řešení rovnice

$$xy' + y = y^2 \ln x,$$

která splňují $y(1) = 1$.

Řešení

1. Rovnice, jak je zadaná, nemá žádný problematický bod ani v proměnné x , ani v neznámé y . Abychom ji však mohli vyřešit, vydělíme ji $\sin 2x$, což není ekvivalentní úprava pro $x = k\frac{\pi}{2}$. Dostáváme tak

$$y' - \frac{y}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x},$$

což vyřešíme metodou integračního faktoru. Máme

$$p(x) = -\frac{1}{\sin x \cos x}$$
$$P(x) = -\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = -\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos^2 x} = -\ln |\operatorname{tg} x| = \ln |\operatorname{tg} x|^{-1}$$

$$\exp(P(x)) = |\operatorname{tg} x|^{-1}$$

a protože je integrační faktor určen až na multiplikativní konstantu, budeme používat $\frac{\cos x}{\sin x}$. Dále už jednoduše

$$\int q(x) \exp(P(x)) dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + C,$$

a proto obecné řešení je

$$y = -\frac{1}{\cos x} + C \operatorname{tg} x = \frac{C \sin x - 1}{\cos x}.$$

Řešení jsme našli jen na intervalech $(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2})$. Okamžitě ale vidíme, že jej můžeme spojitě dodefinovat v bodech $k\pi$, protože tam je nalezené řešení dobře definované. Hledáme řešení, které je omezené pro $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, tedy chceme najít takové C , aby

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{C \sin x - 1}{\cos x} \in \mathbb{R}.$$

Protože $\cos x \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, musíme určitě mít $C \sin x - 1 \rightarrow 0$, což dává $C = 1$. Ověříme, že je naše řešení skutečně omezené na okolí $\frac{\pi}{2}$ například l'Hospitalem:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -\frac{\cos x}{\sin x} = 0 \in \mathbb{R}.$$

Hledané řešení je $y = \frac{\sin x - 1}{\cos x}$, dodefinované nulou v bodě $\frac{\pi}{2}$, které je takto dobře definované na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

2. Rovnice dává smysl jen na $x > 0$. Jde o Bernoulliovu rovnici s $\alpha = 2$, $y = 0$ je triviální řešení. Další řešení hledáme substitucí $z(x) = y^{1-\alpha}(x) = y^{-1}(x)$. Proto $z'(x) = -y^{-2}(x)y'(x)$. Po vydělení původní rovnice výrazem $xy^2(x)$ dostáváme

$$y^{-2}y' + y^{-1}x^{-1} = x^{-1} \ln x$$

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x}.$$

Dále postupujeme standardně metodou integračního faktoru.

$$p(x) = -\frac{1}{x}$$

$$P(x) = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| = \ln|x|^{-1}$$

$$\exp(P(x)) = |x|^{-1},$$

ale stejně nás zajímá jen $x > 0$, takže použijeme x^{-1} . Pomocí per partes máme

$$\int q(x) \exp(P(x)) dx = -\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{dx}{x^2} = \frac{\ln x + 1}{x} + C.$$

Díky tomu dostáváme obecné řešení

$$z(x) = Cx + 1 + \ln x$$

a konečně

$$y(x) = \frac{1}{Cx + 1 + \ln x}$$

na intervalech, kde jmenovatel není nulový. Hledáme řešení splňující $y(1) = 1$, což dává

$$1 = \frac{1}{C + 1}$$

a tedy $C = 0$. Proto hledané řešení je

$$y(x) = \frac{1}{1 + \ln x}$$

na intervalu $(\frac{1}{e}, +\infty)$.