

Domácí úkol č. 5

Zadáno: 25. a 26. 3.

Deadline: 1. a 2. 4.

1. Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' + 4y' - 5y = 2e^x \sin^2 x.$$

2. Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

Řešení

1. Jde o rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Nejprve najdeme fundamentální systém a tedy obecné řešení homogenní rovnice. Proto najdeme kořeny charakteristického polynomu $\lambda^2 + 4\lambda - 5$, které jsou $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -5$. Proto můžeme rovnou psát obecné řešení homogenní rovnice jako

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}.$$

Partikulární řešení najdeme metodou speciální pravé strany, musíme však provést nejprve nějaké úpravy. Napíšeme $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ a pravou stranu rozdělíme na dva kusy

$$2e^x \sin^2 x = e^x - e^x \cos 2x.$$

Najdeme proto dvě partikulární řešení pro dvě různé pravé strany. Začneme pravou stranou e^x . To odpovídá $\mu = 1, \nu = 0, P_1(x) = 1$. Protože $\mu + i\nu = 1$ je jednonásobný kořen, položíme $k = 1$. První partikulární řešení tak hledáme ve tvaru

$$\begin{aligned} y_{p1} &= Ax e^x \\ y'_{p1} &= A e^x (x + 1) \\ y''_{p1} &= A e^x (x + 2) \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice dostaneme

$$e^x = A e^x(x+2) + 4A e^x(x+1) - 5Ax e^x,$$

odtud už $6A = 1$ a $A = \frac{1}{6}$.

Druhé partikulární řešení hledáme k pravé straně $-e^x \cos 2x$. Zde $\mu = 1, \nu = 2, P_1(x) = 1, P_2(x) = 0$. Protože $\mu + i\nu = 1 + 2i$ není kořen, položíme $k = 0$. Druhé partikulární řešení tak hledáme ve tvaru

$$\begin{aligned} y_{p2} &= e^x(A \cos 2x + B \sin 2x) \\ y'_{p2} &= e^x((A + 2B) \cos 2x + (B - 2A) \sin 2x) \\ y''_{p2} &= e^x((-3A + 4B) \cos 2x + (-3B - 4A) \sin 2x) \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice dostaneme

$$-e^x \cos 2x = e^x((-4A + 12B) \cos 2x + (-4B - 12A) \sin 2x)$$

a odtud soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 4B + 12A &= 0 \\ 4A - 12B &= 1, \end{aligned}$$

která má řešení $A = \frac{1}{40}, B = -\frac{3}{40}$. Druhé partikulární řešení tak je

$$y_{p2} = \frac{1}{40} e^x (\cos 2x - 3 \sin 2x)$$

A celkově dostáváme obecné řešení původní rovnice

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} + \frac{1}{40} e^x (\cos 2x - 3 \sin 2x) + \frac{1}{6} x e^x$$

na celém $\mathbb{R}$.

2. Jde o rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty ale bez speciální pravé strany. Proto musíme postupovat metodou variace konstant. Nejprve najdeme obecné řešení homogenní rovnice. Kořeny charakteristického polynomu $\lambda^2 + 1$ jsou $\lambda_{1,2} = \pm i$ a proto je obecné řešení homogenní rovnice dáno

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Dále postupujeme variací konstant, takže partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p = C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x.$$

Po prvním zderivování dostaneme podmínku

$$C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = 0$$

a po druhém zderivování

$$C_1'(x) \cos x - C_2'(x) \sin x = \frac{1}{\sin x}.$$

Vynásobíme první rovnici výrazem $\sin x$, druhou rovnici výrazem $\cos x$ a sečteme, abychom dostali

$$C_1'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Zintegrováním tak vyjde

$$C_1(x) = \ln |\sin x|.$$

Dosazením do první rovnice pak

$$C_2'(x) = -1,$$

tedy

$$C_2(x) = -x$$

a obecné řešení zadané diferenciální rovnice je tak

$$y = y_h + y_p = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \sin x \ln |\sin x| - x \cos x$$

na intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.