

Domácí úkol č. 7

Zadáno: 7. a 9. 4.

Deadline: 15. a 16. 4.

1. Rozhodněte o konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln \ln \ln n}$$

2. Rozhodněte o konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$$

Řešení

1. Posloupnost $\{\sqrt[n]{n}\}$ je monotónní (pro dostatečně velká n), omezená a má v nekonečnu limitu 1. Pro určení absolutní konvergence tak použijeme srovnávací kritérium, máme ze škálovací limity

$$|a_n| \geq \frac{1}{\ln \ln \ln n} \geq \frac{1}{n}$$

a harmonická řada diverguje, proto $\sum a_n$ nekonverguje absolutně.

Na druhou stranu, posloupnost $\{\frac{1}{\ln \ln \ln n}\}$ je monotónní a konverguje k nule, proto dle Leibnizova kritéria řada $\sum (-1)^n \frac{1}{\ln \ln \ln n}$ konverguje a následně řada $\sum a_n$ konverguje dle Abelova kritéria.

Závěr je, že řada konverguje neabsolutně.

2. Než se pustíme do vyšetřování řady, zaměříme se na samotný výraz $\cos \frac{\pi n^2}{n+1}$. Vidíme, že pro velká n to připomíná $\cos \pi n = (-1)^n$, což využijeme takto:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi n^2}{n+1} &= \cos\left(\pi n - \pi \frac{n}{n+1}\right) = \cos \pi n \cos \frac{\pi n}{n+1} + \sin \pi n \sin \frac{\pi n}{n+1} \\ &= (-1)^n \cos \frac{\pi n}{n+1} \end{aligned}$$

Přepíšeme tak naši řadu na

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n}{n+1}$$

Posloupnost $\{\frac{n}{n+1}\}$ je monotónní, omezená s limitou v nekonečnu rovnou jedné a proto posloupnost $\{\cos \frac{\pi n}{n+1}\}$ je také monotónní, omezená s limitou v nekonečnu rovnou minus jedné.

Řada $\sum (-1)^n \frac{1}{\ln^2 n}$ konverguje dle Leibnizova kritéria zřejmě a proto naše řada $\sum a_n$ konverguje dle Abelova kritéria.

Pro absolutní konvergenci odhadneme pro dostatečně velká n

$$\left| \cos \frac{\pi n}{n+1} \right| \geq \frac{1}{2}$$

a proto

$$|a_n| \geq \frac{1}{2} \frac{1}{\ln^2 n} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{n},$$

harmonická řada diverguje, a tak dle srovnávacího kritéria naš řada nekonverguje absolutně.

Závěr je, že řada konverguje neabsolutně.